Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.3

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ДВУХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Хлуднев А. М.

Рассматривается задача о контакте двух упругих пластин без априорных предположений о форме контактного множества. Геометрия задачи приводит к естественному определению выпуклого множества допустимых перемещений. Решение доставляет минимум функционалу энергии на этом множестве и удовлетворяет вариационному неравенству. Основной результат состоит в доказательстве связности неконтактной области при соответствующем условии на внешние нагрузки. Найдено также условие отсутствия внутренних точек контактного множества. Аналогичные результаты имеют место при контакте пологой оболочки и пластины. Примеры, относящиеся к задачам о контакте пластин и оболочек, приведены в книге [1], где имеется также обширная библиография.

Рассмотрим задачу о контакте двух тонких упругих пластин с жесткостями на изгиб a_1 и a_2. Пусть они занимают область Ω и в естественном (недеформированном) состоянии находятся на расстоянии $\delta \geqslant 0$ одна от другой. Пусть также для определенности пластины на границе $\partial\Omega$ жестко защемлены.

Определим замкнутое выпуклое множество в $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ $K = \{u, v \in H_0^2(\Omega) \mid u - v \geqslant -\delta$ почти всюду в $\Omega\}$ и обозначим через $\Pi(u, v)$ функционал энергии двух пластин

$$\Pi(u,v) = \langle a_1(\Delta u)^2 + a_2(\Delta v)^2 - 2Fu - 2Gv\rangle_\Omega, \qquad \langle\cdot\rangle_\Omega = \int_\Omega (\cdot)\, dx$$

Здесь $H_0^2(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева функций, имеющих суммируемые в Ω производные до второго порядка включительно и равных нулю на $\partial\Omega$ вместе с первыми производными, u — прогиб верхней пластины, v — нижней, F, G — внешние нагрузки. Предполагаем, что граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, а F, G принадлежат пространству $L^2(\Omega)$.

Решение $(u, v) \in K$ задачи минимизации функционала Π на множестве K существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\langle a_1\Delta u(\Delta u' - \Delta u) + a_2\Delta v(\Delta v' - \Delta v) - F(u' - u) - \\ &- G(v' - v)\rangle_\Omega \geqslant 0 \quad \forall (u', v') \in K\end{aligned}$$

Это неравенство представляет собой необходимое и достаточное условие минимума. Его можно получить и непосредственно, не обращаясь к вариационной формулировке. Уравнение равновесия верхней пластины имеет вид $a_1\Delta^2 u - F = p$, где $p \geqslant 0$ — давление нижней пластины на верхнюю. Аналогично, для нижней пластины $a_2\Delta^2 v - G = -p$. Таким образом, для произвольных гладких функций u', v', удовлетворяющих неравенству $u' - v' \geqslant -\delta$ и равных нулю на $\partial\Omega$ вместе с первыми производными, справедливо соотношение

$$\begin{aligned}&\langle(a_1\Delta^2 u - F)(u' - u) + (a_2\Delta^2 v - G)(v' - v)\rangle_\Omega = \\ &= \langle p(u' - v' - u + v)\rangle_\Omega\end{aligned}$$

Правая часть этого соотношения неотрицательна. Действительно, если в точке x_0 контакт отсутствует, то $p(x_0) = 0$. Если же x_0— точка контакта, то $u(x_0) - v(x_0) = -\delta$. И так как $u'(x_0) - v'(x_0) \geqslant -\delta$, то $u'(x_0) - v'(x_0) - u(x_0) + v(x_0) \geqslant 0$.

Ниже будет доказано обратное утверждение. Если выполнено неравенство (1), то давление верхней пластины на нижнюю равно давлению нижней пластины на верхнюю (условие совпадения соответствующих мер).

Отметим, что наличие вариационной формулировки задачи позволяет также использовать методы современной оптимизации. Аналогичный подход для линейного упругого тела развит в [2]. В отличие от классической задачи Синьорини о контакте линейного упругого тела с жестким зазор между упругими телами в [2] может быть больше нуля.

