УДК 539.383

НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Боган Ю. А.

Изучается асимптотическое поведение решений второй краевой (на границе заданы перемещения) и двух контактных задач теории упругости в прямоугольной области для криволинейно-ортотропной среды с одним очень большим коэффициентом упругости. Стороны прямоугольника параллельны направлениям ортотропии. Показано, что при всюду отличной от нуля кривизне семейства очень жестких волокон в пределе всегда получаем среду с нерастяжимыми волокнами (модель среды с нерастяжимыми волокнами введена в ряде работ, например [1]). Наличие в обобщенном законе Гука большого параметра приводит к сингулярному возмущению краевых задач. Подобного рода сингулярно-возмущенные задачи возникают при изучении конструкций из композиционных материалов армированных высокомодульными волокнами [1, 2]. Исследован вопрос о регулярности вырождения допредельных краевых задач в предельные [3]. Равномерная в замкнутой области асимптотика решения содержит функции углового пограничного слоя.

1. Примем обобщенный закон Гука для ортотропного материала в виде

$$\sigma_{11} = c_{11}l_{11} + c_{12}l_{22}, \quad \sigma_{22} = c_{12}l_{11} + c_{22}l_{22}, \quad \sigma_{12} = 2c_{66}l_{12} \tag{1.1}$$

где l_{11}, l_{12}, l_{22} — деформации в ортогональных координатах (x_1, x_2), которые в дальнейшем предположим изотермическими для упрощения формул. Положительность потенциальной энергии деформации приводит к ограничениям: $c_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 6$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

Введем безразмерные напряжения и жесткости, положив $b_{ij} = c_{ij}c_{66}^{-1}$, $\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}c_{66}^{-1}$ и сохраним в дальнейшем для безразмерных напряжений прежние обозначения. Положим $b_{11} = \varepsilon^{-2}$ (ε мало). Пусть Q — прямоугольная область на плоскости, $Q = \{(x_1, x_2);\ 0 \leqslant x_1 \leqslant a,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant b\}$. Пусть в $\overline{Q}$ кривизна семейства волокон $x_2 \equiv \text{const}$ строго отлична от нуля. Для деформаций l_{11}, l_{12}, l_{22} имеем соотношения

$$l_{11} = \frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{m}{H}v, \quad l_{22} = \frac{1}{H}\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{k}{H}u$$

$$2l_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{v}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u}{H}\right)$$

где u, v — перемещения соответственно вдоль семейств волокон,

$$x_2 \equiv \text{const и } x_1 \equiv \text{const}, \quad k = \frac{\partial(\ln H)}{\partial x_1}, \quad m = \frac{\partial(\ln H)}{\partial x_2}$$

H — коэффициент Ламе.

Положим

$$a_1 = b_{12}k_{x_1} - m_{x_2} - bkm - m^2, \quad a_2 = k = bm, \quad a_3 = k_{x_2} + ckm, \quad a_4 = bk_{x_2} - m_{x_1} - ckm$$

$$a_5 = b_{12}m_{x_2} - k_{x_1} - k^2, \quad c = 1 + b_{12}, \quad b = b_{22}$$

Система уравнений равновесия имеет вид

$$\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial x_1}(Hl_{11}) + c\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_1 u + m\frac{\partial v}{\partial x_1} - a_2\frac{\partial v}{\partial x_2} - a_3 v = 0 \tag{1.2}$$

$$c\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k(1+b)\frac{\partial u}{\partial x_2} - m\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_4 u + b\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + a_5 v - H_{x_2}\varepsilon^{-2}l_{11} = 0$$

Пусть при $x = 0$, a перемещения u, v удовлетворяют граничным условиям

(1.3) $$(0, x_2) = f_1(x_2), \quad v(0, x_2) = f_2(x_2), \quad u(a, x_2) = f_3(x_2)$$
$$v(a, x_2) = f_4(x_2)$$

а при $x = 0$, b выполняется одна из следующих комбинаций граничных условий [4]:

(1.4) $$u(x_1, 0) = g_1(x_1), \quad v(x_1, 0) = g_2(x_1), \quad u(x_1, b) = g_3(x_1)$$
$$v(x_1, b) = g_4(x_1)$$

(1.5) $$\tau_{x_1x_2}(x_1, 0) = \tau_{x_1x_2}(x_1, b) = 0, \quad v(x_1, 0) = g_2(x_1), \quad v(x_1, b) = g_4(x_1)$$

(1.6) $$\tau_{x_1x_2}(x_1, 0) = \tau_{x_1x_2}(x_1, b) = 0, \; u(x_1, 0) = g_1(x_1), \quad u(x_1, b) = g_2(x_1)$$

Потребуем, чтобы функции f_k, g_k имели достаточно большое количество непрерывных производных и всюду в $\bar{Q}$ функция $m\ (x_1x_2)$ была отлична от нуля.

