где $\Delta_3(k^2)$ — голоморфная функция k^2. Как видно из выражения (3.4) для малых k^2, $\delta_3 \neq 0$ и, следовательно, искомые периодические движения существуют. Используя (3.4), можно найти из уравнений (3.2) явное выражение для главного члена разложения α' в ряд по μ при малых k^2.

Найденные семейства периодических движений с периодом $T(1+\alpha)$ по t зависят от четырех произвольных начальных условий. Каждое периодическое решение, отвечающее указанным периодическим движениям, имеет по крайней мере четыре нулевых характеристических показателя [1]. Если выполнено условие изоэнергетической невырожденности для приведенной системы, то для одного из семейств периодических движений оставшиеся два характеристических показателя вещественны и имеют противоположные знаки [1,5], т. е. движения этого семейства неустойчивы. Второе же семейство в этом случае имеет кроме нулевых два чисто мнимых характеристических показателя [1,5].

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М: Наука, 1971. 771 с.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 927—929.
3. *Вагнер Э. А.* Об одном семействе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 553—556.
4. *Садов Ю. А.* Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962—964.
5. *Козлов В. В.* Новые периодические решения задачи о движении тяжелого несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки.— В кн.: Исследования по механике жидкостей и твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 121—125.
6. *Ковалев А. М.* О движении тела, мало отличающегося от гироскопа Лангранжа.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 3. К.: Наук. думка, 1971, с. 25—27.
7. *Аксененкова И. М.* Канонические переменные угол — действие в задаче о волчке Лагранжа.— Вестн. МГУ, сер. матем., механ., 1981, № 1, с. 86—90.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1980

УДК 531.381

ОДИН ИЗ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Старжинский В. М.

Рассматривается один из случаев вырождения решения Ковалевской [1]. Показано, что при нулевых значениях постоянных первых двух интегралов и значении постоянной приведенного интеграла Ковалевской, равном четырем, имеет место единственное маятниковое движение определенного вида и никакие другие движения невозможны.

1. Исходные уравнения. Уравнения Эйлера — Пуассона в случае Ковалевской запишем в обозначениях [2]

$$\frac{dP}{d\tau}=\frac{1}{2}QR,\quad \frac{dQ}{d\tau}=-\frac{1}{2}RP-\gamma'',\quad \frac{dR}{d\tau}=2\gamma' \tag{1.1}$$
$$\frac{d\gamma}{d\tau}=R\gamma'-Q\gamma'',\quad \frac{d\gamma'}{d\tau}=P\gamma''-R\gamma,\quad \frac{d\gamma''}{d\tau}=Q\gamma-P\gamma'$$
$$\left(\tau=\nu t,\ P=\frac{p}{\nu},\quad Q=\frac{q}{\nu},\quad R=\frac{r}{\nu},\quad \nu=\sqrt{\frac{Mg\cdot OG}{A}}\right)$$

Уравнения (1.1) допускают четыре первых алгебраических интеграла

$$2(P^2+Q^2)+R^2-4\gamma=4H,\ 2(P\gamma+Q\gamma')+R\gamma''=2L \tag{1.2}$$
$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\ (P^2-Q^2+2\gamma)^2+4(PQ+\gamma')^2=K^2$$

Допустим, что постоянные интегралов живых сил и кинетического момента тела относительно вертикали (направленной для определенности вниз) равны нулю, а постоянная четвертого интеграла равна четырем

(1.3) $$H = L = 0, \quad K^2 = 4$$

По классификации Г. Г. Аппельрота рассматриваемый случай принадлежит к «особо замечательным движениям четвертого класса» [3], хотя Г. Г. Аппельрот данный случай и не исследовал.

