Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.37

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Леонов М. Я., Нисневич Е. Б.

Предлагается методика определения пластической деформации по заданному за пределом упругости закону изменения напряженного состояния. На основании полученных уравнений вычислены неупругие деформации для задач Л. А. Галина [1] и Г. П. Черепанова [2] о растяжении бесконечной плоскости с круговым отверстием.

1. Исходные представления. Упругая деформация образуется в результате изменения межатомного расстояния, а неупругая деформация является следствием изменения порядка расположения атомов в теле путем скольжения по межатомным плоскостям. В чистом виде неупругая деформация (без упругой) в реальном твердом теле происходить не может. Количественно тензор пластической деформации Γ_{jk} (j, $k = x$, y, z) определяется как разность между тензором полной деформации и его упругой частью. При этом упругая деформация связана законом Гука с компонентами тензора напряжений.

Было показано [3], что в плоском случае напряженное состояние от заданной пластической деформации (на границе области пластичности неупругая деформация равна нулю) можно представить как компоненты напряжений от клиновидных дислокаций, распределенных по области пластичности с плотностью p, а по границе L области пластичности с плотностью p_L

$$p=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Gamma_{xx}}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Gamma_{yy}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\chi \tag{1.1}$$

$$p_L=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Gamma_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\Gamma_{yy}}{\partial x}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial\Gamma_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\Gamma_{xx}}{\partial y}\right)\cos(ny)\right]+\chi_L \tag{1.2}$$

причем при плоской деформации

$$\chi=\frac{\nu}{2}\Delta\Gamma_{zz},\quad \chi_L=-\frac{\nu}{2}\frac{\partial\Gamma_{zz}}{\partial n}$$

при плоском напряженном состоянии

$$\chi=0,\ \chi_L=0$$

Здесь G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, n — внешняя нормаль к линии L, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Из сказанного вытекает следующее. Чтобы найти напряженное состояние, возникающее от пластических деформаций, заданных в произвольном теле, необходимо определить напряжения от одной клиновидной дислокации и просуммировать их. В случае многосвязного тела напряженное состояние от клиновидных дислокаций, расположенных на каждом контуре, увеличивающем его связность, не зависит от закона их распределения, а определяется их суммарной мощностью. Это приводит к понятию дислокации Вольтерра.

Таким образом, можно найти напряженное состояние, возникающее в теле при заданной пластической деформации. Ниже рассматривается обратная задача — определение пластической деформации по заданному за пределом упругости закону изменения напряженного состояния. При этом пластическая деформация в теле должна быть такой, чтобы напряженное состояние (вычисленное по вышеизложенной методике) от нее и от внешних усилий в каждый момент совпадало с заданными компонентами напряжений.

2. Вспомогательная задача. Пусть требуется найти структурные несовершенства (плотность клиновидных дислокаций) по известному полю напряжений. Для решения этой задачи вырежем из ненагруженного тела замкнутый прямоугольный контур в виде рамы. Затем эту раму разрежем каким-либо сечением. Если внутри контура имелись дефекты, то сечения рамы разойдутся на угол, который будет равен суммарной мощности клиновидных дислокаций, заключенных в рассматриваемом контуре. С другой стороны, этот угол можно найти по упругим деформациям рамки, предполагая, что они определены в результате идеального эксперимента при разрезании тела на достаточно мелкие части. Тогда плотность клиновидных дислокаций, выраженная через компоненты напряжений, в области пластичности будет иметь вид (при плоском напряженном состоянии $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, при плоской деформации $\varkappa = 3 - 4\nu$)

$$p = -\frac{1+\varkappa}{8G}\Delta(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2.1}$$

На границе области плотность клиновидных дислокаций равна [3]

$$p_L = -\frac{1+\varkappa}{8G}\left[\frac{\partial(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial n}\right] \tag{2.2}$$

Квадратные скобки означают разрыв величины, стоящей в них, на границе области скольжений.

3. Основная задача. Она заключается в определении пластических деформаций по структурным несовершенствам при заданном законе изменения компонент напряжений.

Задание истории возникновения напряженного состояния позволяет в каждый момент определять линии скольжения. При этом, используя одну из теорий пластичности, можно найти направление максимального неупругого сдвига Γ_m. Тогда при известной плотности распределенных клиновидных дислокаций выражения (1.1) и (1.2) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно величины Γ_m. Их решение показано на примерах (п. 4, 5).

