Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 531.381

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ

Сергеев В. С.

Рассматривается движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела, распределение масс которого близко к распределению масс в случае Лагранжа. Уравнения движения записываются в переменных действие — угол для случая Лагранжа, после чего методом Пуанкаре [1], разработанным для систем такого вида, доказывается существование новых семейств периодических движений, которые представляются рядами по степеням введенного малого параметра.

Периодические решения при указанных условиях для приведенной системы рассматривались в [2, 3].

Переменные действие—угол в задаче Эйлера—Пуансо введены в [4]. С их помощью в работе [5] доказано существование периодических движений общего вида в соответствующей возмущенной задаче.

В случае Лагранжа для системы с исключенной циклической координатой переменные действие—угол использовались в [6] для выяснения вопроса о существовании условно-периодических движений твердого тела, мало отличающегося от гироскопа Лагранжа. Переменные действие—угол в случае Лагранжа для полной системы рассмотрены в [7], где приведены также разложения в ряды Фурье направляющих косинусов вертикали.

1. Будем описывать движение тяжелого твердого тела углами Эйлера ϑ, φ, ψ и сопряженными им каноническими импульсами p_ϑ, p_φ, p_ψ. Введем малый параметр $\mu \geqslant 0$, используя формулы

$$B = A\,(1 + \mu D)^{-1}, \quad x_0 = \mu x_1 l, \quad y_0 = \mu y_1 l, \quad z_0 = z_1 l > 0$$

содержащие главные для неподвижной точки O моменты инерции A, B, координаты x_0, y_0, z_0 центра масс тела относительно системы координат, связанной с главными осями инерции в точке O, а также безразмерные величины D, x_1, y_1, z_1, которые считаются конечными по сравнению с малым параметром μ, и характерный размер тела l. Предполагается, что ось O_z неподвижной в пространстве системы координат $Oxyz$ направлена вертикально вниз.

Перейдем к новым переменным $I = (I_1, I_2, I_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, являющимся переменными действие—угол в случае Лагранжа. Предполагаем, что корни e_i ($i = 1$, 2, 3) известного уравнения третьей степени относительно $\cos\vartheta$, определяющего область допустимых значений ϑ, удовлетворяют неравенствам

$$e_3 < -1, \quad -1 < e_2 < e_1 < 1 \tag{1.1}$$

Тогда преобразование имеет вид

$$p_\vartheta = \left[\beta + \beta_0 \cos\vartheta - \frac{(I_2 - I_3\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}\right]^{1/2}, \quad p_\psi = I_2, \quad p_\varphi = I_3 \tag{1.2}$$

$$\cos\vartheta = e_1 \operatorname{cn}^2\left(\frac{K}{\pi} w_1\right) + e_2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} w_1\right), \quad w_2 = \psi - \chi_+, \quad w_3 = \varphi + \chi_-$$

$$\chi_\pm = (\sqrt{\beta_0}\, \varepsilon_3 K)^{-1}\left(Q_\pm(\alpha) K - Q_\pm\left(\frac{\pi}{2}\right) F(\alpha, k)\right)$$

$$Q_\pm(\alpha) = \frac{|I_2 - I_3|}{1 - e_1} \Pi(\alpha, b_+, k) \pm \frac{|I_2 + I_3|}{1 + e_1} \Pi(\alpha, b_-, k)$$

$$\sin\alpha = \sqrt{e_1 - \cos\vartheta}/\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3^2 = e_1 - e_3$$

$$\beta_0 = 2MgAz_0, \quad \beta = (2k_1 - I_3^2/C)A, \quad b_\pm = \pm\varepsilon_2^2/(1 \mp e_1)$$

Здесь $k = \varepsilon_2/\varepsilon_3$ — модуль эллиптических интегралов и функций, Mg — вес тела, C — главный момент инерции, k_1 — постоянная интеграла площадей. Величины β, e_i в формулах (1.2) предполагаются выраженными через I.