При $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ пара функций $(u + \varepsilon\varphi, v)$ принадлежит K и поэтому $\Pi(u + \varepsilon\varphi, v) \geqslant \Pi(u, v)$. Отсюда получаем

$$\langle a_1 \Delta u \Delta\varphi + (^1/_2) a_1 \varepsilon (\Delta\varphi)^2 - F\varphi \rangle_\Omega \geqslant 0$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что величина $\nu \equiv a_1 \Delta^2 u - F$ — положительная обобщенная функция и, следовательно, является мерой в области Ω [3]. Это означает, что $\nu(B) < +\infty$ для произвольного компакта $B \subset \Omega$. Аналогично показывается, что $-(a_2 \Delta^2 v - G)$ — также мера. Эти меры совпадают. Действительно, $(u + \varepsilon\varphi, v + \varepsilon\varphi) \in K$, $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, и, следовательно

$$\langle a_1 \Delta u \Delta\varphi - F\varphi + a_2 \Delta v \Delta\varphi - G\varphi \rangle_\Omega \geqslant 0$$

В силу произвольности φ отсюда получаем совпадение указанных мер.

Физический смысл меры ν следующий: $\nu(B)$ — интенсивность воздействия одной пластины на другую на множестве B.

Обозначим через $C = \{x \in \Omega \mid u(x) - v(x) = -\delta\}$ контактное множество. Соответственно $N = \Omega \setminus C$ — неконтактная область.

Носитель $S(\nu)$ меры ν сосредоточен на множестве C. Это следует из того, что в N выполнены уравнения равновесия (в смысле распределений)

$$a_1 \Delta^2 u = F, \quad a_2 \Delta^2 v = G$$

Справедливо следующее утверждение: если $F/a_1 - G/a_2 > 0$, то контактное множество не имеет внутренних точек.

Действительно, в противном случае в окрестности точки контакта имеем $\Delta^2 u = \Delta^2 v$ и, значит

$$\nu/a_1 - \nu/a_2 = \Delta^2 u - F/a_1 - \Delta^2 v + G/a_2 = G/a_2 - F/a_1 < 0$$

Это противоречит тому, что ν — мера.

Доказанное утверждение означает, что при выполнении требуемого неравенства не существует круга произвольно малого радиуса, все точки которого контактные. В осесимметрическом случае отсюда будет следовать, что если вообще существуют точки контакта, то они образуют набор окружностей радиусов $r_1 < r_2 < \ldots$, причем в областях $r_i < r < r_{i+1}$ контакт отсутствует.

Оказывается, что если точка контакта изолированная, то давление одной пластины на другую в этой точке равно нулю. Именно, если $a_1 = a_2$, то пластины не могут иметь контакт в изолированной точке, принадлежащей $S(\nu)$.

Для доказательства воспользуемся леммой 4 (см. ниже), согласно которой $\Delta u - \Delta v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Поскольку $\Delta^2(u + v) = (F + G) a_1^{-1}$, то $\Delta u + \Delta v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и, следовательно, $\Delta u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пусть x_0 — изолированная точка контакта. Обозначим через B_r круг радиуса r с центром x_0. Считаем, что в $B_r{}^0 =$

$= B_r \setminus \{x_0\}$ выполнено уравнение $a_1\Delta^2 u = F$. Докажем, что это уравнение выполнено в B_r. Отсюда будет следовать, что $x_0 \equiv S$ (ν). Пусть $F_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\Delta F_0 = F, \ F_0 |_{\partial B_r} = 0$$

В области B_r^0 справедливо уравнение $\Delta(a_1\Delta u - F_0) = 0$. Из результатов, касающихся внутренней регулярности для бигармонического уравнения, следует, что функция Δu непрерывна в B_r^0. В силу теорем вложения функция F_0 непрерывна в B_r^0. Так как величина $a_1\Delta u - F_0$ ограничена в B_r^0, то из теоремы об устранимой особенности для гармонических функций получаем $\Delta(a_1\Delta u - F_0) = 0$ в B_r.

Решение контактных задач не является, вообще говоря, гладким. Это показывает, в частности, пример [4] (см. также [5—6]) в задаче о равновесии над препятствием, где установлено, что решение (с конкретным препятствием) не принадлежит пространству $W^3_{3,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В данном случае справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Имеет место включение $u, v \in H^3_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ — такие области, что $\rho(\partial\Omega_1, \partial\Omega) \geqslant q > 0$, $q = \mathrm{const}$. Выберем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $\varphi \equiv 1$ на Ω_2, $\varphi \geqslant 0$, $|\varphi| \leqslant 1$ всюду и введем обозначение

$$\Delta_{i\tau} h(x) = [h(x + \tau e_i) - 2h(x) + h(x - \tau e_i)]\,\tau^{-2}$$

(e_i — единичные орты). Пусть $0 < \lambda \leqslant (1/2)\tau^2$. Положим

$$u_\lambda = u + \lambda\varphi^2\Delta_{i\tau} u, \ v_\lambda = v + \lambda\varphi^2\Delta_{i\tau} v$$