Назовем задачу решения системы уравнений (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.4) задачей A_ε, а задачу решения системы (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.5) — задачей B_ε. Асимптотика решения задачи (1.2), (1.3), (1.6) строится аналогично асимптотике задачи B_ε и здесь рассматриваться не будет. Рассмотрим вопрос о построении асимптотик решений задач A_ε и B_ε при малом ε. Малость ε означает, что область Q армирована одним семейством очень жестких волокон $x_2 \equiv \text{const}$.

2. Построим сначала асимптотику решения задачи A_ε при малом ε. Введем функцию $q = \varepsilon^{-2} l_{11}$ и подставим q в систему уравнений (1.2). Ищем приближенное решение получившейся системы уравнений в виде

(2.1) $$u(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_n(x_1, x_2), \quad v(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n v_n(x_1, x_2)$$
$$q(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n q_n(x_1, x_2)$$

При подстановке (2.1) в (1.2) получим рекуррентно связанную систему уравнений

(2.2) $$\frac{1}{H}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{m}{H} v_n = q_{n-2}, \quad q_{-2} = q_{-1} = 0, \quad n \geqslant 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(q_n H) + c\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} + a_1 u_n + m\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - a_2\frac{\partial v_n}{\partial x_2} - a_3 v_n = 0$$
$$c\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2} + k(1+b)\frac{\partial u_n}{\partial x_2} - m\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + a_4 u_n + b\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_2^2} +$$
$$+ \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_1^2} + a_5 v_n - H_{x_2} q_n = 0$$

Напомним, что кривизна семейства волокон $x_2 \equiv \text{const}$ пропорциональна H_{x_2} и по предположению отлична от нуля. Исключая из (2.2) q_n, получим для u_n уравнение

(2.3) $$b\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_n}{\partial x_2^4} + P_n(u_n) = f_n$$

в $P_n(u_n)$ входят производные порядков, меньшего четырех. Уравнение (2.3) имеет составной тип [5] с одним двойным семейством, вещественных характеристик $x_2 \equiv \text{const}$, в отличие от системы уравнений (1.2), имеющей эллиптический тип. Изменение типа системы приводит к появлению в асимптотике решения задачи A_ε функций пограничного слоя вдоль характеристической части границы.

Построим систему уравнений для определения функций пограничного слоя вблизи $x_2 = 0$. Введем растянутую координату $\eta = x_2/\varepsilon$ в систему уравнений (1.2) и разложим функции $a_k(x_1, \eta\varepsilon)$, $k(x_1, \eta\varepsilon)$, $m(x_1, \eta\varepsilon)$ в ряды Тейлора по степеням ε вблизи $\eta = 0$; положим $\rho(x_1) = m(x_1, 0)$. Ищем приближенное решение получившейся системы уравнений в виде

$$u^{(1)}(x_1, \eta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_{n,0}(x_1, \eta), \quad v^{(1)}(x_1, \eta) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n v_{n,0}(x_1, \eta)$$

В результате получим рекуррентно связанную систему уравнений для определения функций пограничного слоя

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_{n,0}}{\partial x_1} + \rho(x_1) v_{n,0}\right) + \frac{\partial^2 u_{n,0}}{\partial \eta^2} = f_{n,1} \\ (2.4)\qquad &\frac{\partial^2 v_{n,0}}{\partial \eta^2} - \rho(x_1)\left(\frac{\partial u_{n,0}}{\partial x_1} + \rho(x_1) v_{n,0}\right) = f_{n,2} \end{aligned}$$

где $f_{0,1} = f_{0,2} = 0$; дифференциальные операторы $f_{n,1}$, $f_{n,2}$ восстанавливаются из исходной системы уравнений для построения функций пограничного слоя. Функции $u_{n,0}$, $v_{n,0}$ должны быть заметно отличны от нуля только вблизи $\eta = 0$, поэтому естественно потребовать, чтобы при $\eta \to +\infty$ они обращались в нуль. В результате они оказываются связанными некоторыми соотношениями.

