

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД¹

Победря Б. Е.

Дается постановка квазистатической задачи линейной теории вязкоупругости для структурно-неоднородных сред в перемещениях и напряжениях. Описывается метод решения такой задачи для сред с периодической структурой. Для композитов, в которых армировка и связующее обладают вязкоупругими свойствами, вводятся «канонические» вязкоупругие операторы и описываются эксперименты для определения ядер, соответствующих этим операторам. Описывается метод решения задач для таких композитов, позволяющий находить микроперемещения и микронапряжения.

1. Рассмотрим линейную неоднородную вязкоупругую среду, для которой связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} имеет вид [1]

$$(1.1) \quad \sigma_{ij} = \int_0^t C_{ijkl}(x, t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \equiv C_{ijkl}^{\hat{}}(x) \varepsilon_{kl}$$

Тензор четвертого ранга $C_{ijkl}(x, t, \tau)$ называется тензором ядер релаксации и для деформируемого твердого тела представлен в виде

$$(1.2) \quad C_{ijkl}(x, t, \tau) = C_{ijkl}^{\circ}(x) \delta(t - \tau) + C_{ijkl}^1(x, t, \tau)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, а $C_{ijkl}^1(x, t, \tau)$ — регулярная составляющая тензора ядер релаксации [2]. При выполнении условий (1.2) определяющие соотношения (1.1) разрешаются относительно деформаций

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ij} = \int_0^t J_{ijkl}(x, t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \equiv J_{ijkl}^{\hat{}}(x) \sigma_{kl}$$

где из тензора ядер ползучести $J_{ijkl}(x, t, \tau)$ также может быть выделена аддитивная составляющая в виде дельта-функции

$$(1.4) \quad J_{ijkl}(x, t, \tau) = J_{ijkl}^{\circ}(x) \delta(t - \tau) + J_{ijkl}^1(x, t, \tau)$$

При этом между регулярными составляющими тензоров ядер релаксации и ползучести существуют зависимости

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t J_{ijkl}^1(x, t, \tau) C_{klmn}^1(x, \xi, \tau) d\xi + \\ & + J_{ijkl}^{\circ}(x) C_{klmn}^1(x, t, \tau) = J_{ijkl}^1(x, t, \tau) C_{klmn}^{\circ}(x) \\ & \int_{\tau}^t C_{ijkl}^1(x, t, \tau) J_{klmn}^1(x, \xi, \tau) d\xi + \\ & + C_{ijkl}^{\circ}(x) J_{klmn}^1(x, t, \tau) = C_{ijkl}^1(x, t, \tau) J_{klmn}^{\circ}(x) \end{aligned}$$

Число независимых компонент тензоров ядер релаксации и ползучести зависит от вида анизотропии рассматриваемого материала [1]. Явная зависимость этих ядер от координат x для неоднородных вязкоупругих мате-

¹ Доклад на 5 Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 29 мая 1981 г.

риалов может быть обусловлена структурой материала, зависимостью его свойств от неоднородного температурного поля, а также свойством неоднородного старения².

Если материал не стареющий, ядра релаксации и ползучести будут разностного типа и уравнения (1.1) и (1.3) можно записать в виде [2]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \int_0^t R_{ijkl}(x, t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) \equiv R_{ijkl}^{\check{}}(x) \varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= \int_0^t \Pi_{ijkl}(x, t - \tau) d\sigma_{kl}(\tau) \equiv \Pi_{ijkl}^{\check{}}(x) \sigma_{kl} \\ C_{ijkl}^1(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} R_{ijkl}(x, t), \quad R_{ijkl}(x, 0) = C_{ijkl}^0(x) \\ J_{ijkl}^1(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Pi_{ijkl}(x, t), \quad \Pi_{ijkl}(x, 0) = \Pi_{ijkl}^0(x) \end{aligned}$$

Если материал изотропный, то тензор ядер релаксации может быть представлен в виде [3]

$$C_{ijkl}(x, t, \tau) = [\Gamma_1(x, t, \tau) - 1/3 \Gamma(x, t, \tau)] \delta_{ij} \delta_{kl} + \Gamma(x, t, \tau) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

где $\Gamma(x, t, \tau)$ — ядро сдвиговой релаксации, $\Gamma_1(x, t, \tau)$ — ядро объемной релаксации. Аналогично могут быть представлены тензоры $J_{ijkl}(x, t, \tau)$, $R_{ijkl}(x, t)$, $\Pi_{ijkl}(x, t)$.