Учитывая неравенство $1 - 2\lambda/\tau^2 \geqslant 0$, проверим, что $u_\lambda - v_\lambda \geqslant -\delta$, т. е, $(u_\lambda, v_\lambda) \in K$. Подставим теперь $(u', v') = (u_\lambda, v_\lambda)$ в (1). Получим

$$\langle a_1\Delta u\Delta(\varphi^2\Delta_{i\tau}u) + a_2\Delta v\Delta(\varphi^2\Delta_{i\tau}v)\rangle_\Omega \geqslant \langle F\varphi^2\Delta_{i\tau}u + G\varphi^2\Delta_{i\tau}v\rangle_\Omega \tag{2}$$

Введем обозначение

$$d_{i\tau}h(x) = [h(x + \tau e_i) - h(x)]\,\tau^{-1}$$

Справедлива следующая цепочка, разность между последовательными членами которой либо равна нулю, либо оценивается сверху величиной

$$c\,(\| u \|_2^2 + \| u \|_2 \| d_{i\tau}(\varphi u)\|_2)$$

с постоянной c, зависящей лишь от области Ω и функции φ:

$$\langle \Delta u\Delta(\varphi^2\Delta_{i\tau}u)\rangle_\Omega \to \langle \Delta(\varphi u)\,\Delta(\Delta_{i\tau}\varphi u)\rangle_\Omega \to \langle \Delta(\varphi u)\,\Delta_{i\tau}\Delta(\varphi u)\rangle_\Omega \to$$
$$\to -\langle \Delta(\varphi u)\,d_{-i\tau}d_{i\tau}\Delta(\varphi u)\rangle_\Omega \to -\langle d_{i\tau}(\Delta(\varphi u))\,d_{i\tau}(\Delta(\varphi u))\rangle_\Omega \to$$
$$\to -\langle \Delta(d_{i\tau}(\varphi u))\,\Delta(d_{i\tau}(\varphi u))\rangle_\Omega$$

Аналогичные преобразования справедливы для второго слагаемого левой части неравенства (2). Правая часть оценивается по неравенству Коши. Так как $\| w \|_2 \leqslant c\,\| \Delta w \|_0$ для произвольной функции $w \in H_0^2(\Omega)$ с постоянной, не зависящей от w, то в результате получим

$$\| d_{i\tau}(\varphi u)\|_2^2 + \| d_{i\tau}(\varphi v)\|_2^2 \leqslant c\,\{\| F \|_0^2 + \| G \|_0^2 + \| u \|_2^2 +$$
$$+ \| v \|_2^2 + \| u \|_2 \| d_{i\tau}(\varphi u)\|_2 + \| v \|_2 \| d_{i\tau}(\varphi v)\|_2\}$$

Постоянная c здесь от τ не зависит. Из этого неравенства следует ограниченность его левой части и, значит, $\varphi u, \varphi v \in H^3(\Omega)$, т. е. $u, v \in H^3_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Функция Δu (соответственно Δv) полунепрерывна сверху (снизу) в области Ω.

Доказательство. Пусть $\psi \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ — решение задачи

$$a_1\Delta^2\psi = F; \ \psi = \partial\psi/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

Если u_ε, ψ_ε — усреднения с бесконечно дифференцируемым ядром [7] функций u, ψ (продолженных вне Ω с сохранением гладкости) и $f = u - \psi$, то в силу формулы

Грина имеем

$$\Delta f_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\partial B_r(x)}\Delta f_\varepsilon(y)\,dy-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_r(x)}\Delta^2 f_\varepsilon(y)\ln r\,|x-y|^{-1}\,dy \tag{3}$$

Здесь $B_r(x)$ — круг радиуса r с центром в точке x, $\partial B_r(x)$ — граница $B_r(x)$. Так как $\Delta^2 u - \Delta^2\psi \geqslant 0$ в смысле распределений, то $\Delta^2 f_\varepsilon = \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta^2\psi_\varepsilon \geqslant 0$. В силу того что $\ln r\,|x-y|^{-1} \leqslant \ln r_1\,|x-y|^{-1}$ при $r_1 \geqslant r$, из (3) и аналогичного равенства при r_1 получим

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\partial B_r(x)}\Delta f_\varepsilon(y)\,dy \leqslant \frac{1}{2\pi r_1}\int\limits_{\partial B_{r_1}(x)}\Delta f_\varepsilon(y)\,dy$$