Рассмотрим сначала случай, когда $n = 0$. Умножим второе уравнение системы (2.4) на $\rho^{-1}(x_1)$, продифференцируем результат по x_1 и сложим с первым уравнением. Получим соотношение, из которого следует, что

$$u_{0,0}(x_1, \eta) = -b\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1) v_{0,0}(x_1, \eta)]$$

По индукции можно показать, что при $n \geqslant 1$

$$(2.5)\qquad u_{n,0}(x_1, \eta) = -b\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1) v_{n,0}(x_1, \eta)] + g_{n,0}(v_{n-1,0}, \ldots, v_{0,0})$$

где $g_{n,0}$ — некоторая однозначно определяемая функция. Подставляя (2.5) во второе уравнение системы (2.4), для определения $v_{n,0}(x_1, \eta)$ получим эллиптическое уравнение второго порядка

$$(2.6)\qquad \frac{\partial^2 v_{n,0}}{\partial \eta^2} + \rho(x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[\rho^{-1}(x_1) v_{n,0}] - \rho^{-2} b^{-1} v_{n,0} = f_{n,3}(v_{n-1,0}, \ldots, v_{0,0})$$

причем при $n = 0$ $f_{n,3} = 0$.

Подобным образом можно построить функции $u_{n,1}(x_1, \eta_1)$, $v_{n,1}(x_1, \eta_1)$ пограничного слоя вблизи $x_2 = b$, введя растянутую координату $\eta_1 = (b - x_2)/\varepsilon$. При этом функции пограничного слоя удовлетворяют соотношениям, аналогичным (2.5).

Таким образом, получаем асимптотическое разложение задачи в виде

$$\begin{aligned} (2.7)\qquad u(x_1, x_2) = &\sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_n(x_1, x_2) + \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \Big\{-b\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1) v_{n,0}(x_1, \eta)] + \\ &+ g_{n,0} - b\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1, b) v_{n,1}(x_1, \eta_1)] + g_{n,1}\Big\} \\ v(x_1, x_2) = &\sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n \Big\{-m^{-1}(x_1, x_2)\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + m^{-1} H q_{n-2} + \\ &+ v_{n,0}(x_1, \eta) + v_{n,1}(x_1, \eta_1)\Big\} \end{aligned}$$

где $v_{n,1}(x_1, \eta_1)$ — функции пограничного слоя вблизи $x_2 = b$; $\rho^{-1}(x_1, b) = m^{-1}(x_1, b)$. Асимптотические разложения (2.7) позволяют определить граничные условия для функций u_n при $x_2 = 0$, b и $v_{n,0}$, $v_{n,1}$ при $\eta = 0$ и $\eta_1 = 0$.

Отметим, например, что нельзя положить

$$u_0(x_1, 0) = g_1(x_1), \qquad -\rho^{-1}(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, 0) = g_2(x_1)$$

так как на характеристике уравнения (2.3) нельзя задавать два независимых граничных условия; это привело бы к заданию при $\eta = 0$ двух граничных условий для функций $v_{n,0}(x_1, \eta)$. Но уравнение (2.6) эллиптическое, и краевая задача определения функций пограничного слоя стала бы некорректной.

Для определения корректных граничных условий используем метод исключения. Исключая из (2.7) последовательно u_0 и $v_{0,0}$, получим, что при $x_2 = 0$ функции u_0 и $v_{0,0}$ удовлетворяют граничным условиям

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &u_0(x_1, 0) - b\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho^{-1}(x_1)\frac{\partial u_0}{\partial x_1}(x_1, 0)\right] = \\ &= g_1(x_1) + b\frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1)g_2(x_1)] \\ &v_{0,0}(x_1, 0) - b\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho^{-1}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho^{-1}(x_1)v_{0,0}(x_1, 0)\right] = \\ &= g_2(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}[\rho^{-1}(x_1)g_1(x_1)] \end{aligned}$$

Аналогичные граничные условия получим для $u_0(x_1, x_2)$, $v_{0,1}(x_1, \eta_1)$ при $x_2 = b$. Таким образом, в предельной краевой задаче A_0 ни одно из граничных условий допредельной задачи A_ε не выполняется.

Отметим, что представление асимптотики решения задачи A_ε в виде (2.7) не позволяет удовлетворить граничным условиям (1.4) при $x_1 = 0$, a, так как функции пограничного слоя ввиду эллиптичности уравнения (2.6) могут удовлетворять только одному граничному условию при $x_1 = 0$, a соответственно. Следовательно, для построения полной асимптотики решения задачи A_ε к функциям (2.7) необходимо добавить функции пограничного слоя вблизи угловых точек области.