2. Множество S начальных условий: $P_0 = 0$. Равенства (1.2) с условиями (1.3) означают, что на начальные значения ($\tau = 0$) переменных наложены четыре условия

(2.1) $$2(P_0^2 + Q_0^2) + R_0^2 = 4\gamma_0, \ 2(P_0\gamma_0 + Q_0\gamma_0') + R_0\gamma_0'' = 0$$
$$\gamma_0^2 + \gamma_0'^2 + \gamma_0''^2 = 1, \ (P_0^2 - Q_0^2 + 2\gamma_0)^2 + 4(P_0Q_0 + \gamma_0')^2 = 4$$

определяющие некоторое множество S в пространстве начальных условий P_0, Q_0, R_0, γ_0, γ_0', γ_0''. Впрочем, поскольку равенства (2.1) справедливы и для любого $\tau > 0$, то движение не выйдет из множества S, рассматриваемого в фазовом пространстве P, Q, R, γ, γ', γ''.

Из первого уравнения (2.1) следует

$$\gamma_0 \geqslant 0, \ 2(P_0^2 + Q_0^2) + R_0^2 \leqslant 4$$

и, в частности

$$R_0^2 \leqslant 4, \ P_0^2 + Q_0^2 \leqslant 2, \ |P_0| \leqslant \sqrt{2}, \ |Q_0| \leqslant \sqrt{2}$$

Положим в (2.1) $P_0 = 0$ и, выразив из первого уравнения γ_0, а из последнего $\gamma_0'^2$, подставим эти выражения в третье уравнение (2.1). Получим

$${}^1/_4 Q_0^2 (Q_0^2 + R_0^2) + \gamma_0''^2 = 0$$

и, следовательно, найдем $Q_0 = \gamma_0'' = 0$. Подставляя последние равенства в (2.1), имеем

(2.2) $$P_0 = 0 : Q_0 = \gamma_0'' = 0, \quad R_0^2 = 4\gamma_0, \quad \gamma_0^2 + \gamma_0'^2 = 1 \quad (|R_0| \leqslant \sqrt{2})$$

где все последующие равенства вытекают из первого. Итак, множеству S принадлежит отрезок (2.2) гиперкривой одного измерения, из которого возникает маятниковое движение

$$P = Q = \gamma'' \equiv 0, \quad R^2 \equiv 4\gamma, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 \equiv 1 \quad (|R| \leqslant \sqrt{2})$$

вокруг вытянутой оси эллипсоида вращения, занимающей горизонтальное положение, и в котором центр масс G тела поднимается до горизонтальной плоскости, проведенной через неподвижную точку. Отметим, что оба положения равновесия не принадлежат множеству S, а перманентные вращения и все остальные маятниковые движения из него не возникают.

3. Множество $S : P_0 \neq 0$. Допустим, что $R_0 = 0$. Тогда, выражая γ_0 и γ_0' из первого и второго уравнений (2.1) (замечая, что $Q_0 \neq 0$, поскольку $P_0\gamma_0 \neq 0$), получим

$$2\gamma_0 = P_0^2 + Q_0^2, \quad \gamma_0' = -\frac{P_0}{Q_0}\gamma_0$$

Подставив эти выражения в третье и четвертое уравнения (2.1), найдем

$$Q_0^2/P_0^2 + \gamma_0''^2 = 0$$

что невозможно. Итак

(3.1) $$R_0 \neq 0 \ \text{при} \ P_0 \neq 0$$

Покажем теперь, что система уравнений (2.1) не имеет решений при $P_0 \neq 0$. Выразим γ_0 из первого уравнения (2.1) и подставим полученное выражение в четвертое уравнение (2.1). Найдем

(3.2) $$\gamma_0' = -P_0Q_0 \pm \sqrt{1 - (P_0^2 + {}^1/_4 R_0^2)^2} \quad (P_0^2 + {}^1/_4 R_0^2 \leqslant 1)$$

где знак перед радикалом определяется начальным значением γ_0'. Затем из третьего уравнения (2.1) получим

