Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НАЛИЧИИ КЛИНА

Свекло В. А.

Интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи, полученное в новой форме, используется для исследования случая, когда в контактирующие тела вдоль их общей оси симметрии внедрены тонкие гладкие жесткие осесимметричные клинья (сваи). Устанавливаются особенности решения, в частности возможность возникновения отрицательного сближения тел и кольцевой области давления при действии на полупространство круглого в плане плоского штампа.

1. Действие на полупространство клина и пригрузки. Пусть на полупространство $z \geqslant 0$ вдоль оси z на участке L внедрен тонкий гладкий клин круглого сечения радиуса $h(z)$ и на его границе $z = 0$ действует нормальная нагрузка $p(\rho)$. Требуется определить напряженно-деформированное состояние полупространства. Предполагается, что искомые упругие перемещения его точек ограничены на бесконечности.

Комплексные потенциалы, отвечающие поставленной задаче, могут быть найдены, если использовать потенциалы для соответствующей плоской задачи [1, 2] и связь между решениями плоской и осесимметричной задачи [3]. Получим

$$\Phi'(\Omega) = 2q_0\pi^{-1}\int_L \eta h'(\eta)(\eta^2 - \Omega^2)^{-1}\,d\eta \tag{1.1}$$

$$\Psi'(\Omega) = 2q_0\pi^{-1}\left[-\int_L \eta h'(\eta)(\eta + \Omega)^{-2}\,d\eta + \int_0^\infty p^*(\eta)(\eta^2 + \Omega^2)^{-1}d\eta\right]$$

$$\Omega = z + i\xi,\quad \xi = \rho\cos\theta,\quad q_0 = 2\mu(1 + k_0)^{-1},\quad k_0 = \mu(\lambda + \mu)^{-1}$$

Здесь $p^*(\eta)$ — изображение $p(\rho)$ в смысле [3].

Решение в перемещениях записывается в форме

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}\frac{1}{\rho}\langle \alpha u_0(\rho\alpha, z)\rangle,\qquad w = \langle w_0(\rho\alpha, z)\rangle \tag{1.2}$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \operatorname{Re}\left[k^{\mp}\Phi \mp i\xi\Phi' + k^{\pm}\Psi \pm z\Psi'\right]\begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\quad \alpha = \cos\theta,\quad k^+ = k_0,\quad k^- = 1 + k_0$$

Угловые скобки означают интегрирование по θ от 0 до 2π.

Соответственно выводим [2]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \left\langle \sigma_\xi^\circ - 2\mu\alpha_\pm^2\frac{\partial u^\circ}{\partial\xi}\right\rangle\qquad \begin{pmatrix} \alpha_+ = \sin\theta \\ \alpha_- = \alpha \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$\sigma_z = \langle\sigma_z^\circ\rangle,\quad \tau_{z\rho} = \langle\alpha\tau_{z\xi}^\circ\rangle$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi^\circ \\ \sigma_z^\circ \end{Bmatrix} = \operatorname{Re}\left[\Phi' \mp i\xi\Phi'' + \Psi' \pm z\Psi''\right],\qquad \overset{\circ}{\tau}_{z\xi} = -\operatorname{Re}\left[\xi\Phi'' + iz\Psi''\right]$$

Остальные компоненты напряжения также легко находятся.

Из (1.1) — (1.4) видно, что решение рассматриваемой задачи получается наложением решений, отвечающих действиям только клина и только пригрузки.

В дальнейшем понадобятся значения Φ, Ψ, отвечающие действию на полупространство только нормальной сосредоточенной нагрузки, равномерно распределенной вдоль окружности радиуса R и имеющей равнодействующую, равную P.

