возведем его в квадрат и подставим выражения для γ_0, γ_0' и γ_0'' из первого уравнения (2.1), (3.2), (3.3), получим биквадратное уравнение для R_0, из которого найдем

$$R_0^2 = -\frac{4}{(P_0^2+Q_0^2)^4}[2Q_0(P_0^2-Q_0^2) \pm P_0\sqrt{(P_0^2+Q_0^2)^4-16Q_0^4}]^2$$

Выражение в квадратных скобках будет чисто мнимым только при условиях $Q_0 = P_0$, $P_0^2 < 1$. В этом случаем имеем

$$R_0^2 = 4\frac{1-P_0^4}{P_0^2}, \quad P_0^2 + \frac{1}{4}R_0^2 = P_0^{-2} > 1$$

что в силу (3.2) не соответствует действительному движению.

Таким образом, доказано, что в рассматриваемом случае движения волчка Ковалевской при $P_0 \neq 0$ никакие движения возникнуть не могут.

Следовательно, множество S начальных условий уравнений движения (1.1) волчка Ковалевской в исключительном случае, определяемом условиями (2.1), состоит только из (2.4) и никакие другие движения, кроме (2.3), невозможны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
2. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
3. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— В кн: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61—155.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII.1981

УДК 532.5.517.994

О ВЛИЯНИИ ВЫНУЖДЕННЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Бершадский А. Г.

Предлагается метод приближенного вычисления критических чисел задачи об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда оно может быть представлено в виде суперпозиции стационарного течения и малой периодической по времени добавки. Обычно устойчивость таких течений исследуется по стационарной составляющей. Представляет интерес разработка метода учета периодической добавки и вычисления возможных в данной задаче резонансных частот [1, 2]. Оказывается, что для практически наиболее интересного случая гармонических периодических добавок к стационарному полю скоростей добавки к критическим числам равны нулю в первом порядке по малому параметру и необходимо находить добавки к критическим числам второго порядка. Получен явный вид этих добавок и указаны возможные резонансные частоты.

Вязкая несжимаемая жидкость движется в трехмерной области Ω с границей класса C^2. Разыскивая произвольное течение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{u}(t)$ ($\mathbf{v}_0$ — стационарное поле скоростей, ε — малый параметр, $\mathbf{v}_1(t)$ — периодическая по времени вектор-функция), придем к уравнению для возмущений [3]

$$(1) \qquad \begin{aligned} d\mathbf{u}/dt &= A_0\mathbf{u} + \nu K\mathbf{u} + \varepsilon F(t)\mathbf{u} + w(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ A_0\mathbf{u} &= -P[(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{u}], \quad K\mathbf{u} = P\Delta\mathbf{u} \\ F(t)\mathbf{u} &= -P[(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}_1(t) + (\mathbf{v}_1(t)\nabla)\mathbf{u}] \end{aligned}$$

Здесь P — оператор ортогонального проектирования векторного пространства $\mathbf{L}_2$ на пространство $\mathbf{H}$, полученное замыканием множества финитных в Ω гладких соленоидальных векторов, при этом учтено, что $P(\text{grad}) = 0$.

Оператор Коши линеаризованного уравнения (1)

$$(2) \qquad d\mathbf{u}/dt = A_0\mathbf{u} + \nu K\mathbf{u} + \varepsilon F(t)\mathbf{u}$$

с периодическим по времени оператором может быть записан при помощи представления Флоке в виде $U(t) = Q(t)\,V(t)$, где $Q(t)$ — периодическая дифференцируемая оператор-функция, $V(t)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов с производящим оператором N. Критические значения ν_* ищем из уравнения

$$R\psi = \lambda\psi \tag{3}$$

где условие критичности $\operatorname{Re}\lambda = 0$ [3].

Для этого разложим $Q(t)$, N, ν_*, λ в ряды по степеням ε

$$\begin{aligned} &N = N_0 + \varepsilon N_1 + \ldots, \quad Q(t) = Q_0(t) + \varepsilon Q_1(t) + \ldots \\ &\nu_* = \nu_0 + \varepsilon\nu_1 + \ldots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$N = N_0 = A_0 + \nu K, \quad Q_0 = I \tag{5}$$

Оператор-функция $Q(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$dQ/dt = AQ - QA, \quad A = A_0 + \nu K + \varepsilon F(t) \tag{6}$$

Подставляя в (6) первые три разложения (4) и отделяя члены различных порядков по ε, получим систему соотношений

$$\begin{aligned} &dQ_n/dt = N_0Q_n - Q_nN_0 + C_n(t) - N_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ &C_n(t) = G_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} G_j(t)\,Q_{n-j}(t) - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(t)\,N_{n-j} \\ &C_0 = A_0 + \nu_0K, \quad G_1 = \nu_1K + F(t), \quad G_2 = \nu_2K, \ldots, G_n(t) = \nu_nK \end{aligned} \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (7) в пределах от нуля до T (T — период колебаний) с учетом равенства

$$\int_0^T \frac{dQ}{dt}\,dt = 0$$

находим оператор

$$N_n = \frac{1}{T}\int_0^T [N_0Q_n(t) - Q_n(t)\,N_0 + C_n(t)]\,dt \tag{8}$$

Раскладывая уравнение (3) по ε, получим

$$N_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad N_1\psi_0 + N_0\psi_1 = \lambda_0\psi_1 + \lambda_1\psi_0 \tag{9}$$

Из первого уравнения (9) находим ν_0 и ψ_0.