Если тензоры ядер релаксации и ползучести — кусочно-разрывные функции координат x , то материал называется линейным вязкоупругим композитом. Простым вязкоупругим композитом называется двухкомпонентный композит, у которого один из компонентов (армировка) — изотропный упругий материал, а другой компонент (связующее) — изотропный вязкоупругий с нерелаксирующим объемом [1].

Для нестареющего связующего связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 3K_c \omega^{\check{}} e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{3K_c} \pi^{\check{}} s_{ij}, \quad \sigma = K_c \theta \\ e_{ij} &\equiv \varepsilon_{ij} - 1/3 \theta \delta_{ij}, \quad s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \theta \equiv \varepsilon_{kk}, \quad \sigma \equiv 1/3 \sigma_{kk} \end{aligned}$$

Здесь K_c — модуль сжатия связующего, а $\omega^{\check{}}$, $\pi^{\check{}}$ — два взаимобратных интегральных оператора (1.5), характеризующиеся ядрами $\omega(t)$ и $\pi(t)$ соответственно. Следовательно, механические свойства нестареющего простого вязкоупругого композита описываются ядром релаксации $\omega(t)$ и упругими постоянными K_c , E_a — модулем Юнга армировки и ν_a — коэффициентом Пуассона армировки. Если $\omega(t) = \omega = \text{const}$, то композит упругий.

2. Рассмотрим квазистатическую задачу для неоднородной вязкоупругой среды (задачу А), заключающуюся в решении трех уравнений относительно вектора перемещений u (предполагаем, что массовые силы отсутствуют) при удовлетворении граничным условиям, например смешанного типа, когда на части Σ_1 границы тела, ограничивающей объем V_0 , заданы перемещения u^0 , а на другой части Σ_2 — нагрузки S^0

$$(2.1) \quad [C_{ijkl}^{\hat{}}(x) u_{k,l}],_j = 0$$

$$(2.2) \quad u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0; \quad C_{ijkl}^{\hat{}}(x) u_{k,l} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0$$

² Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородно-старееющих тел. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 170. 76 с.

Если в ядрах релаксации (1.2) отсутствует регулярная часть, то рассматриваемая среда будет упругой. Назовем задачу (2.1), (2.2) для упругой среды задачей A_y . Пусть найдено решение задачи A_y при условии, что на всей границе Σ заданы перемещения, т. е. в (2.2) $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Sigma_2 = 0$, причем u_i° — линейные функции координат. Обозначив деформации полученного решения через $\varepsilon_{ij}^\circ(x)$, а напряжения через $\sigma_{ij}^\circ(x)$ и усредняя их по объему, получим $\langle \varepsilon_{ij}^\circ \rangle$, $\langle \sigma_{ij}^\circ \rangle$, где, например

$$(2.3) \quad \langle \varepsilon_{ij}^\circ \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^\circ(x) dV, \quad \langle \sigma_{ij}^\circ \rangle = h_{ijkl}^\circ \langle \varepsilon_{kl}^\circ \rangle$$

Величины h_{ijkl}° образуют тензор эффективных модулей упругости. Решая задачу A с указанными выше граничными условиями, получим аналогично определение тензора эффективных ядер релаксации $h_{ijkl}(t, \tau)$.

Если на границе заданы только нагрузки

$$(2.4) \quad \sigma_{ij} n_j |_{\Sigma} = S_i^\circ$$

то иногда задачу удобно формулировать в напряжениях. Для этого рассмотрим тензор третьего ранга, симметричный по первым двум индексам

$$(2.5) \quad E_{ijk} \equiv \varepsilon_{ij,k} + \delta_{ki} (\frac{1}{2}\theta_{,j} - \varepsilon_{jl,l}) + \delta_{kj} (\frac{1}{2}\theta_{,i} - \varepsilon_{il,l}) + \\ + \xi_{ij} (\varepsilon_{kl,l} - \theta_{,k}) + M_i(q) \delta_{jk} + M_j(q) \delta_{ik} - \xi_{ij} M_k(q)$$