Так как $h(z) = 0$, то сразу выводим: $\Phi'(\Omega) = 0$. Значения Ψ' связаны с вычислением интеграла, в котором

$$p^*(\eta) = \begin{cases} 0, & |\eta| < R \\ (2\pi)^{-1}[(\eta^2 - R^2)^{-1/2}]_\eta', & |\eta| > R \end{cases}$$

Проще, однако, найти эту функцию непосредственно, исходя из граничного условия

$$\mathrm{Re}\Psi'(t) = p^*(\xi), \quad t = i\xi$$

Его можно переписать в виде

$$\mathrm{Re}\Psi'(t) = -(2\pi)^{-2}P\,[(t^2 + R^2)^{-1/2}]_t'$$

Здесь под радикалом понимается ветвь, принимающая значение t при больших t. Считая искомую функцию $\Psi(\Omega)$ исчезающей на бесконечности, в результате аналитического продолжения выводим

$$\Psi(\Omega) = -(2\pi)^{-2}P\,(\Omega^2 + R^2)^{-1/2}$$

Подставляя найденные значения комплексных потенциалов в (1.3), а затем в (1.2), получим

$$w(\rho, 0) = \begin{cases} P(2\pi)^{-2}q_0^{-1}\langle(R^2 - \rho^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rangle, & \rho < R \\ P(2\pi)^{-2}q_0^{-1}\langle(\rho^2 - R^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rangle, & \rho > R \end{cases} \tag{1.5}$$

$$(w(\rho, 0) \sim \ln|\rho - R|, \quad \rho \to R)$$

Упругие перемещения точек границы полупространства в направлении осей x и y, отвечающие рассматриваемой нагрузке частного вида, равны нулю.

2. Интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи при $h(z) = 0$. Известно, что в постановке Герца задача сводится к отысканию осесимметричного нормального давления $p(\rho)$ в круге, кольце (или в их совокупности) при условии, что нормальные к границе упругие перемещения в указанной области заданы.

Пусть окружность радиуса ρ_1 целиком лежит в области давления. Тогда в точках этой окружности имеем сосредоточенную равномерно распределенную нагрузку с равнодействующей $2\pi p(\rho_1)\rho_1 d\rho_1$ и соответствующее нормальное к границе перемещение точек полупространства dw. Интегрируя по ρ_1 в пределах от 0 до b (в случае, когда область давления — круг радиуса b), выводим, пользуясь соотношением (1.5), интегральное уравнение рассматриваемой осесимметричной контактной задачи

$$\Big\langle \int_0^\rho p(\rho_1)(\rho^2 - \rho_1^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rho_1\,d\rho_1 + \int_\rho^b p(\rho_1)(\rho_1^2 - \rho^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rho_1\,d\rho_1 \Big\rangle = f(\rho) \tag{2.1}$$

$$f(\rho) = 2\pi q_0 w(\rho, 0)$$

Ее решение известно и определяется при условии, что $f(\rho)$ и $f'(\rho)$ непрерывны на промежутке $0 < \rho \leqslant b$, формулой [4]

$$p(\rho) = (2\pi)^{-1}\left[F(b)(b^2 - \rho^2)^{-1/2} - \int\limits_{\rho}^{b} F'(s)(s^2 - \rho^2)^{-1/2} ds\right] \tag{2.2}$$

$$F(\rho) = 2\pi^{-1}\left[f(0) + \rho\int\limits_{0}^{\rho} f'(\sigma)(\rho^2 - \sigma^2)^{-1/2} d\sigma\right]$$

Покажем, что соотношение (2.2) обращает (2.1) в тождество. Действительно, после подстановки, перемены порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов получим

$$(2\pi)^{-1}\left\langle F(b)\,\chi(\rho; b; \theta) + \int\limits_{0}^{\rho} F'(s)\,T(\rho; s; \theta)\,ds + \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + \int\limits_{\rho}^{b} F'(s)\,\chi(\rho; s; \theta)\,ds\right\rangle = f(\rho)$$

$$\chi(\rho; \eta; \theta) = (2\cos\theta)^{-1}\ln|\rho\sin\theta - (\eta^2-\rho^2)^{1/2}\|\rho\sin\theta + (\eta^2-\rho^2)^{1/2}| +$$

$$+ \pi/2 - \operatorname{arctg}[\rho(\eta^2-\rho^2)^{-1/2}\sin\theta] - T(\rho; \eta; \theta)$$

