Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.3:534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТЬ

Бабешко В. А., Селезнёв М. Г., Селезнёва Т. Н., Соколов В. П.

Предлагается метод, позволяющий исследовать плоскую или осесимметричную краевую задачу теории упругости об установившихся колебаниях упругого полупространства, содержащего круговую цилиндрическую или сферическую полость. Используется принцип суперпозиции, с помощью которого задача сводится к решению системы интегральных уравнений второго рода. Изучаются особенности введенных неизвестных функций напряжений в окрестности угловых точек. После выделения особенностей решение поставленной задачи сводится к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый метод позволяет исследовать случай, когда полость выходит на поверхность среды.

1. Рассмотрим плоскую задачу об установившихся колебаниях упругого полупространства с полостью в виде кругового цилиндра, ось которого параллельна поверхности полупространства.

Движение точек среды описывается динамическими уравнениями теории упругости в смещениях — уравнениями Ламе [1]. Область, занимаемая упругой средой, в декартовой прямоугольной системе координат: $x \geqslant 0$, $r \geqslant a$ (a — радиус отверстия, $x = h$, $y = 0$ — координаты его центра). На границе области заданы следующие граничные условия:

$$x = 0, \ \sigma_x = t_1(y)\, e^{-i\omega t}, \ \tau_{xy} = t_2(y)\, e^{-i\omega t} \tag{1.1}$$
$$r = a, \ \sigma_r = \tau_1(\varphi)\, e^{-i\omega t}, \ \tau_{r\varphi} = \tau_2(\varphi)\, e^{-i\omega t}$$
$$\left(r = \sqrt{(x-h)^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-h}\right)$$

Здесь (r, φ) — локальная цилиндрическая система координат, связанная с цилиндрическим отверстием; ω — частота установившихся колебаний.

На бесконечности компоненты векторов смещения и напряжения убывают и стремятся к нулю.

Решение поставленной краевой задачи строится в виде суммы решений следующих двух краевых задач: задачи об установившихся колебаниях однородного упругого полупространства под действием заданных на поверхности напряжений

$$x = 0, \ \sigma_x = X_1(y)\, e^{-i\omega t}, \ \tau_{xy} = X_2(y)\, e^{-i\omega t}$$

и задачи об установившихся колебаниях бесконечного упругого пространства с цилиндрическим вырезом, к поверхности которого приложена нагрузка

$$r = a, \ \sigma_r = Y_1(\varphi)\, e^{-i\omega t}, \ \tau_{xy} = Y_2(\varphi)\, e^{-i\omega t}$$

Суммируя решения сформулированных выше двух задач, удовлетворяем граничным условиям (1.1) исходной задачи. При этом получаем для определения функций $X_j(y)$ и $Y_j(\varphi)$ ($j = 1, 2$) систему четырех интегральных уравнений

$$X_k(y)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}^{2\pi-\gamma_0} Y_1(\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_{k1}^{(n)}(y)\,e^{-in\eta}\,d\eta+ \tag{1.2}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}^{2\pi-\gamma_0} Y_2(\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_{k2}^{(n)}(y)\,e^{-in\eta}\,d\eta=t_k(y)$$

$$Y_k(\varphi)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}X_1(\eta)\int\limits_{\sigma}\Psi_{k1}(u,\varphi)\,e^{iu(\eta-y_0)}\,d\eta\,du+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}X_2(\eta)\int\limits_{\sigma}\Psi_{k2}(u,\varphi)\,e^{iu(\eta-y_0)}\,d\eta\,du=\tau_k(\varphi),\quad k=1,2$$

$$\gamma_0=\begin{cases}\arccos\dfrac{h}{a}, & |h|<a\\ 0, & |h|\geqslant a\end{cases}$$

В случае, когда полость выходит на поверхность среды ($|h|<a$), искомые функции $Y_k(\varphi)$ ($k=1, 2$) в области $\varphi<\gamma_0$, $\varphi>2\pi-\gamma_0$ полагаем равными нулю. Выбор контура σ в (1.2) диктуется принципом предельного поглощения [2]. В данном случае контур огибает отрицательный полюс и точки ветвления функций $\Psi_{kj}(u,\varphi)$ сверху, положительные — снизу, а на остальной части совпадает с вещественной осью. Правую половину контура, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} u\geqslant 0$, обозначаем в дальнейшем σ^+.

