Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.379

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

Арутюнян Н. Х., Назаров С. А.

Исследование кручения призматических стержней с тонким усиливающим покрытием сводится к решению третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в области поперечного сечения стержня [1]. Однако решение, полученное аналитическими или численными методами, не всегда позволяет определить особенности напряжений вблизи угловых точек профиля. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения решения третьей краевой задачи для оператора Лапласа в области с угловой точкой контура и на основе этого непосредственному определению асимптотики напряжений и величин коэффициентов интенсивности в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием.

1. Асимптотические свойства решений третьей краевой задачи для оператора Лапласа вблизи угловой точки контура. *1°. Постановка задачи.* Пусть Ω — подобласть R^2 с компактным замыканием $\overline{\Omega}$ и границей $\partial\Omega$, гладкой всюду, кроме начала координат O. Предположим, что в единичной окрестности точки O область Ω совпадает с углом $K_\alpha = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : r \in (0, +\infty), \theta \in (0, \alpha)\}$, где (r, θ) — полярные координаты, $(0, 2\pi] \ni \alpha$ — раствор угла. В Ω рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus 0 \tag{1.1}$$

где n — внешняя нормаль, β — положительная функция из $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus O)$, допускающая представление

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{m} r^{1+\nu_k}\beta_k(\theta) + O(r^{1+\nu_{m+1}}), \quad r \to 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\{\nu_k\}$ — строго возрастающая последовательность действительных чисел; $\beta_k \in C^\infty([0, \alpha])$; m — произвольное натуральное число. Предположим еще, что формулу (1.2) можно почленно дифференцировать.

В случае $\nu_0 \leqslant 0$ условия нормальной разрешимости задачи (1.1) и асимптотика ее решений вытекают из общих результатов [2—5] об эллиптических краевых задачах в областях с коническими точками. Однако если $\nu_0 > 0$ и, следовательно, $\beta(x) = o(r)$, то главными (при $r \to 0$) частями дифференциальных операторов, входящих в уравнения (1.1), служат Δ и $1|_{\partial K_\alpha}$. Таким образом, в «предельной» ($r = 0$) задаче исчезает главная (по дифференциальным свойствам) часть граничных условий. Далее в этом пункте устанавливаются условия нормальной разрешимости краевой задачи (1.1) при вырождении краевых условий в угловой точке и асимптотические разложения ее решений. Отметим, что случай понижения порядка предельного уравнения в K_α для общих эллиптических краевых задач в конусах изучен в [6, 7].

2°. *Функциональные пространства.* Как и в [2, 4], обозначим через $V_\sigma^s(\Omega)$ и $V_\sigma^{s+1/2}(\partial\Omega)$ пространства функций с нормами

$$\| v; V_\sigma^s(\Omega)\| = \sum_{j=0}^{s} \| r^{\sigma+j-s} v; W_2^j(\Omega)\|, \quad \| w; V_\sigma^{s+1/2}(\partial\Omega)\| =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \| r^{\sigma+j-s-1/2} w; W_2^j(\partial\Omega)\| + \| r^\sigma w; W_2^{s+1/2}(\partial\Omega)\|, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть еще $V_{\sigma,\delta}^{s+1}(\Omega)$ — пространство функций в Ω, для которых конечно выражение

$$\| u; V_{\sigma,\delta}^{s+1}(\Omega)\| = \| u; V_{\sigma-1}^s(\Omega)\| + \| r^{\sigma-\delta} u; W_2^{s+1}(\Omega)\|, \ \delta > 0$$

3°. *Задача с малым параметром.* Пусть $R^2 \supset \omega$ — область с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\omega$ и компактным замыканием. Рассмотрим краевую задачу

(1.3)
$$\Delta U(\varepsilon, x) = F(\varepsilon, x), \quad x \in \omega;$$
$$U(\varepsilon, x) + \varepsilon B(x) \frac{\partial U}{\partial n}(\varepsilon, x) = \Phi(\varepsilon, x), \quad x \in \partial\omega$$

где $C^\infty(\partial\omega) \ni B$ — положительная функция, ε — малый параметр.

Для исследования краевой задачи (1.3), как обычно, используется метод Шварца «замораживания» коэффициентов. Не останавливаясь на известных подробностях, сформулируем результаты.

Обозначим через $H_\varepsilon^s(\omega)$ пространство С. Л. Соболева $W_2^s(\omega)$, наделенное эквивалентной нормой

$$\| U; H_\varepsilon^s(\omega)\| = \| U; W_2^{s-1}(\omega)\| + \varepsilon \| U; W_2^s(\omega)\|$$

Введем еще множества

$$M_k^p = \{x \in K_\alpha : 2^{-k-p-1} < r < 2^{-k+p}\}, \ (k = 1, 2, \ldots; p = 0, 1)$$

Лемма 1. При $l = 0, 1, 2, \ldots$ отображение

$$\left\{\Delta; \left(1 + \varepsilon\beta(x) \frac{\partial}{\partial n}\Big|_{\partial\omega}\right\}: H_\varepsilon^{l+2}(\omega) \to H_\varepsilon^l(\omega) \times W_2^{l+1/2}(\partial\omega)$$

является изоморфизмом и равномерно (по ε) непрерывно.