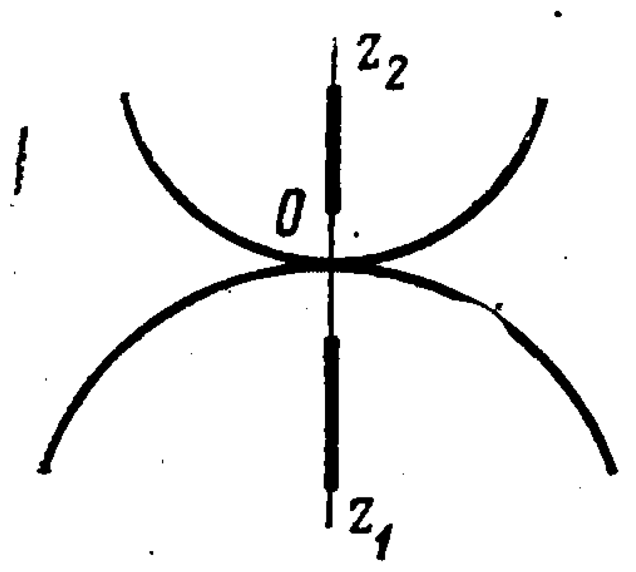
$$T(\rho; \eta; \theta) = (2\cos\theta)^{-1}\ln|\rho - \eta\cos\theta\|\rho + \eta\cos\theta|^{-1}$$

Интегрирование по частям приводит уравнение (2.3) к виду

$$\int\limits_{0}^{\rho} F(s)(\rho^2 - s^2)^{-1/2} ds = f(\rho)$$

что доказывает утверждение [4].

3. Осесимметричная контактная задача при наличии клина. Пусть два тела вращения, первоначально касающиеся в одной точке O, находятся под действием сжимающих сил P, направленных вдоль общей нормали в точке O к поверхностям, ограничивающим тела, и осесимметричных тонких гладких клиньев (разрезов), направленных вдоль той же нормали (фигура). Предполагается, что разрезы находятся строго внутри тел, а размеры площадки давления малы по сравнению с размерами тел настолько, что последние могут быть заменены полупространствами.



Направляя в точке O вдоль указанной нормали оси z_j ($j = 1, 2$) внутрь соприкасающихся тел, получим суммарные нормальные упругие перемещения граничных точек тел в результате их деформации

$$w_j = w_j^{(1)} + w_j^{(2)} \quad (j = 1, 2) \tag{3.1}$$

Здесь $w_j^{(1)}$ — упругие перемещения от сжатия тел, $w_j^{(2)}$ — перемещения за счет действия клиньев.

Рассуждая обычным образом, выводим основное соотношение [4]

$$w_1 + w_2 = \alpha - z_1^\circ(\rho) - z_2^\circ(\rho) \tag{3.2}$$

Здесь α — сближение тел, а $z_j^\circ(\rho)$ известны и определяются заданием формы тел до деформации.

После замены тел полупространствами проблема сводится к отысканию общего давления $p(\rho)$ в круге, кольце или их совокупности. При этом становятся известными перемещения $w_j^{(2)}$.

При заданных форме клиньев и их расположении на осях получим [2]

$$w_j^{(2)}(\rho, 0) = \int\limits_{L_j} h_j'(\eta)(\rho^2 + \eta^2)^{-1/2}\eta\, d\eta$$

Перемещения, определяемые давлением, записываются, например, в случае, когда область давления — круг $0 \leqslant \rho \leqslant b$, в виде (2.1). Таким образом, подставляя в (3.2), выводим интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи при наличии клиньев

$$\left\langle \int_0^\rho p(\rho_1)(\rho^2-\rho_1^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rho_1\,d\rho_1 + \right.$$

$$\left. + \int_\rho^b p(\rho_1)(\rho_1^2-\rho^2\cos^2\theta)^{-1/2}\rho_1\,d\rho_1 \right\rangle = f_1(\rho)$$

$$f_1(\rho) = 2\pi(q_{10}+q_{20})\left[\alpha - \sum_{j=1}^{2}\left\{z_j^\circ + \int_{L_j} h_j'(\eta)(\eta^2+\rho^2)^{-1/2}\eta\,d\eta\right\}\right]$$

Если $f_1(\rho)$ и $f_1'(\rho)$ непрерывны на промежутке $0 < \rho \leqslant b$, то его решение записывается в форме (2.2).