где $M(q)$ — некоторый произвольный линейный вектор — оператор от вектора q , обращающегося в нуль на границе

$$(2.6) \quad q_i |_{\Sigma} = 0; \quad q_i \equiv \sigma_{ik,k}$$

Квазистатическая задача для неоднородной вязкоупругой среды (задача Б) заключается в решении шести уравнений

$$(2.7) \quad E_{ijk,k}(\sigma) = 0$$

относительно шести независимых компонент тензора σ_{ij} (в которых тензор E_{ijk} (2.5) выражен через напряжения по формуле (1.3)) при удовлетворении шести граничным условиям (2.4) и (2.6) [1]. Если в ядрах ползучести (1.4) отсутствует регулярная часть, то рассматриваемая среда будет упругой. Назовем задачу (2.7), (2.4), (2.6) для упругой среды задачей B_y . Если ее решение при постоянных нагрузках S° (2.4) усреднить по объему согласно первой формуле (2.3), то можно записать

$$\langle \varepsilon_{ij}^\circ \rangle = H_{ijkl}^\circ \langle \sigma_{kl}^\circ \rangle$$

где величины H_{ijkl}° образуют так называемый тензор эффективных податливостей. Очевидным образом можно дать определение тензора эффективных ядер ползучести $H_{ijkl}(t, \tau)$.

Можно доказать, что тензоры h_{ijkl}° и H_{ijkl}° (а значит, и $h_{ijkl}(t, \tau)$) и $H_{ijkl}(t, \tau)$ взаимнообратны. Для некоторых сред выражения для этих тензоров найдены [4—7].

3. Теория, основанная на замене в задаче A_y (или A) тензора модулей упругости $C_{ijkl}^\circ(x)$ (тензора ядер релаксации $C_{ijkl}(x, t, \tau)$) эффективными величинами h_{ijkl}° ($h_{ijkl}(t, \tau)$), называется теорией эффективного модуля. Для такой теории задача (2.1), (2.2) для неоднородной вязкоупругой среды (изотропной или анизотропной) заменяется задачей для однородной анизотропной вязкоупругой среды

$$(3.1) \quad h_{ijkl} \hat{v}_{k,lj} = 0$$

$$(3.2) \quad v_i |_{\Sigma_1} = u_i^\circ, \quad h_{ijkl} \hat{v}_{k,l} n_j |_{\Sigma_2} = S_i^\circ$$

где v — некоторое среднее поле перемещений [4,5,8,9].

Во многих случаях, например при оценке прочности композиционного материала, бывает важно знать не только средние, размазанные поля перемещений и напряжений, но также и напряжения внутри каждого компонента, составляющего композит (так называемые микронапряжения).

Для определения микродеформаций и микронапряжений в композитах с периодической структурой хорошо себя зарекомендовал метод ([1], стр. 269), основанный на идее осреднения дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [10]. При помощи такого метода некоторые краевые задачи теории упругости решаются точно [11]. Интересно отметить, что уже первое приближение, т. е. приближение, основанное на теории эффективного модуля с небольшими поправками, во многих случаях достаточно полно описывает характер деформирования неоднородной среды.

Для этого случая решение задачи А, т. е. задачи (2.1), (2.2), ищется приближенно в виде

$$(3.3) \quad u_i(x, \xi) = v_i(x) + \alpha N_{ijk}(\xi) v_{j,k}(x), \quad \xi \equiv x/\alpha$$

где α — малый параметр, равный отношению периода структуры и характерному размеру всего неоднородного тела. Величины $N_{ijk}(\xi, t, \tau)$ (локальные ядра релаксации) — периодические функции быстрых координат ξ — определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$(3.4) \quad \nabla_j [C_{ijkl}(\xi) \nabla_l N_{mnk}] = - \nabla_j C_{ijmn}(\xi, t, \tau)$$

где ∇_j — символ производной по координатам ξ . Для однозначного определения функций $N_{ijk}(\xi, t, \tau)$ требуется положить

$$(3.5) \quad \langle N_{ijk}(\xi, t, \tau) \rangle = 0$$

Тензор эффективных ядер релаксации находится по формулам [1]

$$(3.6) \quad h_{ijmn}(t, \tau) = \langle C_{ijkl}(\xi) \nabla_l N_{mnk} + C_{ijmn}(\xi, t, \tau) \rangle$$