Следствие 1. Пусть функции U, F и Φ принадлежат пространствам $W_2^{l+2}(M_0^1)$, $W_2^l(M_0^1)$ и $W_2^{l+1/2}(\partial M_0^1 \cap \partial K_\alpha)$ соответственно и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U(\varepsilon, x) = F(\varepsilon, x), \ x \in M_0^1; \ U(\varepsilon, x) + \varepsilon B(x) \frac{\partial U}{\partial n}(\varepsilon, x) =$$
$$= \Phi(\varepsilon, x), \ x \in \partial M_0^1 \cap \partial K_\alpha$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| U; H_\varepsilon^{l+2}(M_0^0)\| \leqslant c\, \{\| F; H_\varepsilon^l(M_0^1)\| + \| \Phi; W_2^{l+1/2}(M_0^1 \cap$$
$$\cap\, \partial K_\alpha)\| + \| U; L_2(M_0^1)\|\}$$

в котором постоянная c не зависит от ε, U, F и Φ.

4°. *Вспомогательные утверждения. Лемма 2.* Пусть $u \in W_{2,\mathrm{loc}}^{l+2}(\overline{\Omega}) \cap V_{\sigma-l-2}^0(\Omega)$ — решение задачи (1.1) с правыми частями $f \in V_{\sigma,\nu_0}^l(\Omega)$ и $\varphi \in V_\sigma^{l+1/2}(\partial\Omega)$. Тогда имеет место неравенство

(1.4)
$$\| u; V_{\sigma,\nu_0}^{l+2}(\Omega)\| \leqslant c\, \{\| f; V_{\sigma,\nu_0}^l(\Omega)\| + \| \varphi; V_\sigma^{l+1/2}(\partial\Omega)\| +$$
$$+ \| u; V_{\sigma-l-2}^0(\Omega)\|$$

где постоянная c не зависит от u.

Доказательство. В силу известных (см., например, [8]) свойств краевых задач в ограниченных областях достаточно получить оценку величины $\| u;\ V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\{x \in K_\alpha : r \leqslant 1/2\}) \|$ через правую часть (1.4). Кроме того, можно ограничиться случаем $\beta(x) = r^{1+\nu_0}\beta_0(\theta)$.

После замены $x \to y = 2^k x$ множества $M_k{}^p$ переходят в $M_0{}^p$, а функции $v_k(y) = u(2^{-k}y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_y v_k(y) = 2^{-2k} f(2^{-k}y),\ y \in M_0{}^1;\ v_k(y) - 2^{-k\nu_0}\beta(\theta)\,|y|^{1+\nu_0}\frac{\partial v_k}{\partial n}(y) =$$
$$= \varphi(2^{-k}y),\ y \in M_0{}^1 \cap \partial K_\alpha$$

Отсюда и из следствия 1 получаем оценку

$$(1.5)\qquad \| v_k;\ H^{l+2}_{2^{-k}\nu_0}(M_0{}^0)\| \leqslant c\,\{2^{-2k}\, \| f(2^{-k}\cdot);\ H^{l}_{2^{-k}\nu_0}(M_0{}^1)\| +$$
$$+ \| \varphi(2^{-k}\cdot);\ W_2^{l+1/2}(M_0{}^1)\| + \| v_k;\ L_2(M_0{}^1)\|\}$$

Умножая соотношения (1.5) на $2^{k(1+l-\sigma)}$, возвращаясь к координатам x, используя неравенства $2^{-k} > r$ в $M_k{}^0$, $2^{-k} < 4r$ в $M_k{}^1$ и суммируя полученные оценки по $k = 1, 2, 3, \ldots$, находим, что

$$\| u;\ V_\sigma^{l+1/2}\left(\left\{x \in K_\alpha\colon r < \frac{1}{2}\right\}\right)\| \leqslant c\,\{\| f;\ V^l_{\sigma, \nu_0}(\{x \in K_\alpha\colon r < 1\})\| +$$
$$+ \| \varphi;\ V_\sigma^{l+1/2}(\{x \in \partial K_\alpha\colon r < 1\})\| + \| u;\ V^0_{\sigma - l - 2}(\{x \in K_\alpha\colon r < 1\})\|$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\Omega) \ni u$ — решение задачи (1.1), $f \in V^l_{\sigma-\delta, \nu_0}(\Omega)$, $\varphi \in V^{l+1/2}_{\sigma-\delta}(\Omega)$; $\min\{\nu_0, \pi/\alpha\} > \delta > 0$; $l \geqslant 1$; числа $l + 1 - \sigma$ и $l + 1 - \sigma + \delta$ не кратны π/α. Тогда а) если отрезок $(l + 1 - \sigma,\ l + 1 - \sigma + \delta)$ свободен от чисел вида $p\pi/\alpha$ (p — целое), то $u \in V^{l+2}_{\sigma-\delta, \nu_0}(\Omega)$; б) если $p\pi/\alpha \in (l + 1 - \sigma,\ l + 1 - \sigma + \delta)$, то $u_1 = u - Cr^{p\pi/\alpha}\sin(\pi p\theta/\alpha) \in V^{l+2}_{\sigma-\delta, \nu_0}(\Omega)$, где C — некоторая постоянная.

Доказательство. В силу определений пространств имеем:

$$u \in V^{l+1}_{\sigma-1}(\Omega),\qquad f \in V^{l-1}_{\sigma-1-\delta}(\Omega),\qquad \varphi \in V^{l-1/2}_{\sigma-1-\delta}(\partial\Omega)$$

Поэтому, согласно [2], в случае а) $u \in V^{l+1}_{\sigma-1-\delta}(\Omega)$, а в случае б) $u_1 \in V^{l+1}_{\sigma-1-\delta}(\Omega)$. Остается воспользоваться оценкой (1.4) для функции u или u_1.