Рассмотрим также сопряженное к первому уравнению (9) уравнение

$$N_0^+\varphi_0 = \overline{\lambda}_0\varphi_0 \tag{10}$$

где N_0^+ — оператор, сопряженный к оператору N_0. Подставляя ν_0 и ψ_0, найденные из первого уравнения (9) во второе и умножая его скалярно в пространстве H на вектор φ_0 — решение уравнения (10), получаем $(\varphi_0, N_1, \psi_0) = \lambda_1(\varphi_0, \psi_0)$. Подставляя N_1 из (8) и используя условие критичности $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, имеем (выбрана нормировка $(\varphi_0, \psi_0) = 1$)

$$\nu_1 = -\operatorname{Re}\left(\varphi_0, \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt\psi_0\right) \Big/ \operatorname{Re}(\varphi_0, K\psi_0) \tag{11}$$

Из (11) видно, что в случае

$$\int_0^T F(t)\,dt = 0 \tag{12}$$

добавка к критическому числу ν_0 (подсчитанному в стационарном приближении) первого порядка по ε отсутствует (в этом случае, очевидно, и $\lambda_1 = 0$). Следовательно, при выполнении условия (12) необходимо находить добавки к критическому числу следующих порядков по ε. Условие (12) выполняется, в частности, в случае гармонической нестационарности. В этом случае оказывается возможным учесть члены второго порядка малости в критических числах и пренебречь ими в основном течении.

Пусть периодическим оператор-функциям $G_n(t)$ и $Q_n(t)$ соответствуют разложения в ряды Фурье

$$C_n(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Phi_{np} \exp \frac{2\pi pi}{T} t, \quad Q_n(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} D_{np} \exp \frac{2\pi pi}{T} t$$

$$\Phi_{np} = \frac{1}{T} \int_0^T C_n(t) \exp\left(-\frac{2\pi ip}{T} t\right) dt$$

$$D_{np} = \frac{1}{T} \int_0^T Q_n(t) \exp\left(-\frac{2\pi pi}{T} t\right) dt$$

Умножая уравнение (7) на $\exp\left(-\frac{2\pi pi}{T} t\right)$ и интегрируя по t от 0 до T, получаем для оператора D_{np} $(p \neq 0)$ уравнение [4]

$$\frac{2\pi pi}{T} D_{np} - N_0 D_{np} + D_{np} N_0 = \Phi_{np} \quad (p \neq 0) \tag{13}$$

Для значений T, при которых выполняется условие

$$2\pi p/T = i(\mu - \lambda) \quad (\lambda, \mu \in \sigma(N_0))$$

где $\sigma(N_0)$ — спектр оператора N_0, уравнение (13) имеет единственное решение [4]

$$D_{np} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma_0} \oint_{\gamma_0} \frac{(N_0 - \lambda I)^{-1} \Phi_{np} (N_0 - \mu I)^{-1}}{2\pi pi/T - \lambda + \mu} d\lambda\, d\mu \tag{14}$$

где γ_0 — контур, окружающий достаточно тесно $\sigma(N_0)$.

Из соотношения $Q_n(0) = \Sigma D_{np} = 0$ находится $D_{n0} = -\Sigma D_{np}$ $(p \neq 0)$. Отсюда и из (8) можно получить для N_n представление [4]

$$N_n = N_0 D_{n0} - D_{n0} N_0 + \Phi_{n0} \tag{15}$$

Пусть условие (12) выполнено. Тогда $\Phi_{10} = 0$, откуда

$$N_1 = N_0 D_{10} - D_{10} N_0 \tag{16}$$

Умножим уравнение

$$N_0 \psi_2 + N_1 \psi_1 + N_2 \psi_0 = \lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_0$$

скалярно на φ_0 в H. Используя второе уравнение (9), (4), (5), получаем

$$\nu_2 (\varphi_0, K\psi_0) + \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\varphi_0, \int_0^T F(t) \exp\left(\frac{2\pi pi}{T} t\right) \times \right.$$
$$\left. \times D_{1p} \psi_0 dt\right) = \lambda_2 (\varphi_0, \psi_0)$$