При заданном b сближение α находится из условия эквивалентности давления прижимающей силе P. В случае ограниченности решения при $\rho = b$ имеем дополнительное условие $F(b) = 0$, определяющее величину b.

4. Действие на полупространство штампа и клина. В качестве примера рассмотрим задачу о совместном действии на полупространство круглого в плане плоского штампа и круглого клина постоянного сечения радиуса h, занимающего вдоль оси z отрезок $H_1 \leqslant z \leqslant H_2$, $H_1 > 0$.

Последний можно получить из клина с коническими наконечниками путем предельного перехода.

Имеем на основании [2, 4], а также (3.3)

$$z_j^\circ = 0\ (j=1,2),\ q_{20}=0,\ q_{10}=q_0,\ w_2=0 \tag{4.1}$$
$$w_1^{(2)}(\rho,0) = H_1(\rho^2+H_1^2)^{-1/2} - H_2(\rho^2+H_2^2)^{-1/2}$$
$$f_1(\rho) = 2\pi q_0[\alpha + h\{H_2(\rho^2+H_2^2)^{-1/2} - H_1(\rho^2+H_1^2)^{-1/2}\}]$$

Так как $f_1(\rho)$, $f_1'(\rho)$ непрерывны на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant b$, то решение уравнения (3.4) при условии, что искомое давление неотрицательно на указанном промежутке, записывается в форме (2.2). Находим

$$F(\rho) = 4q_0\{\alpha + h[H_2^2(\rho^2+H_2^2)^{-1} - H_1^2(\rho^2+H_1^2)^{-1}]\} \tag{4.2}$$

В последующем под величинами $p(\rho)$, α, h, h_j, ρ_j, b_j, ρ понимаются соответственно безразмерные величины $\pi(2q_0)^{-1}p(\rho)$, α/b, h/b, h/H_j, ρ/H_j, b/H_j, ρ/b. В этих обозначениях искомое безразмерное давление, вычисляемое по формуле (2.2), записывается в виде

$$p(\rho) = [\alpha + h(a_2-a_1)](1-\rho^2)^{-1/2} + \chi_2(\rho) - \chi_1(\rho) \tag{4.3}$$
$$\chi_j(\rho) = h_j(1+\rho_j^2)^{-3/2}\{\operatorname{arctg}[(b_j^2-\rho^2)^{1/2}(1+\rho_j^2)^{-1/2}] +$$
$$+ a_j(1+\rho_j^2)^{1/2}(b_j^2-\rho_j^2)^{1/2}\},\quad a_j = (1+b_j^2)^{-1}$$

При $h = 0$ получаем известное решение [4].

Укажем достаточное условие положительности давления $p(\rho)$, определяемого формулой (4.3), на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant b$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(\rho) = [\alpha + h(a_2-a_1)](1-\rho^2)^{-1/2} - \chi_1(\rho) \tag{4.4}$$

Можно установить, что $\Phi_1'(\rho) > 0$, т. е. $\Phi_1(\rho)$ — монотонно возрастающая функция на указанном промежутке. Поэтому $\Phi_1(\rho) \geqslant 0$, если $\Phi_1(0) \geqslant 0$. При этом условии имеем

$$p(\rho) = \Phi_1(\rho) + \chi_2(\rho) \geqslant 0,\quad \chi_2(\rho) \geqslant 0$$

Итак, для неотрицательности p (ρ) на промежутке $0 \leqslant \rho < 1$ достаточно выполнения неравенства

$$(4.5) \qquad \Phi_1(0) = \alpha - h(\psi_1 + a_2 b_2) \geqslant 0$$
$$\psi(x) = x \operatorname{arctg} x, \ \psi_j = \psi(b_j) \ (j = 1, 2)$$

Из (4.5) следует, что $\alpha \geqslant 0$ для любых H_j, b, $H_1 > 0$.