(3.3) $$\gamma_0''^2 = {}^3/_4 P_0^4 - {}^3/_2 P_0^2Q_0^2 - {}^1/_4 Q_0^4 +$$
$$+ {}^1/_4 (P_0^2 - Q_0^2) R_0^2 \pm 2P_0Q_0 \sqrt{1 - (P_0^2 + {}^1/_4 R_0^2)^2}$$

Запишем второе уравнение (2.1) в виде

$$2(P_0\gamma_0 + Q_0\gamma_0') = -R_0\gamma_0''$$

возведем его в квадрат и подставим выражения для γ_0, γ_0' и γ_0'' из первого уравнения (2.1), (3.2), (3.3), получим биквадратное уравнение для R_0, из которого найдем

$$R_0^2 = -\frac{4}{(P_0^2+Q_0^2)^4}[2Q_0(P_0^2-Q_0^2) \pm P_0\sqrt{(P_0^2+Q_0^2)^4-16Q_0^4}]^2$$

Выражение в квадратных скобках будет чисто мнимым только при условиях $Q_0 = P_0$, $P_0^2 < 1$. В этом случаем имеем

$$R_0^2 = 4\frac{1-P_0^4}{P_0^2}, \quad P_0^2 + \frac{1}{4}R_0^2 = P_0^{-2} > 1$$

что в силу (3.2) не соответствует действительному движению.

Таким образом, доказано, что в рассматриваемом случае движения волчка Ковалевской при $P_0 \neq 0$ никакие движения возникнуть не могут.

Следовательно, множество S начальных условий уравнений движения (1.1) волчка Ковалевской в исключительном случае, определяемом условиями (2.1), состоит только из (2.4) и никакие другие движения, кроме (2.3), невозможны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
2. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
3. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— В кн: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1940, с. 61—155.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII.1981

УДК 532.5.517.994

О ВЛИЯНИИ ВЫНУЖДЕННЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Бершадский А. Г.

Предлагается метод приближенного вычисления критических чисел задачи об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда оно может быть представлено в виде суперпозиции стационарного течения и малой периодической по времени добавки. Обычно устойчивость таких течений исследуется по стационарной составляющей. Представляет интерес разработка метода учета периодической добавки и вычисления возможных в данной задаче резонансных частот [1, 2]. Оказывается, что для практически наиболее интересного случая гармонических периодических добавок к стационарному полю скоростей добавки к критическим числам равны нулю в первом порядке по малому параметру и необходимо находить добавки к критическим числам второго порядка. Получен явный вид этих добавок и указаны возможные резонансные частоты.

Вязкая несжимаемая жидкость движется в трехмерной области Ω с границей класса C^2. Разыскивая произвольное течение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{u}(t)$ ($\mathbf{v}_0$ — стационарное поле скоростей, ε — малый параметр, $\mathbf{v}_1(t)$ — периодическая по времени вектор-функция), придем к уравнению для возмущений [3]

$$(1) \qquad \begin{aligned} d\mathbf{u}/dt &= A_0\mathbf{u} + \nu K\mathbf{u} + \varepsilon F(t)\,\mathbf{u} + w(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ A_0\mathbf{u} &= -P[(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{u}], \quad K\mathbf{u} = P\Delta\mathbf{u} \\ F(t)\,\mathbf{u} &= -P[(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{v}_1(t) + (\mathbf{v}_1(t)\,\nabla)\,\mathbf{u}] \end{aligned}$$

Здесь P — оператор ортогонального проектирования векторного пространства $\mathbf{L}_2$ на пространство $\mathbf{H}$, полученное замыканием множества финитных в Ω гладких соленоидальных векторов, при этом учтено, что $P\,(\mathrm{grad}) = 0$.

Оператор Коши линеаризованного уравнения (1)

$$(2) \qquad d\mathbf{u}/dt = A_0\mathbf{u} + \nu K\mathbf{u} + \varepsilon F(t)\,\mathbf{u}$$