Переменные w_i при $\mu = 0$ изменяются в общем случае условно периодически с частотами

$$\omega_1 = \frac{\pi\varepsilon_3 \sqrt{\beta_0}}{2AK}, \quad \omega_2 = \frac{Q_+(\pi/2)}{2AK}, \quad \omega_3 = I_3 \frac{A-C}{AC} - \frac{Q_-(\pi/2)}{2AK}$$

2. Представим функцию Гамильтона задачи в виде

$$H = H_0(I) + \mu H_1(I, w_1, w_3), \quad H_1(I, w_1, w_3) = \tag{2.1}$$
$$= \frac{D}{2A}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}(I_2 - I_3\cos\vartheta) - p_\vartheta\right]^2 - Mgl(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)\sin\vartheta$$

где ϑ, φ, p_ϑ зависят от I, w по формулам (1.2).

Будем искать, основываясь на методе Пуанкаре [1], периодические решения системы уравнений с функцией Гамильтона (2.1), близкие к периодическим решениям интегрируемой невозмущенной задачи. Предположим, что для некоторого $T > 0$ выполняются равенства $\omega_k T = 2\pi m_k$, $k = 1, 2, 3$, где $m_k \neq 0$ — целые числа. Тогда общее решение рассматриваемой системы при

$$I_k = a_k, \quad w_k = \omega_k t + \alpha_k \tag{2.2}$$

где a_k, α_k — постоянные, будет периодическим с периодом T.

На основании теоремы Пуанкаре можно утверждать, что при малых μ будут существовать по меньшей мере два семейства периодических решений периода T, если выполняются условия

$$\frac{\partial^2 [H_1]}{\partial \alpha_3^2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial [H_1]}{\partial \alpha_3} = 0 \tag{2.3}$$

где $[H_1]$ — среднее за период T функции H_1, в которую подставлено решение (2.2), и

$$\delta = \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(I_1, I_2, I_3)} \neq 0 \tag{2.4}$$

при $I_k = a_k$. Эти периодические решения являются голоморфными функциями параметра μ.

Остановимся на условии (2.4). Пусть δ_1 — якобиан ω_k по e_j, а δ_2— якобиан e_j по I_k $(j, k = 1, 2, 3)$, тогда $\delta = \delta_1\delta_2$. Для δ_2 получим выражение

$$\delta_2 = \frac{4\pi\varepsilon_3\beta_0^{5/2}K(I_3^2 - I_2^2)}{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)} \tag{2.5}$$

Отметим, что при сделанных предположениях (1.1) выполняется неравенство $|I_2| \neq |I_3|$, и поэтому согласно (2.5) $\delta_2 \neq 0$.

Можно показать, например, вычисляя первые члены разложения δ_2 в ряд по степеням k^2, что якобиан $\delta_1 \not\equiv 0$. При этом δ_1 имеет порядок k^2 и представляется в виде

$$\delta_1 = \frac{k^2\beta_0^{1/2}}{64A^3C\varepsilon_3(1 - e_1^2)(1 - e_3^2)}[3As_2(e_3s_2 - s_3) - 4C\varepsilon_3^2(I_2^2 - I_3^2)] + \tag{2.6}$$
$$+ k^4\Delta_1(k^2), \quad s_2 = I_2 - e_1I_3, \quad s_3 = I_3 - e_1I_2$$

где $\Delta_1(k^2)$ — голоморфная функция k^2. Выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (2.6), не есть тождественный нуль, в чем можно убедиться, выразив переменные I_2, I_3 через независимые величины β_0, e_1, e_3 $(e_2 = e_1)$.

Рассмотрим теперь условие (2.3), которое также может быть удовлетворено. Действительно, полагая ради простоты $A = B$ и считая от противного, что одновременно выполняются равенства $\partial[H_1]/\partial\alpha_3 = 0$ и $\partial^2[H_1]/\partial\alpha_3^2 = 0$, находим, поскольку $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, что

$$\int_0^T \exp[i(\Phi_1 + \omega_3 t + \alpha_3)]\sin\vartheta\, dt = 0 \tag{2.7}$$

Здесь в функциях $\Phi_1 = \varphi - w_3$, ϑ, зависящих на основании (1.2) от I, w_1, аргументы заменены согласно формулам (2.2). Преобразовав (2.7), приходим к равенству

$$\int_0^T \exp(i\omega_3 t) R\, dt = 0 \tag{2.8}$$

$$R = \cos\Phi_1 \sin\vartheta - \omega_3^{-1}\frac{dS}{dt}, \quad S = \sin\Phi_1 \sin\vartheta$$