Умножим это неравенство на rr_1, а затем проинтегрируем первый раз по r от нуля до r, второй раз — по r_1 от r до r_1. В результате будем иметь

$$\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B_r(x)}\Delta f_\varepsilon(y)\,dy \leqslant \frac{1}{\pi r_1^2}\int\limits_{B_{r_1}(x)}\Delta f_\varepsilon(y)\,dy$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что это неравенство справедливо для Δf. Так как Δf — суммируемая функция, то при почти всех $x \in \Omega$

$$b_r(x) \equiv \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B_r(x)}\Delta f(y)\,dy \to \Delta f(x), \qquad r \to 0 \tag{4}$$

Однако $b_r(x)$ — непрерывная невозрастающая функция, так что можно считать, что Δf — полунепрерывная сверху функция. Аналогичные рассуждения можно провести для $q = v - \xi$, где $\xi \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ — решение задачи

$$a_2\Delta^2\xi = G;\ \ \xi = \partial\xi/\partial n = 0 \ \text{ в } \partial\Omega$$

и показать, что Δg — полунепрерывная снизу функция. Так как в силу теорем вложения $\Delta\psi$, $\Delta\xi \in C(\overline{\Omega})$, то лемма 2 доказана.

Заметим теперь, что Δf — субгармоническая в Ω функция. Действительно, пусть α — гармоническая в $B_\rho(x)$ функция, равная Δf на $\partial B_\rho(x)$. Тогда $\Delta f \leqslant \alpha$ в $B_\rho(x)$. В самом деле

$$\Delta f\,|_{\partial B_\rho(x)} \in H^{1/2}(\partial B_\rho(x))$$

поэтому функция α существует. Указанное неравенство следует из формулы Грина для b_r после перехода к пределу при $r \to 0$ и учета соотношения $\Delta b_r \geqslant 0$ в Ω. Аналогично доказывается, что Δg — супергармоническая в Ω функция.

Лемма. 3. Для $x_0 \in C$ справедливо неравенство $\Delta u(x_0) \geqslant \Delta v(x_0)$.

Доказательство. Обозначим $w = u - v$. Согласно формуле Грина, справедливо равенство

$$w(x_0) = I_1 - I_2, \qquad I_1 = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\partial B_r(x_0)} w(y)\,dy, \qquad I_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_r(x_0)}\Delta w(y)\ln r\,|x_0 - y|^{-1}\,dy$$

Так как $w(y) \geqslant -\delta$ и $w(x_0) = -\delta$, то отсюда следует, что $I_2 \geqslant 0$. Из этого неравенства заключаем, что существует последовательность точек $y_i \in B_r(x_0)$, таких, что $\Delta w(y_i) \geqslant 0$ $(y_i \to y_r)$. Очевидно, что $\Delta w = \Delta u - \Delta v$ — полунепрерывная сверху функция. Поэтому после перехода к пределу при $i \to \infty$ получим $\Delta w(y_r) \geqslant 0$. Устремляя r к нулю и снова пользуясь полунепрерывностью сверху Δw, заключаем что $\Delta u(x_0) \geqslant \Delta v(x_0)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. При $a_1 = a_2$ справедливо включение $\Delta f - \Delta g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon(x)$ — дельта-функция Дирака. Звездочкой будем обозначать свертку двух обобщенных функций. Пусть далее $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ и ν_0' — сужение меры $\nu' = \nu/a_1$ на Ω_0. Рассмотрим потенциал

$$H * \nu_0'(x) = \int_{\Omega_0} H(x-y)\,d\nu'(y), \quad H(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|^{-1}$$

В силу теоремы Фубини этот потенциал — локально суммируемая по Лебегу функция, так как ν_0' — финитная мера. Введем функцию

(5) $$\gamma(x) = \Delta f(x) - \Delta g(x) + 2H * \nu_0'(x), \quad x \in \Omega_0$$

и докажем ее гармоничность в Ω_0. Будем пользоваться равенством $\Delta H(x) = -\varepsilon(x)$, а также свойством ассоциативности свертки при двух финитных сомножителях. Имеем цепочку равенств

(6) $$\Delta\gamma = \Delta\varepsilon * \gamma = \Delta^2 f - \Delta^2 g + 2\Delta\varepsilon * (H * \nu_0') = 2\nu_0' + 2(\Delta\varepsilon * H) * \nu_0' = 2\nu_0' + 2(\varepsilon * \Delta H) * \nu_0' = 2\nu_0' - 2\varepsilon * \nu_0' = 0$$

Соотношение (5) выполнено почти всюду в Ω_0. Так как функции $-H * \nu_0'(x)$ и $\Delta f(x) - \Delta g(x)$ субгармонические в Ω, а среднее значение по шару радиуса r с центром в данной точке для субгармонической функции сходится к значению функции в данной точке при $r \to 0$, то равенство (5) выполнено для всех $x \in \Omega_0$.