В задачах идеальной пластичности вопрос о направлении максимального пластического сдвига не возникает. В частности, при условии пластичности Треска сдвиг Γ_m совпадает с линией действия максимального касательного напряжения. Для такого условия пластичности Л. А. Галиным [1] при плоской деформации и Г. П. Черепановым [2] при плоском напряженном состоянии были найдены компоненты напряжений для неограниченной плоскости с круговым отверстием радиусом R под действием сил q_1, q_2, приложенных на бесконечности. Для этих задач методом малого параметра получены [4] приближенные значения компонент перемещений.

4. Задача Л. А. Галина. Границей между упругой и пластической областями служит эллипс, внешность которого конформно отображается на внешность единичного круга функцией (z и ζ — комплексные переменные, τ_T — предел текучести)

$$(4.1)\qquad z=b\left(\zeta+\frac{\lambda}{\zeta}\right),\qquad b=R\exp\left(\frac{q_1+q_2}{4\tau_T}-\frac{1}{2}\right),\qquad \lambda=\frac{q_2-q_1}{2\tau_T}$$

По формулам (2.1) и (2.2) находим плотность клиновидных дислокаций, которые вызывают в упругом теле вместе с внешней нагрузкой напряженное состояние данной упругопластической задачи.

Можно проверить, что распределенных по области пластичности структурных несовершенств нет, т. е.

$$(4.2)\qquad p=0$$

Плотность клиновидных дислокаций, внедренных на границе области пластичности, равна (производная по нормали вычисляется на границе области скольжений)

$$(4.3)\qquad p_L=\frac{2(1-\nu)\tau_T}{G}\frac{\partial|\zeta|}{\partial n}$$

Кроме этих несовершенств на контуре кругового отверстия образуются клиновидные дислокации, которые сводятся к кольцевой с углом расхождения

$$(4.4)\qquad \alpha=-4\pi\tau_T(1-\nu)/G$$

Учитывая, что направление максимального пластического сдвига составляет угол $\pi/4$ с полярным радиусом на основании соотношений (1.1) и (4.2), получим (r, θ — полярные координаты)

$$(4.5)\qquad \frac{\partial^2\Gamma_m}{\partial r^2}+3\frac{\partial\Gamma_m}{r\,\partial r}-\frac{\partial^2\Gamma_m}{r^2\,\partial\theta^2}=0$$

Уравнения линий скольжения ξ, η имеют вид

$$(4.6)\qquad \xi=\ln r+\theta,\quad \eta=\ln r-\theta$$

Запишем соотношение (4.5) в системе координат ξ, η

$$(4.7)\qquad 2\frac{\partial^2\Gamma_m}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial\Gamma_m}{\partial\eta}+\frac{\partial\Gamma_m}{\partial\xi}=0$$

Полученное уравнение — гиперболического типа; его решение можно представить по формуле Римана [5] следующим образом (v — функция Римана, L_{12} — дуга границы области скольжений, заключенная между двумя линиями скольжения, проходящими через точку ξ, η):

$$(4.8)\qquad \Gamma_m(\xi,\eta)=\int_{L_{12}}v(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)\,p_L(\xi_0,\eta_0)\,dL$$

Здесь использовано выражение (1.2).

Функция Римана для уравнения (4.7) имеет вид (I_0 — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента)

$$v(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)=\exp\left[-\frac{1}{2}(\eta-\eta_0+\xi-\xi_0)\right]I_0(y)$$

$$y=[(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)]^{1/2}$$

На основании формулы для плотности клиновидных дислокаций (4.3), интеграл (4.8) представим в виде

$$(4.9)\qquad \Gamma_m(r,\theta)=-\frac{2\tau_T(1-\nu)}{Gb^2(1-\lambda^2)r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r_0^3(\theta_0)I_0\left(\left[\ln^2\frac{r_0(\theta_0)}{r}-(\theta-\theta_0)^2\right]^{1/2}\right)d\theta_0$$

$$r_0(\theta)=b(1-\lambda^2)[1-2\lambda\cos 2\theta+\lambda^2]^{-1/2}$$

$$\theta_{1,2}=\theta-\ln\frac{r_0(\theta_{1,2})}{r}$$

Найденное решение будет справедливо, если в каждой точке пластическая деформация монотонно возрастает. Такой процесс возможен, пока линия скольжения имеет одну точку пересечения с эллипсом (4.1). Из этого условия следует ограничение на соотношение нагрузок

$$\frac{q_2 - q_1}{2\tau_T} \leqslant \sqrt{2} - 1$$

Для осесимметричной задачи ($q_2 = q_1$), вычисляя интеграл (4.9), получим

$$\Gamma_m(r) = \frac{2\tau_T(1-\nu)}{G}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