Приведем выражения для функций $\Phi_{11}^{(n)}(y)$, $\Psi_{11}(u,\varphi)$

$$\Phi_{11}^{(n)}(y)=[a_{2n}E_{1n}-a_{1n}E_{2n}]\,[b_{1n}a_{2n}-b_{2n}a_{1n}]^{-1}$$

$$E_{1n}(y)=2\mu\left\{\left[\frac{n(n-1)}{r_0^2}(\cos 2\varphi_0-i\sin 2\varphi_0)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\lambda}{\mu}+1+\cos 2\varphi_0\right)\frac{\theta_2^2}{2}\right]H_n^{(1)}(\theta_1 r_0)+$$
$$\left.+\frac{\theta_1}{r_0}(\cos 2\varphi_0-i\sin 2\varphi_0)\,H_{n+1}^{(1)}(\theta_1 r_0)\right\}$$

$$E_{2n}(y)=2i\mu\left\{\left[\frac{n(n-1)}{r_0^2}(\cos 2\varphi_0-i\sin 2\varphi_0)+i\frac{\theta_2^2}{2}\right]H_n^{(1)}(\theta_2 r_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{\theta_2}{r_0}(n\cos 2\varphi_0+i\sin 2\varphi_0)\,H_{n+1}^{(1)}(\theta_2 r_0)\right\}$$

$$a_{1n}=\frac{2i\mu n}{a}\left[\frac{n-1}{a}H_n^{(1)}(\theta_1 a)-\theta_1 H_{n+1}^{(1)}(\theta_1 a)\right]$$

$$a_{2n}=-2\mu\left\{\left[\frac{n(n-1)}{a^2}-\frac{\theta_2^2}{2}\right]H_n^{(1)}(\theta_2 a)+\frac{\theta_2}{a}H_{n+1}^{(1)}(\theta_2 a)\right\}$$

$$b_{1n}=2\mu\left\{\left[\frac{n(n-1)}{a^2}-\left(\frac{\lambda}{2\mu}+1\right)\theta_1^2\right]H_n^{(1)}(\theta_1 a)+\frac{\theta_1}{a}H_{n+1}^{(1)}(\theta_1 a)\right\}$$

$$b_{2n}=\frac{2i\mu n}{a}\left[\frac{n-1}{a}H_n^{(1)}(\theta_2 a)-\theta_2 H_{n+1}^{(1)}(\theta_2 a)\right]$$

$$r_0=r\,|_{x=0}=\sqrt{h^2+y^2};\qquad \varphi_0=\operatorname{arctg}(-y/h)$$

$$\Psi_{11}(u,\varphi)=\frac{1}{2\pi\delta}\left\{(2u^2-\theta_2^2)\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\sigma_1}{a}\cos\varphi+i\frac{u}{a}\sin\varphi-\theta_1^2\right)+\right.\right.$$
$$\left.+2(u^2\cos 2\varphi-\theta_1^2\cos^2\varphi)+2i\sigma_1 u\sin 2\varphi\right]e^{-\sigma_1 x_0}-$$
$$-2\sigma_1 u\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{u}{a}\cos\varphi+i\frac{\sigma_2}{a}\sin\varphi\right)+2\sigma_2 u\cos 2\varphi+\right.$$
$$\left.\left.+i(2u^2-\theta_2^2)\sin 2\varphi\right]e^{-\sigma_2 x_0}\right\}$$

$$\sigma_j^2=u^2-\theta_j^2;\qquad \theta_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu},\qquad \theta_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu},\qquad j=1,2$$

$$\delta = (\sigma_2^2 + u^2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2 u^2, \; x_0 = x\,|_{r=a} = h - a\cos\varphi$$
$$y_0 = y\,|_{r=a} = -a\sin\varphi$$

($H_n^{(1)}(z)$ — функции Ханкеля первого рода, ρ — плотность среды, λ, μ — коэффициенты Ляме).

Остальные функции ввиду их громоздкости не приводятся.

Система (1.2) рассматривается в пространстве суммируемых функций. Этот класс функций обеспечивает конечность заключенной в любом ограниченном объеме энергии, определяемой решением динамических задач теории упругости.