Лемма 4. (см. лемму 3.1 из [4]). Пусть $f(x) = r^{\gamma-2}\Psi(\theta, \ln r)$, $\varphi(x) = r^\gamma\Phi(\theta, \ln r)$, где $\Psi(\theta, t)$, $\Phi(\theta, t)$ — полиномы степени k с коэффициентами из пространства $C^\infty([0, \alpha])$. Тогда найдется полином $\Xi(\theta, t)$ с коэффициентами из $C^\infty([0, \alpha])$ такой, что

$$\left\{\Delta(r^\gamma\Xi(\theta, \ln r)) - r^{\gamma-2}\Phi(\theta, \ln r),\ \left(1 + \beta(x)\frac{\partial}{\partial n}\right)(r^\gamma\Xi(\theta, \ln r)) -\right.$$
$$\left. - r^\gamma\Psi(\theta, \ln r)\right\} \in V^l_{\sigma, \nu_0}(\Omega) \times V_\sigma^{l+1/2}(\partial\Omega)$$

где $\sigma < l - \gamma - \nu_0$. Степень полинома Ξ равна k, если $\gamma \neq \pi p/\alpha$, и $k + 1$, если $\gamma = \pi p/\alpha$.

5°. *Нормальная разрешимость краевой задачи.*

Теорема 1. Краевая задача (1.1) с оператором

$$(1.6)\qquad A = \left\{\Delta,\ \left(1 + \beta(x)\frac{\partial}{\partial n}\right)\right\}\colon V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\Omega) \to V^l_{\sigma, \nu_0}(\Omega) \times V_\sigma^{l+1/2}(\partial\Omega)$$

нормально разрешима в том и только в том случае, если число $l + 1 - \sigma$ не кратно π/α (т. е. $l + 1 - \sigma \neq p\pi/\alpha$ для любого целого p).

Доказательство. Конечномерность ядра. Если $u \in V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\Omega)$ — решение однородной задачи (1.1), то в силу лемм 2 и 3 найдется $\delta > 0$ такое, что $u \in V^{l+3}_{\sigma+1-\delta, \nu_0}(\Omega)$. Так как вложение $V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\Omega) \subset V^{l+3}_{\sigma+1-\delta, \nu_0}(\Omega)$ компактно, то $\dim\ker A < +\infty$.

Левый регуляризатор. Построим оператор

(1.7) $$R\colon V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\to V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$$

такой, что отображение

(1.8) $$1-AR\colon V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\to V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)$$

вполне непрерывно.

Из леммы 1 и следствия 1 вытекает, что существуют операторы

(1.9) $$P(k)\colon H^{l}_{2^{-k\nu_0}}(M_0^1)\times W_2^{l+1/2}(\partial M_0^1\cap\partial K_\alpha)\to H^{l+2}_{2^{-k\nu_0}}(M_0^1)$$

такие, что отображения

(1.10) $$\chi(\ln|y|)\,1-\left\{\Delta,\,\left(1+\beta\,(2^{-k}y)\frac{\partial}{\partial n}\right)\Big|_{\partial M_0^1\cap\partial K_\alpha}\right\}\chi(\ln|y|)\,P(k)\colon$$
$$H^{l}_{2^{-k\nu_0}}(M_0^1)\times W_2^{l+1/2}(\partial M_0^1\cap\partial K_\alpha)\to H^{l+1}_{2^{-k\nu_0}}(M_0^1)\times W_2^{l+3/2}(\partial M_0^1\cap\partial K_\alpha)$$

непрерывны, причем нормы операторов (1.9) и (1.10) ограничены постоянной, не зависящей от k. Здесь $\chi\in C^\infty((-1,2))$; $\chi(t)=1$ при $t\in[0,1]$; $\chi(t)+\chi(t+2)=1$ при $t\in[0,3]$. Введем оператор

$$T(f,\varphi)(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\chi(2k-\ln r)\,\{P(2k)(f,\varphi)(2^{-2k}y)\}\,|_{x=2^{-2k}y}+$$
$$+\zeta\left(\ln\frac{1}{r}\right)L(f,\varphi)(x);\ \ \zeta(t)=1-\sum_{k=2}^{\infty}\chi(t+2k)$$

где L — левый регуляризатор к задаче (1.1) в $\Omega\cap\{x\in R^2: r\leqslant 2\}$ [8]. Можно проверить, что отображение

(1.11) $$T\colon V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\to V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$$

непрерывно и, кроме того, также ограниченным является оператор

(1.12) $$(1-AT)^3\colon V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\to V^{l+3}_{\sigma-3,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+7/2}_{\sigma-3}(\partial\Omega)$$

Определим R по формуле

$$R=T+T(1-AT)+T(1-AT)^2+\left(1-\zeta\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)D^{-1}(1-AT)^3$$

где D^{-1} — оператор, обратный к оператору

(1.13) $$\{\Delta,1|_{\partial K_\alpha}\}\colon V^{l+4}_{\sigma-2}(\Omega)\to V^{l+2}_{\sigma-2}(\Omega)\times V^{l+5/2}_{\sigma-2}(\partial\Omega)$$

(который существует в силу результатов [2] и сформулированных условий). Ясно, что отображение (1.7) непрерывно. Кроме того, в силу (1.11)—(1.13) оператор

$$1-AR=-\left\{\left[\Delta,\zeta\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right],\ \left(1-\zeta\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)\beta(x)\frac{\partial}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}\right\}(1-AT)^3$$

действует в пространство

$$V^{l+1}_{\sigma-1-\varkappa,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+3/2}_{\sigma-1-\varkappa}(\partial\Omega),\ \varkappa=\min\{\nu_0,\nu_1-\nu_0\}$$

которое компактно вкладывается в $V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)$. Поэтому отображение (1.8) вполне непрерывно.