Отметим, что в теории эффективного модуля (3.1), (3.2) также необходимо найти тензор эффективных ядер релаксации. В рассматриваемом случае дается метод нахождения этих ядер (формула (3.6)), причем предварительно определяются локальные ядра релаксации (формулы (3.4), (3.5)) и в выражении (3.3) к первому слагаемому, являющемуся решением по теории эффективного модуля, добавляется второе слагаемое, учитывающее микронапряжения. Отметим также, что граничные условия в рассматриваемом приближении удовлетворяются приближенно (соотношения (3.2)) так же как и в теории эффективного модуля. Для случая прямой границы существуют приемы, обеспечивающие точное удовлетворение граничных условий [11, 12]. Эффективные ядра релаксации и ползучести, а также локальные ядра релаксации для слоистого композита выписаны в явном виде в [1]. Для композитов более сложной структуры эти величины могут быть определены только приближенно, причем удобно пользоваться эмпирическими аналитическими выражениями ³.

4. Для решения задачи (3.1), (3.2) теории вязкоупругости для анизотропной среды нет универсальных эффективных методов решения. Если композит простой, то величины $h_{ijkl}(t, \tau)$ зависят только от одного оператора $\hat{\omega}$, и поэтому успешно применяется метод численной реализации упругого решения [1] — обобщение метода аппроксимаций

³ Дорогинин В. В. К решению пространственных статических задач упругих композитов: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1980. 112 с.; Гаджиев М. Г. Эффективный тензор модулей упругости композиционного материала. М.: 1979.— Деп. в ВИНТИ, 20.03, № 968—79; см. также [13].

А. А. Ильюшина [2]. Однако в последнее время широкое распространение в технике получили композиты, у которых вязкоупругими свойствами обладает не только связующее, но и армировка. Для таких материалов уже неприменим упомянутый выше метод, ибо рациональная функция двух аргументов (вязкоупругих операторов) не может быть разложена на простейшие дроби. Ниже опишем прием, который может быть использован при решении задачи (3.1), (3.2) для двухкомпонентных композитов. Пусть K_1 и K_2 — модули сжатия первого и второго компонента, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — ядра сдвиговой релаксации первого и второго компонента, а $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ — соответствующие им ядра ползучести.

Обозначим

$$(4.1) \quad g_\beta \checkmark \equiv \frac{1}{1 + \beta \omega_1 \checkmark}, \quad \psi_\beta \checkmark \equiv \frac{1}{1 + \beta \omega_2 \checkmark}$$

и введем в рассмотрение некоторые «канонические» операторы

$$(4.2) \quad \begin{aligned} B \checkmark(\beta, a) &\equiv g_\beta \checkmark + a \psi_\beta \checkmark \\ B_\pi \checkmark(a) &\equiv \pi_1 \checkmark + a \pi_2 \checkmark = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta B \checkmark(\beta, a) \\ A_\omega \checkmark(a) &\equiv \omega_1 \checkmark + a \omega_2 \checkmark \end{aligned}$$

где a и β — некоторые числа. Рассмотрим также операторы $A \checkmark(\beta, a)$, $A_\pi \checkmark(a)$, $B_\omega \checkmark(a)$, обратные к соответствующим операторам (4.2).

Тогда для слоистых композитов можно выписать выражение операторов релаксации через канонические

$$\begin{aligned} h_{1111} \checkmark &= h_{2222} \checkmark = \frac{9}{4} A \checkmark(2, \alpha/\kappa) [B \checkmark(2, a) - \frac{1}{3} \gamma^{-1}]^2 - \\ &- \frac{9}{4} B \checkmark(2, \alpha\kappa) + \frac{3}{2} A_\omega \checkmark(\alpha\kappa) + \frac{9}{4} (1 + \alpha\kappa) \\ h_{3333} \checkmark &= \gamma^{-2} B \checkmark(2, \alpha/\kappa), \quad h_{1122} \checkmark = h_{1111} \checkmark - 3 A_\omega \checkmark(\alpha\kappa) \\ h_{1133} \checkmark &= h_{2233} \checkmark = \frac{3}{2} \gamma^{-1} A \checkmark(2, \alpha/\omega) [B \checkmark(2, a) - \frac{1}{3} \gamma^{-1}] \\ h_{1212} \checkmark &= \frac{3}{2} A_\omega \checkmark(\alpha\kappa), \quad h_{1313} \checkmark = h_{2323} \checkmark = \frac{3}{2} \gamma^{-2} A_\pi \checkmark(\alpha/\kappa) \\ \kappa &\equiv K_2/K_1, \quad \alpha \equiv (1 - \gamma)/\gamma \end{aligned}$$

Остальные компоненты тензора операторов релаксации (отнесенных к $K_1\gamma$) равны нулю. Здесь γ — толщина слоя первого компонента, отнесенная к толщине всего слоя (ячейки периодичности).