Воспользуемся теперь теоремой об ограниченности потенциала [3]. Если потенциал меры ν ограничен сверху на носителе $S(\nu)$, то он ограничен сверху во всем пространстве. В каждой точке носителя x_0 по доказанному ранее выполнено неравенство $\Delta u(x_0) \geqslant \Delta v(x_0)$, поэтому для всех $x_0 \in \Omega_1 \cap S(\nu)$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ из представления (5) получим

$$2\int_{\Omega_0} H(x_0 - y)\,d\nu'(y) = \gamma(x_0) + \Delta g(x_0) - \Delta f(x_0) < +\infty$$

Следовательно, потенциал меры ν_1' (сужения ν' на Ω_1) ограничен сверху для всех x. На Ω_1 он ограничен также снизу. Таким образом, из (5) заключаем, что в области Ω_2, $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1$ функция $|\Delta f - \Delta g|$ ограничена. Лемма 4 доказана.

Теорема. Если $\delta > 0$, $a_1 = a_2$ и $F - G \leqslant 0$, то неконтактная область будет связной.

Доказательство. Так как u, v равны нулю на границе и непрерывны в $\overline{\Omega}$, то неконтактная область содержит окрестность границы $\partial\Omega$. Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда существует связная компонента N_1 неконтактной области N, точки которой нельзя соединять кривой, лежащей в N, с указанной окрестностью границы. В силу леммы 3 на границе ∂N_1 выполнено соотношение

(7) $$\Delta u(x_0) \geqslant \Delta v(x_0)$$

Кроме того, в области N_1 справедливы уравнения

(8) $$a_1\Delta^2 u = F, \quad a_2\Delta^2 v = G$$

Из (7), (8) следует неравенство

(9) $$\Delta u(x) \geqslant \Delta v(x), \quad x \in N_1$$

Замечая, что на границе ∂N_1 выполнено равенство $u(x) - v(x) = -\delta$, и пользуясь принципом максимума, заключаем, что $u - v \leqslant -\delta$ в N_1. Это соотношение противоречит определению N_1.

Докажем неравенство (9). Пусть области Ω_1, Ω_2, Ω_3 таковы, что $\overline{N}_1 \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_3$, $\overline{\Omega}_3 \subset \Omega$. В области Ω_3 существует представление, аналогичное (5). Если потенциал $H * \nu_3'(x)$ записать в виде

$$H * \nu_3'(x) = -p(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_3 \setminus \Omega_1} \ln|x-y|^{-1}\,d\nu'(y) - \frac{\nu'(\Omega_1)\ln m}{2\pi}$$

$$p(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_1} \ln m\,|x-y|^{-1}\,d\nu'(y), \quad m = \mathrm{const} > \operatorname{diam}\Omega_1$$

то указанное представление приобретает вид

(10) $$\Delta f(x) - \Delta g(x) = 2p(x) + \beta(x), \quad x \in \Omega_1$$

($\beta(x)$ — непрерывная для $x \in \Omega_1$ функция). Отсюда заключаем, что

$$p_r(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1 \setminus B_r(x)} \ln m\,|x-y|^{-1} d\nu'(y), \quad x \in \Omega_1$$

будет сходиться сверху к $p(x)$ при $r \to 0$. По теореме Егорова для произвольного $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_1$, такое, что $\nu'(\Omega_1 \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и p_r сходятся к p равномерно на Ω_ε.

Положим далее

$$p_{r,\varepsilon}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1 \setminus B_r(x)} \ln m\,|x-y|^{-1} d\nu_\varepsilon'(y),$$

$$p_\varepsilon(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1} \ln m\,|x-y|^{-1} d\nu_\varepsilon'(y)$$

где ν_ε' — сужение меры ν' на Ω_ε. С учетом равномерной сходимости p_r к p на Ω_ε получим

$$0 \leqslant p_{r,\varepsilon}(x) - p_\varepsilon(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1 \cap B_r(x)} \ln m\,|x-y|^{-1} d\nu'(y) \to 0$$

равномерно на Ω_ε при $r \to 0$. Так что функции p_ε непрерывны на Ω_ε. Заметим, что $S(\nu_\varepsilon') \subset \Omega_\varepsilon$. Следовательно, по теореме о непрерывности потенциалов [3] заключаем, что p_ε непрерывны на Ω_1.