Отметим, что операторы в правой части (1.2) в пространстве суммируемых функций не являются непрерывными в случае, когда полость выходит на поверхность полупространства ($|h| < a$). Поэтому в указанных случаях необходимо строить регуляризатор системы. Построение регуляризатора сводится к выделению особой части ядер системы [2]. Для выделения ограниченного оператора, не являющегося вполне непрерывным, было изучено поведение функций $\Phi_{ij}^{(n)}(y)$ при $n \to \infty$ и $\Psi_{kj}(u, \varphi)$ при $|u| \to \infty$.

Исследуем поведение искомых функций в окрестности угловой точки области. Для этого подставим предельные значения функций $\Phi_{ij}^{(n)}$ и Ψ_{kj} в систему (1.2) и произведем замену переменных $\zeta = y - \sqrt{a^2 - h^2}$, $\chi = \varphi - \gamma_0$. Применяя к полученной системе преобразование Меллина [3] по параметрам ζ и χ (функции $Y_k(\varphi)$, $\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi)$, $\tau_k(\varphi)$ с этой целью аналитически продолжаются в область $\varphi > 2\pi - \gamma_0$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно трансформант Меллина неизвестных функций

(1.3)
$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \; \mathbf{A} = \| a_{ij} \| \; (i, j = 1, 2, 3, 4)$$
$$\mathbf{X} = \mathrm{col}\,(Y_1(p), Y_2(p), X_1(p), X_2(p))$$
$$\mathbf{B} = \mathrm{col}\,(t_1(p), t_2(p), \tau_1(p), \tau_2(p))$$
$$a_{11} = \frac{1}{\sin p\pi}\, p \sin\gamma_0 \cos[p(\pi - \gamma_0) + \gamma_0], \quad a_{22} = -a_{11}$$
$$a_{12} = \frac{p}{\sin p\pi} \sin\gamma_0 \sin[p(\pi - \gamma_0) + \gamma_0], \quad a_{21} = a_{12}$$
$$a_{33} = \frac{\sin(\pi - \gamma_0)}{\sin p\pi}, \quad a_{34} = \frac{2\sin\gamma_0}{\sin p\pi} \sin[p(\pi - \gamma_0) + \gamma_0]$$
$$a_{44} = \frac{\sin[p(\pi - \gamma_0) + 2\gamma_0]}{\sin p\pi}; \quad a_{13} = a_{24} = a_{31} = a_{42} = 1$$
$$a_{14} = a_{23} = a_{32} = a_{41} = a_{43} = 0; \; \gamma_0 = \arccos\frac{h}{a}$$

Здесь p — параметр преобразования Меллина, γ_0 — угол в плоскости $z = 0$ между осью y и касательной к окружности в угловой точке.

Разрешая систему (1.3) по правилу Крамера [4], получаем для трансформант Меллина искомых функций выражения

(1.4)
$$Y_k(p) = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)}, \quad X_k(p) = \frac{\Delta_{k+2}(p)}{\Delta(p)} \quad (k = 1, 2)$$
$$\Delta(p) = 1 + 2p \frac{\sin^2\gamma_0}{\sin^2\pi p} \cos[2p(\pi - \gamma_0) + 2\gamma_0] -$$
$$- \frac{p^2 \sin^2\gamma_0}{\sin^4 p\pi} \sin[(\pi - \gamma_0)p + 2\gamma_0] \sin p(\pi - \gamma_0)$$

Для обращения формул (1.4) необходимо определить корни уравнения $\Delta(p) = 0$, учитывая, что $\mathrm{Re}\, p \in (0, 1)$. Уравнение $\Delta(p) = 0$ исследовалось численно на ЭЦВМ. Установлено, что при фиксированном γ_0 оно имеет только один корень p_0, зависимость которого от γ_0 приведена на фигуре. Это дает возможность применять теорему о вычетах.