Аналогично можно выписать выражения для операторов ползучести.

Эксперименты, из которых можно определить ядра $g_\beta(t)$, $\psi_\beta(t)$, соответствующие операторам (4.1), описаны в [2].

Опишем теперь эксперименты, позволяющие определить ядра, соответствующие операторам $A \checkmark(\beta, a)$ и $A_\pi \checkmark(a)$.

Пусть пружина, изображенная на фиг. 1, имеет жесткость k . К этой пружине последовательно присоединены образцы первого и второго компонентов композита, имеющие отношение длины к площади сечения соответственно f_1 и f_2 .

Пусть соблюдено условие

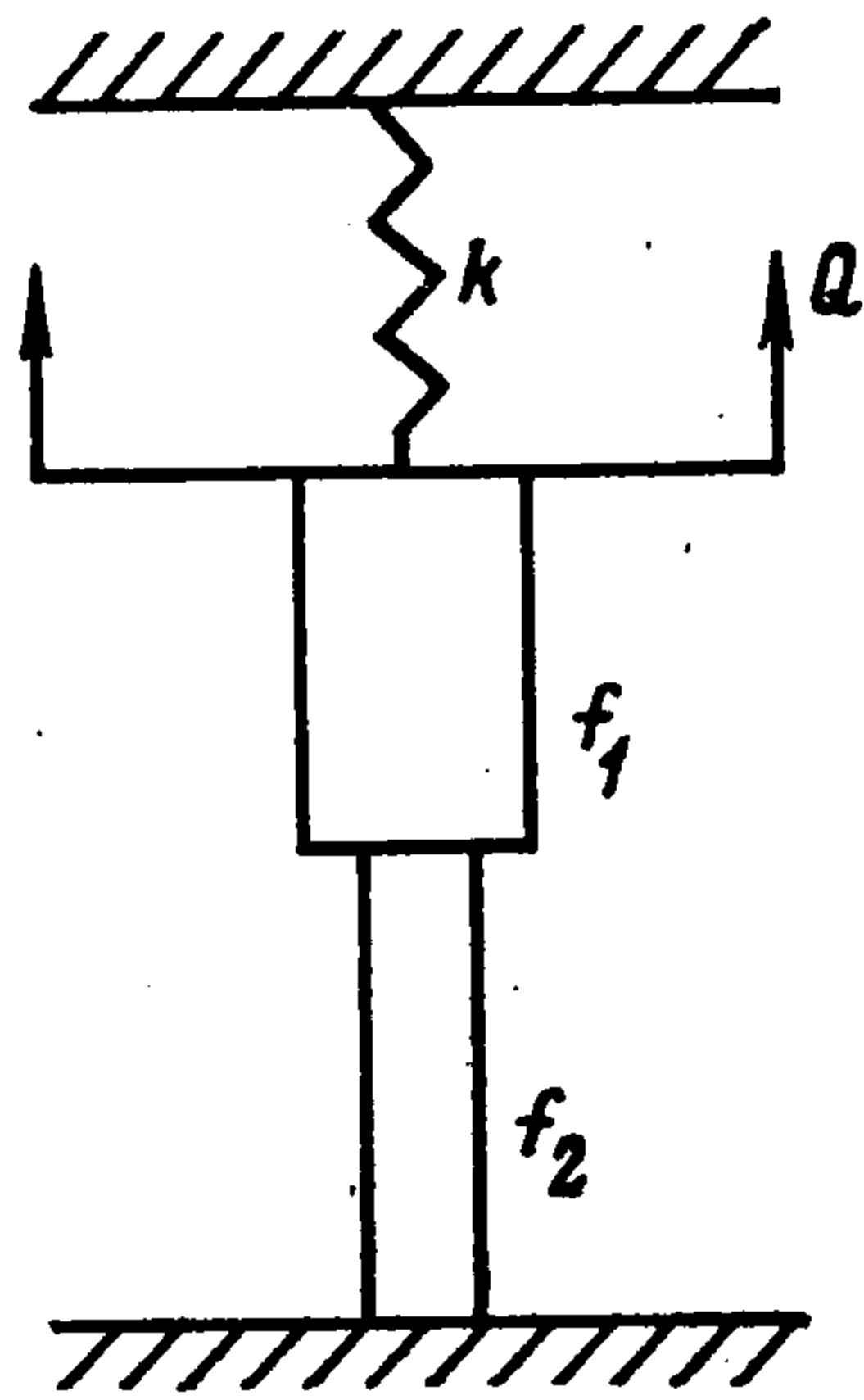
$$\frac{1}{k} = \frac{f_1}{9K_1} + \frac{f_2}{9K_2}$$