Пусть P — прижимающая штамп сила. Обозначая той же] буквой безразмерную прижимающую силу $\pi P/(2q_0, b^2)$, запишем, пользуясь (4.3), соотношение, определяющее сближение тел α ($\varphi(x)$ —монотонно убывающая функция)

$$(4.6) \qquad P = \alpha + h(\varphi_2 - \varphi_1); \ \varphi(x) = x^{-1} \operatorname{arctg} x, \ \varphi_j = \varphi(b_j)$$

Подставляя значение α из (4.6) в условие (4.5), запишем его в виде ограничения, накладываемого на прижимающую штамп силу

$$(4.7) \qquad P \geqslant h(\varphi_2 - \varphi_1 + \psi_1 + a_2 b_2^2)$$

Рассмотрим случай полубесконечного клина: $H_2 = \infty$, $H_1 > 0$. Получим

$$b_2 = \chi_2 = \psi_2 = 0, \ a_2 = \varphi_2 = 1$$

Условие (4.5) становится здесь также и необходимым.

Решение (4.3) записывается в виде

$$(4.8) \qquad p(\rho) = (\alpha + h a_1 b_1^2)(1 - \rho^2)^{-1/2} - \chi_1(\rho)$$

если имеет место неравенство

$$P \geqslant h(1 - \varphi_1 + \psi_1)$$

При его нарушении (прижимающая штамп сила недостаточно велика) между штампом и деформированной границей полупространства в окрестности точки $z = 0$ образуется зазор, площадка давления приобретает форму плоского кольца с неизвестной внутренней границей и распределение давления под штампом необходимо отыскивать, исходя из этого условия. В данной работе на этом не останавливаемся.

Отметим, что решение (4.8) сохраняет смысл и в предельном случае, когда $H_1 \to 0$, при условии, что $\rho \neq 0$. Действительно, имеем в пределе

$$b_1 = \infty, \ a_1 = 0, \ a_1 b_1^2 = 1, \ \chi_1 = \varphi_1 = 0$$

Равенства (4.6), (4.8) записываются в виде

$$P = \alpha + h, \quad p(\rho) = (\alpha + h)(1 - \rho^2)^{-1/2}$$

Отсюда выводим выражение для давления

$$P(\rho) = P(1 - \rho^2)^{-1/2}, \quad \alpha = P - h$$

Видно, что во всех точках круга, за исключением его центра, оно совпадает с обычным давлением. В центре круга, т. е. при $\rho = 0$, $H_1 \to 0$, давление, как это видно из (4.8), становится неограниченным. При $P < h$ сближение тел α оказывается отрицательным.

Другой частный случай получим, устремляя решение (4.3) H_1 к нулю при условии, что $\rho \neq 0$. Здесь $\chi_1 = a_1 = 0$, и решение (4.3) принимает вид

$$p(\rho) = (\alpha + h a_2)(1 - \rho^2)^{-1/2} + \chi_2(\rho), \quad P = \alpha + h\varphi_2$$

при условии, что $\alpha + h a_2 > 0$, т. е. $\alpha = P - h\varphi_2 \geqslant 0$. Оно будет выполнено и при отрицательных α, если сила P удовлетворяет условию

$$h(\varphi_2 - a_2) < P < h\varphi_2$$

При $P \leqslant h(\varphi_2 - a_2)$ следует положить $\alpha + h a_2 = 0$, и решение запишется в виде

$$p(\rho) = \chi_2(\rho)$$

Неизвестная b_2, определяющая размеры области давления, находится из уравнения

$$P - h(\varphi_2 - a_2) = 0$$

имеющего при заданном P единственное решение.

При $\rho = 0$ и $H_1 \to 0$ решение (4.3) не стремится к конечному пределу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло В. А.* О совместном действии на упругую полуплоскость клина и штампа.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, с. 742—746.
2. *Свекло В. А., Шмойлов Л. Ф.* Осесимметричная задача о внедрении в упругое полупространство тонкой жесткой гладкой сваи конечной длины.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 703—708.
3. *Свекло В. А.* Задачи типа Буссинеска для анизотропного полупространства.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 908—913.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.

Калининград

Поступила в редакцию
12.X.1981