Так как $p_\varepsilon \geqslant p$, то в силу (10) $2p_\varepsilon + \beta \geqslant \Delta f - \Delta g$ в Ω_1. В частности, это неравенство выполнено на ∂N_1. Тогда с учетом (7) получим $2p_\varepsilon + \beta + \Delta\psi - \Delta\xi \geqslant 0$ на ∂N_1. Так как $\Delta p_\varepsilon = 0$ и $\Delta\beta = 0$ в N_1, то $\Delta(2p_\varepsilon + \beta + \Delta\psi - \Delta\xi) = \Delta^2\psi - \Delta^2\xi = F/a_1 - G/a_2 \leqslant 0$ в N_1. В силу непрерывности $2p_\varepsilon + \beta + \Delta\psi - \Delta\xi$ в N_1 из принципа максимума получаем

(11) $$2p_\varepsilon + \beta + \Delta\psi - \Delta\xi \geqslant 0 \quad \text{в } N_1$$

Так как $S(\nu') \cap N_1 = \varnothing$, то для любого $x \in N_1$

$$0 \leqslant p_\varepsilon(x) - p(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega_1} \ln m\,|x-y|^{-1} d(\nu' - \nu_\varepsilon') \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

При этом из (11) следует $\Delta\psi(x) - \Delta\xi(x) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}(-2p_\varepsilon(x) - \beta(x)) = -2p(x) - \beta(x)$, $x \in N_1$. Сравнивая с (10), имеем неравенство (9).

В заключение рассмотрим случай контакта пологой оболочки и пластины. Пусть

$$\varepsilon_{11} = u_{x_1} + k_1 w, \quad \varepsilon_{22} = v_{x_2} + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = u_y + v_x$$

— деформации срединной поверхности оболочки и

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22}), \qquad N_{22} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11})$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\sigma)}\varepsilon_{12}$$

— усилия. Здесь u, v, w — перемещения оболочки в плоскости x_1, x_2 и прогиб соответственно, h — толщина, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, k_1, k_2 — кривизны в направлениях осей x_1, x_2. Обозначим через W прогиб пластины, считая для определенности, что в недеформированном состоянии оболочка находится выше недеформированной пластины. Пусть также на границе выполнены условия закрепления

$$u = v = w = \partial w/\partial n = W = \partial W/\partial n = 0$$

Если $z = \Phi(x_1, x_2) \geqslant 0$ — форма срединной поверхности оболочки (Φ — гладкая функция), то решение u, v, w, W задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(12)\qquad \begin{gathered}(w, W) \in K : \langle a_1 \Delta w (\Delta w' - \Delta w) + (k_1 N_{11} + k_2 N_{22} - \\ - F)(w' - w) + a_2 \Delta W (\Delta W' - \Delta W) - G (W' - W)\rangle_\Omega \geqslant 0 \\ \forall (w', W') \in K \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = - f_1, \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = - f_2\end{gathered}$$

$K = \{(w', W') \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \mid w' - W' \geqslant -\Phi$ почти всюду в $\Omega\}$

Здесь f_1, f_2, F — заданные внешние нагрузки на оболочку вдоль осей x_1, x_2, z соответственно, G — нагрузка на пластину вдоль оси z, a_1, a_2 — цилиндрические жесткости оболочки и пластины.

Для задачи (12) справедливы утверждения, аналогичные приведенным в случае контакта двух пластин. Именно, если $F_0/a_1 - G/a_2 > 0$, то контактное множество не имеет внутренних точек, $F_0 = F - k_1 N_{11} - k_2 N_{22}$. Если $\Phi > 0$ на границе области $\partial\Omega$, $a_1 = a_2$ и $F_0 - G \leqslant 0$, то неконтактная область будет связной.

Доказательство этих утверждений проводится так же, как и выше с использованием естественно определяемой в данном случае меры в области Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 466—474.
3. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
4. *Caffarelli L. A., Friedman A.* The obstacle problem for the biharmonic operator.— Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. IV, 1979, v. 6, № 1, p. 151—184.
5. *Frehse J.* On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality.— Manuscr. Math., 1973, v. 9, № 1, p. 91—103.
6. *Cimatti G.* The constained elastic beam.— Meccanica, 1973, v. 8, № 2, p. 119—124.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
12.III.1981