Тогда связь между силой Q , растягивающей образцы, и перемещением u будет иметь вид

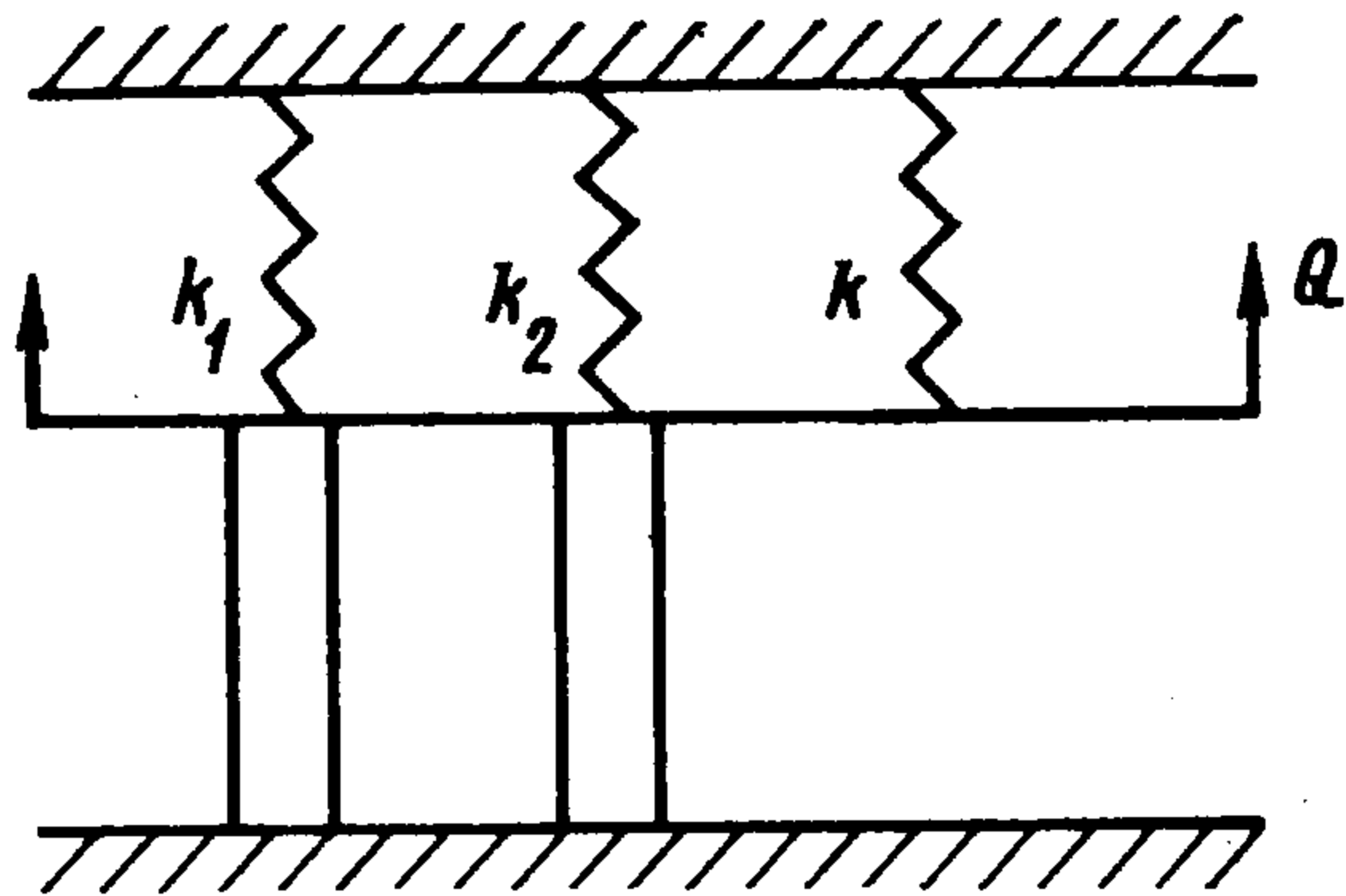
$$Q = \frac{1}{b_1 \pi_1 \checkmark + b_2 \pi_2 \checkmark} u \left(b_\alpha = \frac{2f_\alpha}{9K_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \right)$$