Выбирая нормировку $(\varphi_0, \psi_0) = 1$ и используя условие критичности $\operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, находим представление для ν_2

$$\nu_2 = -\frac{1}{T \operatorname{Re}(\varphi_0, K\psi_0)} \operatorname{Re} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\varphi_0, \int_0^T F(t) \exp \frac{2\pi pit}{T} D_{1p} \psi_0 dt\right) \tag{17}$$

Осталось найти $D_{1p}\psi_0$ при $p \neq 0$ (так как при $p = 0$ слагаемое в сумме (17) выпадает в силу (12)). Замечая, что

$$(N_0 - \mu I)^{-1} \psi_0 = \psi_0 / (\lambda - \mu)$$

и пользуясь (14), получаем

$$\nu_2 = -\operatorname{Re} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (\varphi_0, f_{-p} [N_0 - i(p\omega + \omega_0)]^{-1} f_p \psi_0) / \operatorname{Re}(\varphi_0, K\psi_0)$$

$$f_p = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \exp \frac{2\pi pi}{T} t\, dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_0 = \frac{\lambda_0}{i}$$

т. е. добавку к критическому числу $\nu_* = \nu_0 + \varepsilon^2 \nu_2$.

Если на мнимой оси в критическом спектре оператора N_0 кроме точки $\lambda_0 = i\omega_0$ есть еще точка $\lambda' = i\omega'$, то частоты $\omega = |\omega' - \omega_0|/p$ при некоторых p могут оказаться резонансными. При этом следует учитывать, что спектр оператора N_0 — дискретный [5]. В связи с явлением резонанса интересно вспомнить, что наличие в критическом спектре оператора N_0 пары комплексно-сопряженных точек приводит к возбуждению автоколебаний [6]. В этом случае резонансные частоты — $\omega = 2\omega_0/p$.

Автор благодарит А. Б. Капусту за помощь в работе и В. И. Юдовича за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капуста А. Б.* Двухмерное нестационарное течение проводящей жидкости, возбуждаемое вращающимся магнитным полем.— Магнитная гидродинамика, 1977, № 3, с. 77—83.
2. *Бершадский А. Г., Капуста А. Б.* Теория возмущений для исследования устойчивости периодических МГД-колебаний.— Магнитная гидродинамика, 1979, № 3, с. 138—140.
3. *Юдович В. И.* Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости.— Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2, с. 292—296.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
5. *Юдович В. И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5, с. 1037—1040.
6. *Юдович В. И.* О возникновении автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638—655.

Донецк

Поступила в редакцию 10.VI.1980

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ОДНОГО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Алешин Н. П., Каменский В. С., Могильнер Л. Ю.

Получено аналитическое выражение для некоторых решений трансцендентного уравнения, встречающегося при решении задачи дифракции упругих волн на круговом цилиндре и сфере в высокочастотном случае. Получено новое представление функции Ханкеля в области, где аргумент велик по модулю и индекс имеет порядок аргумента.

Некоторые приемы решения задачи дифракции упругих волн на сфере или круговом цилиндре приводят к уравнению

$$\varphi_4 F(a) F(ma) + \varphi_3 F(a) + \varphi_2 F(ma) + \varphi_1 = 0 \tag{1}$$

$$F(z) = H_\nu^{(1)\prime}(z)/H_\nu^{(1)}(z), \quad H_\nu^{(1)\prime}(a) = \left.\frac{dH_\nu^{(1)}(z)}{dz}\right|_{z=a} \tag{2}$$

$$\varphi_1 = \lambda^2\left(1 - 2\frac{\nu^2}{a^2}\right)^2 - \varkappa^2\frac{\nu^2}{a^4}; \quad \varphi_2 = \frac{m}{a}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{a}$$

$$\varphi_4 = -\frac{4m\nu^2}{a^2} + \frac{\varkappa^2}{a^2}; \quad 0 < m < 1$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода порядка ν. Как аргумент, так и порядок ν, вообще говоря, предполагаются комплексными величинами, достаточно большими по модулю, чтобы можно было использовать асимптотическое разложение. Величина a — переменная, асимптотически большая, ν — неизвестная.

Частному случаю уравнения (1), когда $\lambda^2 = 1$, $\varkappa = \pm 3$, посвящены работы [1, 2]. Однако имеющиеся в них опечатки, просмотры и грубые приемы не позволяют безоговорочно использовать результаты этих работ. Цель данной статьи — заново решить уравнение (1) и получить более надежный результат. При этом будут использованы многие приемы решения задачи, предложенные в [1, 2].

Следуя [1, 2], а также [3, 4], будем представлять $H_\nu^{(1)}(z)$ в виде линейной комбинации (A и B — неизвестные функции)

$$H_\nu^{(1)}(z) = A(\eta) H_{1/3}^{(1)}(\xi) + B(\eta) H_{-2/3}^{(1)}(\xi)$$