Замкнутость подпространства $\operatorname{Im}A$. Достаточно проверить справедливость неравенства

(1.14) $$\|u;V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\|\leqslant c\,\|Au;V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\|$$

для любой функции $u\in S$, где S — прямое дополнение $\ker A$ до $V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$. Предположим, что оценка (1.14) неверна. Тогда найдется последовательность $\{u_j\}$ элементов пространства $V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$ такая, что $\|u;V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\|=1$, а правая часть неравенства (1.14) стремится к нулю при $j\to\infty$. Выделим подпоследовательность, сходящуюся слабо в $V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$ к некоторой функции u. Не ограничивая общности, можно считать, что таким свойством обладает сама последовательность $\{u_j\}$. Так как $\|Au_j;V^{l}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)\times V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)\|\to 0$, то

$Au = 0$. Положив $v_j = -RA\, u_j$, имеем $\| v_j;\ V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega) \| \to 0$. Из доказанных ранее свойств оператора получаем включение

$$A\ (u_j + v_j) \in V^{l}_{\sigma-\delta,\nu_0}(\Omega) \times V^{l+1/2}_{\sigma-\delta}(\partial\Omega)$$

где $\delta > 0$. Следовательно, справедлива цепочка неравенств

$$(1.15) \qquad \| u_j + v_j - u;\quad V^{l+2}_{\sigma-\delta,\nu_0}(\Omega) \| \leqslant c \{ \| u_j + v_j - u;\quad V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega) \| + \\ + \| A(u_j + v_j);\quad V^{l}_{\sigma-\delta,\nu_0}(\Omega) \times V^{l+1/2}_{\sigma-\delta}(\partial\Omega) \| \} \leqslant c \{ \| u_j + v_j - u; \\ V^{0}_{\sigma-l-2}(\Omega) \| + \| A(u_j + v_j);\quad V^{l}_{\sigma-\delta,\nu_0}(\Omega) \times V^{l+1/2}_{\sigma-\delta}(\partial\Omega) \| \}$$

Из (1.15), в частности, вытекает, что последовательность $u_j + v_j$ сильно в $V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$ сходится к u. Но тогда $u \in \ker A$, и получено противоречие.

Проверенные три свойства краевой задачи (1.1) доказывают достаточность сформулированных в теореме условий ее нормальной разрешимости. Их необходимость устанавливается точно так же, как и в работе [2]. Теорема доказана.

Отметим, что приведенная схема доказательства нормальной разрешимости без изменения переносится на общую эллиптическую краевую задачу с вырождением краевых условий в конической точке.

6°. Асимптотика решений. Предположим, что правые части f и φ задачи (1.1) допускают асимптотические разложения

$$(1.16) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{N} r^{l-1-\sigma+\lambda_n} f_n(\theta, \ln r) + f_N^*(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} r^{l+1-\sigma+\lambda_n} \varphi_n(\theta, \ln r) + \varphi_N^*(x)$$

где $\{\lambda_n\}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел; $f_n(\theta,\ t)$ и $\varphi_n(\theta,\ t)$ — полиномы от t с коэффициентами из $C^\infty([0,\ \alpha])$; для остатков справедливы включения

$$(1.17) \qquad f_N^* \in V^{l}_{\beta+\lambda_N,\nu_0}(\Omega), \quad \varphi_N^* \in V^{l+2}_{\beta+\lambda_N}(\Omega)$$

Обозначим через $\{\gamma_n\}$ упорядоченную последовательность чисел γ, представимых в виде

$$(1.18) \qquad \gamma = \lambda_n + \sum_{j=0}^{J} n_j \nu_j \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\pi p}{\alpha} - l - 1 + \sigma + \sum_{j=0}^{J} n_j \nu_j$$

где J, n_j — произвольные целые неотрицательные числа; p — целое число, превосходящее $\alpha\ (\sigma - 1 - l)/\pi$.

Из лемм 3 и 4 вытекает

Теорема 2. Для решения $u \in V^{l+2}_{\sigma,\nu_0}(\Omega)$ задачи (1.1) с правыми частями, допускающими разложения (1.16), (1.17), справедлива формула

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} r^{l+1-\sigma+\gamma_n} u_n(\theta, \ln r) + u_N^*(x)$$

где $u_n(\theta,\ t)$ — полиномы от t с коэффициентами из $C^\infty([0,\ \alpha])$; N — произвольное натуральное число; $u_N^* \in V^{l+2}_{\beta+\gamma_N}(\Omega)$. Если, дополнительно, $\deg f_n = \deg \varphi_n = 0$ и среди чисел (1.18) число $l + 1 - \sigma + \pi q/\alpha$ появляется лишь при $p = q$, $n_j = 0$, то степени $\deg u_n$ полиномов $u_n\ (\theta,\ t)$ также равны нулю.

7°. *Однозначная разрешимость краевой задачи.* Так как в (1.1) $\beta\ (x) > 0$ при $x \in \partial\Omega \setminus O$, то задача (1.1) с однородным граничным условием (т. е. $\varphi \equiv 0$) $W_2^1(\Omega)$ эллиптична и, следовательно, однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ при любой $f \in L_2(\Omega)$. Сформулированный очевидный факт позволяет вывести из теорем 1 и 2 следующее утверждение о размерности подпространств $\ker A$ и $\operatorname{coker} A$.