откуда немедленно определяется оператор $A_\pi \checkmark(a)$.

Если рассмотреть более сложную систему, состоящую из параллельного соединения пружины жесткости k и системы образцов из обоих компонентов, соединенных последовательно с пружинами жесткости k_1 и k_2 (фиг. 2), то при выполнении усло-



Фиг. 1



Фиг. 2

вий

$$k = 1/c_1 + 1/c_2$$

$$c_\alpha \equiv 1/k_\alpha + f_\alpha/(9K_\alpha), \quad \alpha = 1, 2; \quad c_1/b_1 = c_2/b_2 \equiv \beta$$

где величины b_α определены выше, связь между перемещением u и силой Q будет иметь вид

$$u = \frac{c_1}{g_\beta + \frac{c_1}{c_2} \psi_\beta} Q$$

откуда находится ядро, соответствующее оператору $A^\sim(\beta, a)$.

Для приближенного решения задачи (3.1), (3.2) поступаем следующим образом. Если удастся решить соответствующую упругую задачу для анизотропной среды аналитически, то в решении получим выражение типа $\varphi(\cdot)S$, где S — известная величина, а $\varphi(\cdot)$ означает функцию от упругих модулей анизотропии. Подставляя вместо этих модулей их выражения через величины $K_1, K_2, \omega_1, \omega_2, \gamma$, аппроксимируем $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ некоторым аналитическим выражением от канонических операторов. Коэффициенты этой аналитической аппроксимации находятся, например, методом наименьших квадратов [1].

Если аналитическое решение соответствующей упругой задачи неизвестно, а его можно найти численно или экспериментально, можно воспользоваться методом численных реализаций упругого решения [1]. Для этого предполагаем, что одна из компонент вектора перемещений (обозначим ее через v) имеет вид

$$(4.3) \quad v = A_1 + A_2\omega_1 + A_3\pi_1 + A_4\omega_2 + A_5\pi_2 + A_6g_\beta +$$

$$+ A_7\psi_\beta + \frac{A_8}{g_2 + a\psi_2} + \frac{A_9}{\pi_1 + b\pi_2}$$

и решаем численно задачу теории упругости при различных коэффициентах Пуассона материала армировки и связующего. Затем в каждой точке сетки решаем алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных, входящих в (4.3): $A_1, \dots, A_9, \beta, a, b$. После этого решение задачи (3.1), (3.2) выписывается в квадратурах по времени [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
2. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 224 с.
4. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. 564 с.

5. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. *Хорошун Л. П.* Зависимость между напряжениями и деформациями в слоистых средах.— Прикл. механика, 1966, т. 2, № 2, с. 14—19.
7. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11, с. 967—980.
8. *Ван Во Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1971. 232 с.
9. *Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф.* Строительная механика. М.: Стройиздат, 1972. 191 с.
10. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516—519.
11. *Горбачев В. И., Победря Б. Е.* Об упругом равновесии неоднородных полос.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5, с. 111—118.
12. *Панасенко Г. П.* Асимптотики высших порядков решений задач о контакте периодических структур.— Матем. сб., 1979, т. 110, № 4, с. 505—538.
13. *Шешенин С. В.* Осредненные модули одного композита.— Вестн. Моск. ун-та. Матем. механ., сер. 1, 1980, № 6, с. 79—83.

Москва

Поступила в редакцию
15.IX.1981