Применяя обратное преобразование Меллина к (1.4), получим, что в окрестности особой точки

$$Y_k(\varphi) \sim \frac{C_k}{(\varphi-\gamma_0)^{p_0}}, \quad X_k(y) \sim \frac{C_{k+2}}{(y-y_0)^{p_0}} \quad (k=1, 2)$$

$$c_j = \Delta_j(p_0)/\Delta'(p_0), \; j = 1, 2, 3, 4, \; y_0 = \sqrt{a^2-h^2}$$

Система интегральных уравнений (1.2) может быть сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$(1.5) \qquad Y_j^{(k)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{j1k}^{(n)} Y_1^{(n)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{j2k}^{(n)} Y_2^{(n)} = \tau_j^{(k)} - T_j^{(k)};$$
$$j=1, 2; \quad k=0, 1, 2\ldots$$

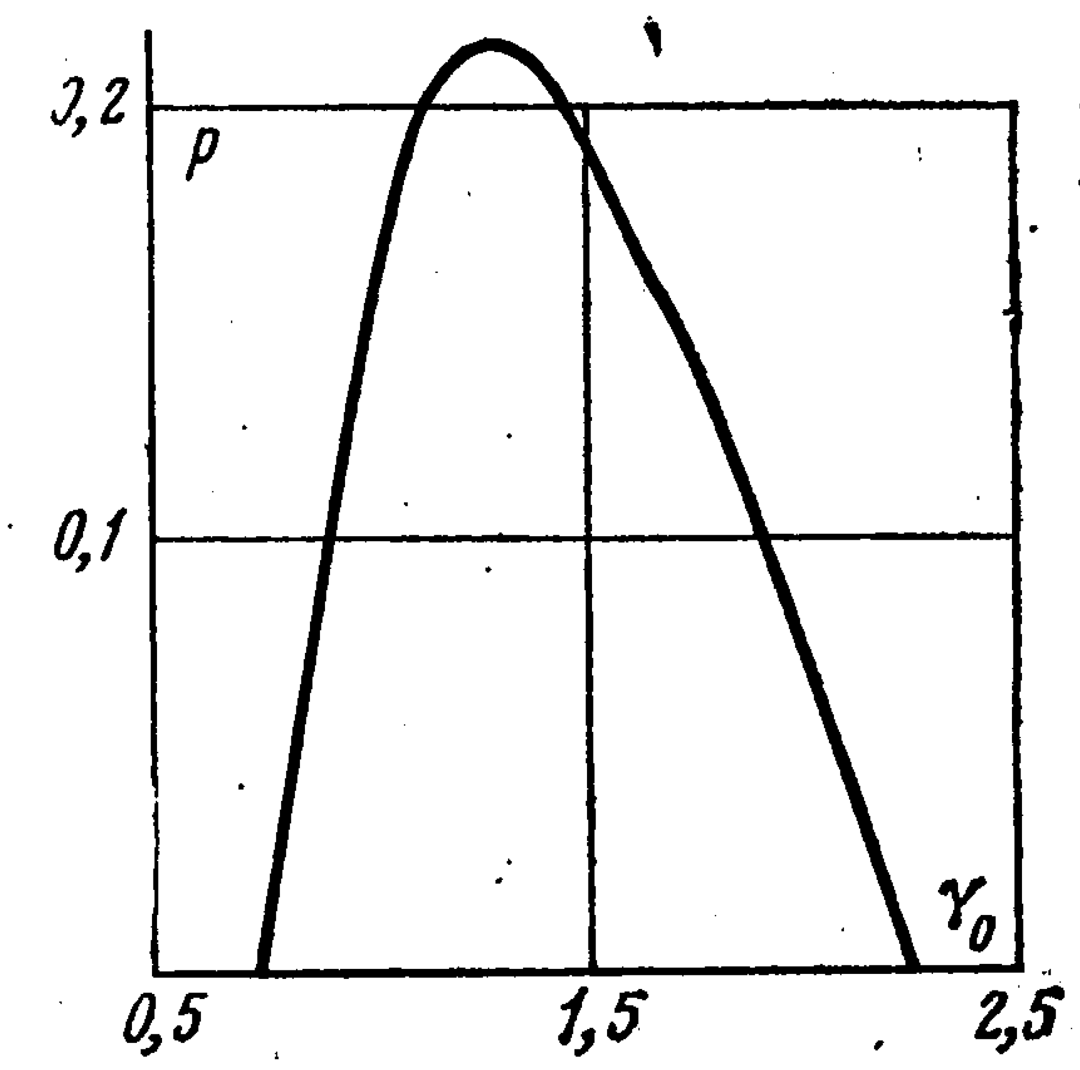
Здесь

$$F_{\alpha\beta n}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} [\Phi_{1\beta}^{(n)}(y)\,\Psi_{\alpha1}(u,\varphi) + \Phi_{2\beta}^{(n)}(y)\,\Psi_{\alpha2}(u,\varphi)] \times$$
$$\times \exp[iu(y-y_0) - ik\varphi]\,d\varphi\,dy\,du; \quad \alpha=1, 2; \quad \beta=1, 2$$