Теорема 3. Пусть $\nu_0 > 0$ и число $l + 1 - \sigma$ не кратно π/α. Тогда

а) при $\sigma > l + 1 - \pi/\alpha$ коядро оператора (1.6) тривиально, а $\dim \ker A = [(\sigma - l - 1)\, \alpha/\pi]$;

б) при $\sigma < l + 1 + \pi/\alpha$ ядро оператора (1.6) тривиально, а $\dim \cdot \operatorname{coker} A = [(1 + l - \sigma)\, \alpha/\pi]$.

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что задача (1.1) однозначно разрешима в пространстве $V^{l+2}_{\sigma, \nu_0}(\Omega)$ при любых $f \in V^{l}_{\sigma, \nu_0}(\Omega)$ и $\varphi \in V^{l+1/2}_{\sigma}(\partial\Omega)$, если $\sigma \in (l + 1 - \pi/\alpha,\, l + 1 + \pi/\alpha)$, т. е. при указанных значениях σ отображение (1.6) — изоморфизм.

2. Об особенностях функции напряжения в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием. *1°. Постановка задачи.* Как известно [1], задача о кручении призматического стержня, подкрепленного тонким покрытием, сводится к определению в области поперечного сечения Ω функции напряжения U, удовлетворяющей уравнениям

$$\Delta U(x) = -2G, \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

$$U(x) + g\delta(x)\frac{\partial U}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad g = \frac{G}{G_c} \tag{2.2}$$

где G, G_c — модули сдвига для материалов стержня и покрытия; $\delta(x)$ — толщина покрытия в точке $x \in \partial\Omega$, измеренная вдоль внешней нормали n, $\delta(x)$ — малая величина. Пусть односвязная область Ω, характерный размер которой масштабированием сведен к единице, имеет границей контур с угловой точкой O раствора $\alpha \in (0, 2\pi]$. Будем считать, что $\delta(0) = 0$. Результаты работы [2] и п. 1 настоящей статьи позволяют исследовать влияние характера и степени утоньшения усиливающего покрытия вблизи угловой точки на асимптотическое поведение функции напряжений U. Точнее, найдем вид асимптотики U при $r \to 0$ в зависимости от параметра $\gamma \in (0, +\infty)$, характеризующего поведение U вблизи угловой точки

$$\delta(x) = \delta_\pm r^\gamma + O(r^{\gamma+\sigma}) \text{ при } r \to 0,\ x \in \Gamma_\pm$$

где $\delta_\pm$, σ — некоторые положительные постоянные; через Γ_- и Γ_+ обозначены части контура $\partial\Omega$, соответствующие значениям $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ угловой переменной.

2°. Вспомогательные утверждения. Лемма 5. Отличные от нуля корни уравнения

$$\sin(\lambda\alpha)\,[1 - (\lambda g)^2\delta_-\delta_+] + \lambda\cos(\lambda\alpha)\, g\,(\delta_+ + \delta_-) = 0 \tag{2.3}$$

и только они являются собственными числами спектральной задачи

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}(\theta) + \lambda^2\Phi(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \alpha]; \tag{2.4}$$

$$\Phi(\theta) \pm g\,\delta_\pm\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta) = 0, \quad \theta = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$$

Эти числа вещественны, имеют единичную кратность, и им соответствуют собственные функции

$$\Phi(\theta) = \sin(\lambda\theta) + \lambda g\delta_-\cos(\lambda\theta) \tag{2.5}$$

Доказательство. При $\lambda = 0$ краевая задача (2.4) однозначно разрешима. При $\lambda \neq 0$ решением уравнения на отрезке $[0, \alpha]$ из задачи (2.4) является линейная комбинация $a\sin(\lambda\theta) + b\cos(\alpha\theta)$. Учитывая граничные условия в (2.4), находим, что указанная функция отлична от нуля и удовлетворяет задаче (2.4) лишь в том случае, если $b = \lambda g\delta_- a \neq 0$, $\lambda \neq 0$ — корень уравнения (2.3). Так как задача

(2.4) самосопряжена, то все ее собственные числа вещественны. Кроме того, собственным числам λ и $-\lambda$ соответствуют одинаковые собственные функции (2.5), и, следовательно, присоединенных векторов нет.

Следующие три утверждения проверяются непосредственными вычислениями.

Лемма 6. Частное решение V_1 краевой задачи

$$\Delta V(x) = -2G,\ x \in K_\alpha;\ V(x) = 0,\ x \in \partial K_\alpha$$

в угле $K_\alpha = \{x \in R^2 : r > 0,\ \theta \in (0, \alpha)\}$ имеет вид

$$V_1(x) = \begin{cases} Gr^2 \sin\theta \sin(\alpha - \theta)(\cos\alpha)^{-1}, & \theta \neq \pi/2,\ 3\pi/2 \\ Gr^2\{[\sin 2\theta \ln r + \theta\cos 2\theta](\alpha\cos 2\alpha)^{-1} - \sin^2\theta\}, \\ \theta = \pi/2,\ 3\pi/2 \end{cases} \tag{2.6}$$