Функция R, периодическая по t с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$, может быть разложена на отрезке $[0, T_1]$ в ряд Фурье, коэффициенты которого обозначим r_n. Интеграл (2.8) отличен от нуля только при $\omega_3 = n\omega_1$ ($n \neq 0$ — целое) и в этом случае равен $r_n T$. Таким образом, для каждого n из множества значений, таких, что $r_n \neq 0$ и $\omega_3 = n\omega_1$, существуют при выполнении (2.4) искомые периодические по ϑ, ψ, φ (mod 2π) решения задачи. Покажем, что это множество значений n не пусто. С этой целью разложим, используя формулы (1.2), функцию R при $k^2 \ll 1$ в ряд Фурье и выпишем первые члены разложения по степеням k^2

$$R = \sqrt{1-e_1^2}\left[1 + \frac{k^2 e_1 \varepsilon_3^2}{1-e_1^2}\sin^2\frac{w_1}{2} + \right. \tag{2.9}$$
$$\left. + \frac{k^2\varepsilon_3}{4\sqrt{\beta_0}}\left(\frac{I_2 - I_3}{(1-e_1)^2} + \frac{I_2 + I_3}{(1+e_1)^2}\right)\cos w_1 + k^4 R_2(w_1, k^2)\right)$$

где $R_1(w_1, k^2)$ — голоморфная функция k^2. Как следует из выражения (2.9), существуют периодические движения, для которых $\omega_1 = \omega_3$. Функция $R_1(w_1, 0)$ содержит гармонику $\cos 2w_1$, поэтому должны существовать также периодические движения с $\omega_3 = 2\omega_1$. При этом $\omega_3 = (m_3/m_2)\omega_2$. Существование периодических движений для $n > 2$ следует из результатов работы [1].

3. Покажем, что при малых μ существуют семейства решений, описывающих периодические движения с периодами, близкими к периодам периодических движений невозмущенной задачи. Для этого введем новую независимую переменную τ по формуле

$$t = (1+\alpha)\tau \tag{3.1}$$

где $\alpha = \mu\alpha'$ и α' — голоморфная функция μ. Будем искать периодические решения преобразованной согласно (3.1) гамильтоновой системы уравнений, которые имеют период T по τ и удовлетворяют при $\tau = 0$ условию

$$I_k = a_k + \beta_k, \quad w_k = \alpha_k + \beta_{k+3}, \quad k = 1,\ 2,\ 3$$

где $\beta_k = \mu\beta_k'$ и β_k' — подлежащие определению голоморфные функции параметра μ. Тогда условия периодичности функций принимают вид

$$\mu\left(\omega_i\alpha' T + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\omega_i}{\partial I_k}\beta_k' T + \int_0^T \frac{\partial H_1}{\partial I_i}\,d\tau\right) + \mu^2\Psi_i = 0 \tag{3.2}$$

где Ψ_i — голоморфные функции μ, α', β_i. Соотношения (3.2) будем рассматривать как уравнения, связывающие α', β_k' ($k = 1, 2, 3$). Достаточным условием их разрешимости, например относительно α', β_1', β_2', является выполнение при $I_k = a_k$ неравенства

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_{1,1}' & \omega_{1,2}' \\ \omega_2 & \omega_{2,1}' & \omega_{2,2}' \\ \omega_3 & \omega_{3,1}' & \omega_{3,2}' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \left(\omega_{i,k}' = \frac{\partial\omega_i}{\partial I_k}\right) \tag{3.3}$$

Начальное значение переменной I_3 остается произвольным.

Таким образом, выполнение неравенств (3.3), (2.3) достаточно для существования двух семейств периодических движений, период которых, однозначно определяемый по начальным условиям согласно (3.2), близок к периоду периодического движения невозмущенной задачи.