$$T_\alpha^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} [t_1(y)\,\Psi_{\alpha1}(u,\varphi) + t_2(y)\,\Psi_{\alpha2}(u,\varphi)] \times$$
$$\times \exp[iu(y-y_0) - ik\varphi]\,d\varphi\,dy\,du, \quad \alpha=1, 2$$

$$Y_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_j(\varphi)\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi, \quad \tau_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau_j(\varphi)\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi, \quad j=1, 2$$

Система (1.5) квазивполне регулярна при $|h| > a$, так как аппроксимирует систему интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором. В случае $|h| < a$, после регуляризации системы интегральных уравнений (1.2) приходим к системе вида (1.5), в которой изменится только вид подынтегральных функций, определяющих коэффициенты системы. В этом случае система линейных уравнений (1.5) будет также квазивполне регулярна, как система, порожденная вполне непрерывным оператором.



Решение системы (1.5) в обоих случаях можно эффективно проводить численно на ЭЦВМ, например, методом урезания с оценкой практической сходимости процесса.

2. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях упругого полупространства, содержащего сферическую полость, в осесимметричной постановке.

Движение точек среды описывается динамическими уравнениями Ляме. Среда занимает в цилиндрической системе координат (R, z) область: $z \leqslant 0$, $r = \sqrt{R^2+(z+h)^2} \geqslant a$ (a — радиус сферической полости; $R = 0$, $z = -h$ — координаты ее центра). В случае осевой симметрии цилиндрические координаты (R, z) связаны со сферическими (r, α) соотношениями

$$r = \sqrt{R^2+(z+h)^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{R}{h+z}, \quad R = r\sin\alpha$$
$$z = r\cos\alpha - h$$

Пусть на границе области задана осциллирующая с частотой ω нагрузка

(2.1) $$z = 0,\ \sigma_z = t_1(R)\,e^{-i\omega t},\ \tau_{Rz} = t_2(R)\,e^{-i\omega t}$$
$$r = a,\ \sigma_r = \tau_1(\alpha)\,e^{-i\omega t},\ \tau_{r\alpha} = \tau_2(\alpha)\,e^{-i\omega t}$$

На бесконечности компоненты векторов смещений и напряжений убывают и стремятся к нулю.

Решение сформулированной краевой задачи строится аналогично случаю цилиндрического отверстия с использованием принципа суперпозиции в виде суммы решений краевых задач об установившихся осесимметричных колебаниях упругого полупространства под действием гармонических нагрузок

$$z = 0,\ \sigma_z = X_1(R)\,e^{-i\omega t},\ \tau_{Rz} = X_2(R)\,e^{-i\omega t}$$

и задачи о вибрации бесконечного упругого пространства со сферической полостью радиуса a, на поверхности которой заданы напряжения

$$r = a,\ \sigma_r = Y_1(\alpha)\,e^{-i\omega t},\ \tau_{r\alpha} = Y_2(\alpha)\,e^{-i\omega t}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.2) исходной краевой задачи, аналогично п. 1 имеем для определения неизвестных функций $X_j(R)$, $Y_j(\alpha)$ систему интегральных уравнений второго рода

(2.2) $$X_k(R) + \int_{\gamma_0}^{\pi} Y_1(\psi)\sin\psi \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{k1}^{(n)}(R)\, P_n(\cos\psi)\, d\psi +$$
$$+ \int_{\gamma_0}^{\pi} Y_2(\psi)\sin\psi \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{k2}^{(n)}(R)\, \frac{\partial P_n(\cos\psi)}{\partial\psi}\, d\psi = t_k(R)$$
$$Y_k(\alpha) + \int_{\rho_0}^{\infty} \beta X_1(\beta) \int_{\sigma+} \Psi_{k1}(u,\alpha)\, J_1(\beta u)\, u\, du\, d\beta +$$
$$+ \int_{\rho_0}^{\infty} \beta X_2(\beta) \int_{\sigma+} \Psi_{k2}(u,\alpha)\, J_0(\beta u)\, u\, du\, d\beta = \tau_k(\alpha), \quad k = 1, 2$$
$$\gamma_0 = \begin{cases} \arccos(h/a), & |h| < a, \\ 0, & |h| \geqslant a, \end{cases} \qquad \rho_0 = \begin{cases} \sqrt{a^2 - h^2}, & |h| < a, \\ 0, & |h| \geqslant a \end{cases}$$