Компоненты перемещений легко вычислить, если известны полные деформации, которые равны сумме пластических и упругих, т. е. если найдены пластические деформации, то определение смещений сводится только к вычислению квадратур. Полученные таким образом компоненты перемещений для деформации (4.9) совпадают со смещениями, определенными в работе [6].

5. Задача Г. П. Черепанова. В отличие от плоской деформации в данном случае плотность клиновидных дислокаций, распределенных по области пластичности, не равна нулю и определяется по формуле (2.1)

$$p = \frac{\tau_T R}{(1+\nu) G r^3} \tag{5.1}$$

Аналогично предыдущей задаче находится плотность структурных несовершенств, распределенных на границе области скольжений, и угол расхождения кольцевой дислокации

$$p_L = -\frac{c\tau_T(4+3a^2)}{(1-\nu)G[4+a^2+2a(\bar{\zeta}+\zeta)]}\frac{\partial|\zeta|}{\partial n}; \qquad \alpha = -\frac{2\pi\tau_T}{(1+\nu)G} \tag{5.2}$$
$$c = \frac{q_1+q_2-4\tau_T}{2\tau_T} \qquad \left(a^3 + 4a + \frac{8(q_2-q_1)}{q_1+q_2-4\tau_T} = 0\right)$$

Параметр a — действительный корень кубического уравнения, приведенного в скобках.

На основании соотношений (1.1) и (5.1) получим дифференциальное уравнение относительно максимального неупругого сдвига

$$\frac{2}{r}\frac{\partial\Gamma_m}{\partial r} + \frac{\partial^2\Gamma_m}{\partial r^2} = \frac{2\tau_T R}{G(1+\nu)r^3}$$

Учитывая, что на границе области пластичности $\Gamma_m = 0$, запишем решение последнего уравнения в виде

$$\Gamma_m(r,\theta) = f(\theta)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{2\tau_T R}{G(1+\nu)}\left(\frac{1}{r}\ln\frac{r}{R} - \frac{1}{r_0}\ln\frac{r_0}{R}\right) \tag{5.3}$$
$$r_0 = R\frac{4+a^2+4a\cos 2t}{c(a^2-4)} \qquad \left(\operatorname{tg}\theta = \frac{4(1-a)\sin t - a^2\sin 3t}{4(1+a)\cos t + a^2\cos 3t}\right)$$

Здесь r_0 — параметрическое уравнение границы области скольжений, причем параметр t связан с полярным углом θ соотношением, приведенным в скобках.

Произвольную функцию $f(\theta)$ определим из условия, что плотность клиновидных дислокаций на границе области пластичности, выраженная по формуле (1.2) через деформацию (5.3), должна равняться найденной плотности (5.2). Тогда окончательно получим

$$\Gamma_m(r,\theta)=\frac{2\tau_T}{G(1+\nu)}\left\{\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left[\frac{c(4+3a^2)}{4-3a^2-4a\cos 2t}+\frac{R}{r_0}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{R}{r}\ln\frac{r}{r_0}\right\}$$

Рассмотренное решение будет справедливо, пока область пластичности охватывает круговое отверстие и при этом монотонно расширяется; сверх того, должно быть $0 \leqslant a \leqslant {}^2/_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 367—386.
2. *Черепанов Г. П.* Об одном методе решения упругопластической задачи.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 428—435.
3. *Леонов М. Я., Нисневич Е. Б.* Структурные представления в механике упругопластических деформаций.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 924—931.
4. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
6. *Остросаблин Н. И.* Определение смещений в задаче Л. А. Галина.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 14. Новосибирск: Изд. Ин-та гидродинам. СО АН СССР, 1973, с. 67—70.

Фрунзе

Поступила в редакцию
7.VII.1981