Вычислим определитель δ_3 (3.3) при $k^2 \ll 1$, выразив его через якобиан

$$D(\omega_1, \omega_2, I_3\omega_3)/D(I_1, I_2, I_3)$$

и якобианы δ_1, δ_2. Воспользовавшись (2.6), найдем

$$\delta_3 = \frac{k^2\beta_0^{1/2}\delta_2}{64A^3C\varepsilon_3(1-e_1^2)(1-e_3^2)}\left\{\frac{3I_3 s_2}{1-e_1^2}(A - 2C)(e_3 s_2 - s_3) + \right. \tag{3.4}$$
$$+ (I_2^2 + I_3^2)\left[\frac{6I_3\varepsilon_3^2}{1-e_1^2}(2A - C) - \frac{Cs_2}{1-e_1^2} + \frac{s_1}{1-e_3^2} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{(1-e_1^2)^2}(s_2(1-e_1e_3) - s_3\varepsilon_3^2)\right]\right\} + k^4\Delta_3(k^2), \quad s_1 = I_2 - e_3 I_3$$

[1] *Сергеев В. С.* О периодических движениях тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.— Препринт ВЦ АН СССР. М., 1981. 21 с.

где $\Delta_3(k^2)$ — голоморфная функция k^2. Как видно из выражения (3.4) для малых k^2, $\delta_3 \not\equiv 0$ и, следовательно, искомые периодические движения существуют. Используя (3.4), можно найти из уравнений (3.2) явное выражение для главного члена разложения α' в ряд по μ при малых k^2.

Найденные семейства периодических движений с периодом $T(1+\alpha)$ по t зависят от четырех произвольных начальных условий. Каждое периодическое решение, отвечающее указанным периодическим движениям, имеет по крайней мере четыре нулевых характеристических показателя [1]. Если выполнено условие изоэнергетической невырожденности для приведенной системы, то для одного из семейств периодических движений оставшиеся два характеристических показателя вещественны и имеют противоположные знаки [1,5], т. е. движения этого семейства неустойчивы. Второе же семейство в этом случае имеет кроме нулевых два чисто мнимых характеристических показателя [1,5].

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М: Наука, 1971. 771 с.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 927—929.
3. *Вагнер Э. А.* Об одном семействе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 3, с. 553—556.
4. *Садов Ю. А.* Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 5, с. 962—964.
5. *Козлов В. В.* Новые периодические решения задачи о движении тяжелого несимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки.— В кн.: Исследования по механике жидкостей и твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 121—125.
6. *Ковалев А. М.* О движении тела, мало отличающегося от гироскопа Лангранжа.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 3. К.: Наук. думка, 1971, с. 25—27.
7. *Аксененкова И. М.* Канонические переменные угол — действие в задаче о волчке Лагранжа.— Вестн. МГУ, сер. матем., механ., 1981, № 1, с. 86—90.

Москва

Поступила в редакцию 10.XII.1980

УДК 531.381

ОДИН ИЗ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Старжинский В. М.

Рассматривается один из случаев вырождения решения Ковалевской [1]. Показано, что при нулевых значениях постоянных первых двух интегралов и значении постоянной приведенного интеграла Ковалевской, равном четырем, имеет место единственное маятниковое движение определенного вида и никакие другие движения невозможны.

1. Исходные уравнения. Уравнения Эйлера — Пуассона в случае Ковалевской запишем в обозначениях [2]

$$\frac{dP}{d\tau}=\frac{1}{2}QR,\quad \frac{dQ}{d\tau}=-\frac{1}{2}RP-\gamma'',\ \frac{dR}{d\tau}=2\gamma' \tag{1.1}$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau}=R\gamma'-Q\gamma'',\quad \frac{d\gamma'}{d\tau}=P\gamma''-R\gamma,\quad \frac{d\gamma''}{d\tau}=Q\gamma-P\gamma'$$

$$\left(\tau=\nu t,\ P=\frac{p}{\nu},\quad Q=\frac{q}{\nu},\quad R=\frac{r}{\nu},\quad \nu=\sqrt{\frac{Mg\cdot OG}{A}}\right)$$

Уравнения (1.1) допускают четыре первых алгебраических интеграла

$$2(P^2+Q^2)+R^2-4\gamma=4H,\ 2(P\gamma+Q\gamma')+R\gamma''=2L \tag{1.2}$$

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\ (P^2-Q^2+2\gamma)^2+4(PQ+\gamma')^2=K^2$$

Допустим, что постоянные интегралов живых сил и кинетического момента тела относительно вертикали (направленной для определенности вниз) равны нулю, а