Лемма 7. Частное решение V_2 краевой задачи

$$\Delta V(x) = 0,\quad x \in K_\alpha;\ \frac{\partial V}{\partial\theta}(x) = \mp\frac{r^{1-\gamma}}{g\delta_-},\quad x \in \partial K_\alpha$$
$$\theta = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$$

определяется при помощи равенства (k — целое число)

$$V_2(x) = \begin{cases} \dfrac{r^{1-\gamma}}{1-\gamma} g^{-1}\left\{\dfrac{1}{\delta_-}\sin(1-\gamma)\theta + \dfrac{\delta_-^{-1}\cos(1-\gamma)\alpha + \delta_+^{-1}}{\sin(1-\gamma)\alpha}\cos(1-\gamma)\theta\right\} \\ (1-\gamma)\alpha \neq k\pi \\ \dfrac{r^{\pi k/\alpha}}{\pi k} g^{-1}\left\{\left(\dfrac{1}{\delta_-} + \dfrac{\cos\pi k}{\delta_+}\right)\left(\ln r\cos\dfrac{\pi k}{\alpha}\theta - \theta\sin\dfrac{\pi k}{\alpha}\theta\right) + \right. \\ \left. + \dfrac{\alpha}{\delta_-}\sin\dfrac{\pi k}{\alpha}\theta\right\},\ (1-\gamma)\alpha = k\pi \end{cases} \tag{2.7}$$

Лемма 8. Частное решение V_3 краевой задачи

$$\Delta V(x) = -2G,\quad x \in K_\alpha;\quad V(x) \pm g\delta_\pm \frac{\partial V}{\partial\theta}(x) = 0$$
$$x \in \partial K_\alpha,\quad \theta = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$$

задается формулами

$$V_3(x) = \begin{cases} Gr^2\left\{a\sin 2\theta + \left(\dfrac{1}{2} + 2\delta_- ga\right)\cos 2\theta - \dfrac{1}{2}\right\} \\ \lambda_j \neq 2,\ j = 0, \pm 1, \ldots \\ Gr^2\{\Lambda\ln r[\sin 2\theta + 2g\delta_-\cos 2\theta] + \Psi(\theta)\}, & \lambda_k = 2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь λ_j — корни уравнения (2.3); постоянные a и Λ имеют вид

$$a = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\alpha + 2\delta_+ g\sin 2\alpha][\sin 2\alpha(1 - 4g^2\delta_+\delta_-) + $$
$$+ 2g(\delta_- + \delta_+)\cos 2\alpha]^{-1}$$
$$\Lambda = -(1 - \cos 2\alpha + 2\delta_- g\sin 2\alpha)\Big[2\alpha(1 + 4g^2\delta_-^2) -$$
$$-\frac{1}{2}\sin 4\alpha(1 - 4g^2\delta_-^2) + 2g\delta_-(1 - \cos 4\alpha)\Big]^{-1}$$

Ψ — решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}(\theta) + 4\Psi(\theta) = -2G(2\Lambda[\sin 2\theta + 2g\delta_-\cos 2\theta] + 1),\quad \theta \in [0, \alpha]$$
$$\Psi(\theta) \pm g\delta_\pm\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(\theta) = 0,\quad \theta = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$$

3°. *Асимптотика решений в угловой точке.* В зависимости от параметра γ главной частью граничных условий (2.2) является один из операторов

$$\pm r^{\gamma-1} g\delta_\pm \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{\partial K_\alpha} \quad \text{при} \quad \gamma \in (0, 1) \tag{2.9}$$

$$\left(1 \pm g\delta_\pm \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Big|_{\partial K_\alpha} \quad \text{при} \quad \gamma = 1 \tag{2.10}$$

$$1|_{\partial K_\alpha} \quad \text{при} \ \gamma > 1 \tag{2.11}$$

Приводимые ниже асимптотические формулы для функции U вытекают, например, из [2, 3] в случае (2.9), из [1, 2] в случае (2.10), а в случае (2.11) являются следствиями результатов, полученных в п. 1.

Пусть $0 < \gamma < 1$. Справедливы представления

$$U(x) = \begin{cases} C + CV_2(x) + o(r^{\chi_1}), & \alpha < \pi(1-\gamma)^{-1} \\ C + CV_2(x) + C_1 r^{\pi/\alpha} \cos\dfrac{\pi\theta}{\alpha} + o(r^{\chi_2}), & \alpha = \pi(1-\gamma)^{-1} \\ C + C_1 r^{\pi/\alpha} \cos\dfrac{\pi\theta}{\alpha} + o(r^{\chi_3}), & \alpha > \pi(1-\gamma)^{-1} \end{cases} \tag{2.12}$$

где V_2 — функция (2.7); C, C_1 — некоторые постоянные; χ_j — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\chi_1 < \sigma + 1 - \gamma, \quad \chi_1 < \pi/\alpha, \quad \chi_2 < \sigma + 1 - \gamma, \quad \chi_2 < 2\pi/\alpha,$$
$$\chi_3 < 1 - \gamma, \quad \chi_3 < 2\pi/\alpha$$

Если $\gamma = 1$, то для функции U выполняются соотношения

$$U(x) = \begin{cases} C_2 r^{\lambda_1} [\sin\lambda_1\theta + \lambda_1 g\delta_- \cos\lambda_1\theta] + o(r^{\chi_1}), & \lambda_1 < 2 \\ V_3(x) + C_2 r^2 [\sin 2\theta + 2g\delta_- \cos 2\theta] + o(r^{\chi_2}), & \lambda_1 = 2 \\ V_3(x) + o(r^{\chi_3}), & \lambda_1 > 2 \end{cases} \tag{2.13}$$