Построим функции углового пограничного слоя вблизи точки $(0, 0)$ (вблизи остальных точек они определяются аналогично). Разложим коэффициенты системы уравнений (1.2) в степенные ряды по x_1, x_2 вблизи точки $(0, 0)$ и введем растянутые координаты $\tau = x_1/\varepsilon$, $\eta = x_2/\varepsilon$. Подставив их в систему уравнений (1.2), получим

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^{-2}\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \alpha(\tau, \eta)v + \varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right) + c\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\,\partial \eta} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \\ &+ a_1(\tau, \eta)u + m\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \tau} - a_2(\tau, \eta)\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta} - a_3(\tau, \eta)v = 0 \\ &c\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\,\partial \eta} + k(1 + b)\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \eta} - m\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \tau} + a_4(\tau, \eta)u + \\ &+ b\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + a_5(\tau, \eta)v - \varepsilon^2\left(m\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial \tau} + m^2 v\right) = 0 \end{aligned}$$

Разложив коэффициенты при производных по степеням ε, находим приближенное решение системы уравнений (2.9) в виде

$$u^{(2)}(\tau, \eta) = \varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon^n p_{n,0}(\tau, \eta), \qquad v^{(2)}(\tau, \eta) = \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n q_{n,0}(\tau, \eta)$$

Тогда для функций $p_{0,0}$ и $q_{0,0}$ получим уравнения

$$(2.10)\qquad \frac{\partial^2 p_{0,0}}{\partial\tau^2}+m(0,0)\frac{\partial q_{0,0}}{\partial\tau}=0$$

$$b\frac{\partial^2 q_{0,0}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 q_{0,0}}{\partial\tau^2}-m(0,0)\frac{\partial p_{0,0}}{\partial\tau}-m^2(0,0)q_{0,0}=0$$

и аналогичные для определения функций $p_{n,0}$, $q_{n,0}$ при $n\geqslant 1$.

Потребуем, чтобы функция $u_0(x_1, x_2)$ удовлетворяла граничным условиям (1,3), функция $v_{0,0}(x_1,\eta)$ — граничным условиям

$$(2.11)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho^{-1}(x_1)v_{0,0}(x_1,\eta))_{x_1=0,a}=0$$

Тогда для определения функций $p_{0,0}$ и $q_{0,0}$ получаем граничные условия

$$(2.12)\qquad q_{0,0}(0,\eta)=-v_{0,0}(0,\eta),\quad q_{0,0}(\tau,0)=0,\quad p_{0,0}(0,\eta)=0$$

По условиям (2.12) ограниченное при $\tau\to+\infty$ решение системы уравнений (2.10) определяется единственным образом.

Граничные условия, аналогичные (2.12), получаем для функций $q_{n,0}$, $p_{n,0}$ при $n\geqslant 1$. По граничным условиям (2.8) и (2.11) функция $v_{0,0}(x_1,\eta)$ определяется единственным образом, причем при $\eta\to+\infty$ она затухает экспоненциально.

Действительно, ее можно представить в виде

$$v_{0,0}(x_1,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_n\eta}\psi_n(x_1)$$

где λ_n и $\psi_n(x_1)$ — собственные числа и собственные функции следующей спектральной задачи:

$$(2.13)\qquad \rho\frac{d^2}{dx_1^2}[\rho^{-1}(x_1)\psi_n(x_1)]+(\lambda_n^2-\rho^2b^{-1})\psi_n(x_1)=0$$

$$d/dx_1(\rho^{-1}(x_1)\psi_n(x_1))_{x_1=0,a}=0$$

которая самосопряжена и имеет, как известно, две серии собственных значений: с $\lambda_n>0$ и $\lambda_n<0$. Требование затухания при $\eta\to+\infty$ позволяет оставить в упомянутом представлении только положительные λ_n и удовлетворить заданное граничное условие при $\eta=0$.

3. Рассмотрим кратко задачу B_ε, асимптотика решения которой строится во многом аналогично асимптотике задачи A_ε^*; отличие состоит в том, что функции пограничного слоя при $\eta=0$ следует искать в виде

$$u^1(x_1,\eta)=\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon^n u_{n,0}(x_1,\eta),\qquad v^1(x_1,\eta)=\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon^n v_{n,0}(x_1,\eta)$$

Однако в отличие от задачи A_ε в нулевом приближении функция $v_0(x_1,x_2)$ удовлетворяет граничному условию (1.5). Следовательно, задача B_ε является регулярно вырождающейся (одно из граничных условий допредельной задачи в пределе сохраняется).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липкин А. С.* Конечные деформации идеальных волокнистых композитов.— В кн.: Композиционные материалы. Т. 2. М.: Мир, 1978, с. 287—353.
2. *Боган Ю. А.* Формулировка предельной задачи для сильно анизотропной упругой полосы.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 28. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977, с. 130—135.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5, с. 3—122.
4. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. *Джураев А.* Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972. 227 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
22.I.1982