где λ_1 — наименьший положительный корень уравнения (2.3), λ_2 — следующий положительный корень того же уравнения; C_2 — некоторая постоянная; V_3 — функция (2.8); χ_j — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\chi_1 < 2, \ \chi_1 < \lambda_1 + \sigma, \ \chi_1 < \lambda_2, \ \chi_2 < 2 + \sigma, \ \chi_2 < \lambda_2, \ \chi_3 < \lambda_1, \ \chi_3 < 2 + \sigma$$

Наконец, при $\gamma > 1$ из теоремы 2 получаем, что

$$U(x) = \begin{cases} C_3 r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) + o(r^{\chi_1}), & \alpha > \pi/2 \\ V_1(x) + C_3 r^2 \sin 2\theta + o(r^{\chi_2}), & \alpha = \pi/2 \\ V_1(x) + o(r^{\chi_3}), & \alpha < \pi/2 \end{cases} \tag{2.14}$$

Здесь V_1 — функция (2.6); C_3 — некоторая постоянная; χ_j — числа, подчиненные неравенствам

$$\chi_1 < 2, \quad \chi_1 < 2\pi/\alpha, \quad \chi_1 < \gamma - 1 + \pi/\alpha, \quad \chi_2 < \gamma + 1, \quad \chi_2 < 4,$$
$$\chi_3 < \gamma + 1, \quad \chi_3 < \pi/\alpha$$

Подчеркнем, что в формулы (2.12)—(2.14) включается случай $\alpha = \pi$, который соответствует гладкой границе $\partial\Omega$, но вырождению граничных условий в точке O, т. е. $\delta(0) \neq 0$.

Отметим интересный факт, вытекающий из формулы (2.12). А именно при $0 < \gamma < 1$ и $\alpha < \pi$ касательные напряжения в скручиваемом стержне с тонким усиливающим покрытием, которые выражаются через функцию напряжения U, будут иметь особенности в угловых точках поперечного сечения стержня. Это, на первый взгляд, парадоксальное обстоятельство связано с тем, что сечение скручиваемого стержня без усиливающего покрытия имеет выходящий угол, а с учетом усиливающего слоя этот угол становится входящим. В частности, при $\gamma < 1$ касательные напряжения имеют особенности в вершине как входящего, так и выходящего угла поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием. Тогда как при кручении стержня без покрытия, как известно [1], напряжения имеют особенности только в вершине входящего угла поперечного сечения.

4°. Асимптотика решений на бесконечности. Приведем результаты по асимптотике решений краевой задачи

$$\Delta W(x)=f(x),\quad x\in\omega,\quad W(x)+\beta(x)g^{-1}\frac{\partial W}{\partial n}(x)=0,\quad x\in\partial\omega \tag{2.15}$$

в области ω, имеющей «угловой выход» на бесконечность, т. е. при больших значениях r область ω совпадает с углом K_α. Необходимость исследования асимптотических разложений решений задач типа (2.15) возникает, например, при рассмотрении скручиваемых стержней, подкрепленных тонким усиливающим покрытием и имеющих форму сектора с боковой стороной длины D. При больших значениях D поведение функции напряжения вдали от вершины сектора описывается (см. [9]) асимптотическим представлением решения W задачи (2.15) при $f=-2G$, $\omega=K_\alpha$. Отметим также, что краевая задача (2.15) по виду совпадает с задачей о стационарном распределении температуры в клине, стороны которого находятся в свободном теплообмене с окружающей средой. Для упрощения формулировок предположим, что в задаче (2.15) правая часть f финитна. Необходимые частные решения в угле K_α для $f(x)=-2G$ приведены в леммах 6 и 8. Допустим также, что при $\theta=\alpha/2\pm\alpha/2$ и $r>r_0>0$ выполнены равенства $\delta(x)=\delta_\pm r^{-\nu}$. Так как уравнения (2.15) справедливы лишь для стержней с тонким покрытием, то функция δ не может иметь более чем линейный рост и, следовательно, $\nu\geqslant-1$.

Область ω при помощи конформного отображения преобразуется в область Ω, описанную в п. 1, 1°, поэтому оправдание приводящихся ниже асимптотик вытекает из результатов работ, цитированных в п. 3°. Итак, при $\nu=-1$ и $\nu>-1$ для решения W задачи (2.15) имеют место формулы

$$W(x)=C^{(1)}r^{-\lambda_1}[\sin\lambda_1\theta+\lambda_1 g\delta_-\cos\lambda_1\theta]+O(r^{-\lambda_2}),\quad r\to\infty$$
$$W(x)=C^{(2)}r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}+o(r^{-\chi}),\quad r\to\infty$$

соответственно. Здесь $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ — некоторые постоянные; λ_1, λ_2 — первые два положительных корня уравнения (2.3); $\chi<\min\{2\pi/\alpha,\ 1+\nu+\pi/\alpha\}$.

5°. Формулы для коэффициентов интенсивности. При помощи метода [4] выпишем явные представления для коэффициентов C_j, входящих в асимптотики (2.12)—(2.14). Так как применение метода [4] в задачах теории упругости неоднократно обсуждалось (см. [10—12]), остановимся лишь на одном из возможных вариантов. А именно рассмотрим случай $\gamma>1$, $\alpha>\pi/2$ (см. формулу (2.14)).

Обозначим через ζ гармоническую в $\overline{\Omega}\setminus O$ функцию, удовлетворяющую граничному условию

$$\zeta(x)+\delta(x)g\frac{\partial\zeta}{\partial n}(x)=0,\quad x\in\partial\Omega$$

и соотношению

$$\zeta(x)=r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}+o(r^{-\pi/\alpha}),\quad r\to 0$$

Существование такой функции не вызывает сомнения. Действительно

$$\zeta(x) = \eta(x) r^{-\pi/\alpha} \sin\frac{\pi\theta}{\alpha} + z(x)$$

где η — срезающая функция, равная нулю вне малой окрестности точки O и единице вблизи этой точки, а z — решение краевой задачи

$$\begin{aligned}(2.16)\qquad &\Delta z(x) = -r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\Delta\eta(x) - \\ &- 2\,\mathrm{grad}\left(r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)\mathrm{grad}\,\eta(x), \quad x \in \Omega \\ &z(x) + g\delta(x)\frac{\partial z}{\partial n}(x) = -g\delta(x)\frac{\partial}{\partial n}\left[\eta(x) r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right], \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Из теоремы 1 и положительной определенности формы, порожденной задачей (2.1), (2.2), вытекает однозначная разрешимость задачи (2.16) в классе функций, подчиненных условию: $z(x) = o(r^{-\pi/\alpha})$ при $r \to 0$.

Применяя к функциям ζ и U формулу Грина в области $\Omega_d = \{x \in \Omega: r > d\}$ и переходя, как обычно, к пределу при $d \to 0$, находим, что

$$\begin{aligned}(2.17)\qquad &\int_\Omega \{-2G\zeta(x)\}\,dx = \lim_{d\to 0}\int_{\Omega_d}\{-2G\zeta(x)\}\,dx = \lim_{d\to 0}\int_{\Omega_d}\Delta U(x)\zeta(x)\,dx = \\ &= \lim_{d\to 0}\int_{\partial\Omega_d}\left\{\frac{\partial U}{\partial n}(x)\zeta(x) - \frac{\partial\zeta}{\partial n}(x)U(x)\right\}ds = \\ &= \lim_{d\to 0}\int_{\partial\Omega_d\setminus\Gamma_d}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial n}(x) + (g\delta(x))^{-1}U(x)\right]\zeta(x) - \right. \\ &- \left.\left[\frac{\partial\zeta}{\partial n}(x) + g(\delta(x))^{-1}\zeta(x)\right]U(x)\right\}ds - \\ &- \left.\int_{\Gamma_d}\left\{\frac{\partial U}{\partial r}(x)\zeta(x) - \frac{\partial\zeta}{\partial r}(x)U(x)\right\}ds\right\} = \\ &= -\lim_{d\to 0} C_3\int_0^\alpha\left\{2\frac{\pi}{\alpha}\left(\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)^2 + o(1)\right\}d\theta = -\pi C_3 \\ &\Gamma_d = \{x \in K_\alpha : r = d\}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$C_3 = \frac{2G}{\pi}\int_\Omega \zeta(x)\,dx$$

Построение функции ζ связано с нахождением решения задачи (2.16), что часто представляет значительную трудность. С другой стороны, если тем или иным методом найдено точное или приближенное решение задачи (2.1), (2.2), то определить его поведение вблизи угловой точки можно при помощи способа, предложенного в [12]. Проделывая выкладки, аналогичные (2.17), в усеченном секторе $S_{D,d} = \{x \in K_\alpha: D > r > d\}$ для функции $Z(x) = (r^{-\pi/\alpha} - D^{-2\pi/\alpha}r^{\pi/\alpha})\sin(\pi\theta/\alpha)$ имеем

$$(2.18)\qquad 2G\int_{S_{D,d}} Z(x)\,dx - \int_{\partial S_{D,0}}\frac{\partial Z}{\partial n}(x)U(x)\,ds = \pi C_3$$

Указанная формула позволяет найти коэффициент интенсивности по значениям U на дуге Γ_D и на границе области $\partial\Omega$. Отметим, что в силу (2.14) $U(x)|_{\partial\Omega} = o(r^{-\pi/\alpha+\sigma})$, $\sigma > 0$, и интеграл по $\partial S_{D,0}$ в (2.18) сходится.

Кроме того

$$\int_{S_{D,0}} Z(x)\,dx = \frac{4D^{2-\pi/\alpha}}{4-(\pi/\alpha)^2},$$

и окончательно формула (2.18) принимает вид

$$C_3 = \frac{8GD^{2-\pi/\alpha}}{\pi(4-(\pi/\alpha)^2)} - \frac{1}{\pi}\int_{\partial S_{D,0}} \frac{\partial Z}{\partial n}(x)\,U(x)\,ds$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. московск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
3. *Pazy A.* Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, v. 24, p. 193—218.
4. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, B. 76, S. 29—60.
5. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— Math. Nachr., 1978, B. 81, S. 25—82.
6. *Назаров С. А.* Эллиптические краевые задачи, вырождающиеся в конической точке.— Вестн. ЛГУ, 1980, № 19, с. 108—109.
7. *Назаров С. А.* Метод Вишика — Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. I. Задача в конусе.— Сиб. матем. ж., 1981, т. 22, № 4, с. 142—163.
8. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 380 с.
9. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981. 208 с.
10. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости.— Л: Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
11. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
12. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* Об особенностях напряжений вблизи угловых точек профилей однородных и составных призматических стержней при кручении.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 4, с. 832—835.

Москва, Ленинград

Поступила в редакцию
12.V.1982