Здесь $P_n(\cos\psi)$ — полиномы Лежандра, $J_n(x)$ — функции Бесселя. Выбор контура σ^+ диктуется принципом предельного поглощения [2].

Ввиду того что функции $\Phi_{kj}^{(n)}(R)$ и $\Psi_{kj}(u, \alpha)$ имеют громоздкий вид, приведем лишь по одной функции

$$\Phi_{11}^{(n)} = \frac{2n+1}{2}\, \frac{b_{2n}F_{1n}(R) - b_{1n}F_{2n}(R)}{a_{1n}b_{2n} - a_{2n}b_{1n}}$$
$$F_{1n}(R) = \frac{2\mu}{\theta_1^2\sqrt{r_0}} \left\{ \frac{1}{r_0} \left[\frac{h^2 n(n-1) - R^2 n}{r_0^2} - h^2\theta_1^2 \right] \times \right.$$
$$\times H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1 r_0)\, P_n(\cos\alpha) - \frac{2n-1}{r_0^4}\, Rh H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1 r_0)\, \frac{\partial P_n(\cos\alpha)}{\partial\alpha} +$$
$$+ \frac{\theta_1(2h^2 - R^2)}{r_0^3}\, H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_1 r_0)\, P_n(\cos\alpha) + \frac{2Rh\theta_1}{r_0^3}\, H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_1 r_0) \times$$
$$\left. \times\, \frac{\partial P_n(\cos\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{1}{2\mu}\, \theta_1^2 H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1 r_0)\, P_n(\cos\alpha) \right\}_{\alpha=\alpha_0}$$
$$F_{2n}(R) = \frac{2\mu}{\theta_2^2\sqrt{r_0}} \left\{ \frac{1}{r_0^4} [h^2(n-1) - R^2 n]\, H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r_0)\, P_n(\cos\alpha) - \right.$$
$$- \frac{Rh}{r_0^2} \left[\frac{2n-1}{n r_0^2} - \frac{\theta_2^2}{n(n+1)} \right] H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r_0)\, \frac{\partial P_n(\cos\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\theta_2(R^2 - h^2)}{r_0^3} \times$$
$$\left. \times H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2 r_0)\, P_n(\cos\alpha) - \frac{Rh\theta_2}{r_0^3 n(n+1)}\, H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2 r_0)\, \frac{\partial P_n(\cos\alpha)}{\partial\alpha} \right\}_{\alpha=\alpha_0}$$

$$a_{1n}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\left[2\mu\frac{n(n-1)}{\theta_1^2a^2}-\lambda-2\mu\right]H^{(1)}_{n+1/2}(\theta_1 a)+\frac{4\mu}{\theta_1 a}H^{(1)}_{n+3/2}(\theta_1 a)\right\}$$

$$a_{2n}=\frac{2\mu}{\theta_2^2a\sqrt{a}}\left[\frac{n-1}{a}H^{(1)}_{n+1/2}(\theta_2 a)-\theta_2H^{(1)}_{n+3/2}(\theta_2 a)\right]$$

$$b_{1n}=\frac{2\mu}{\theta_1^2a\sqrt{a}}\left[\frac{n-1}{a}H^{(1)}_{n+1/2}(\theta_1 a)-\theta_1H^{(1)}_{n+3/2}(\theta_1 a)\right]$$

$$b_{2n}=\frac{\mu}{\theta_2^2n(n+1)\sqrt{a}}\left\{\left[\frac{2(n^2-1)}{a^2}-\theta_2^2\right]H^{(1)}_{n+1/2}(\theta_2 a)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\theta_2}{a}H^{(1)}_{n+3/2}(\theta_2 a)\right\}$$

$$r_0=r\,|_{z=0}=\sqrt{h^2+R^2},\quad \alpha_0=\operatorname{arctg}(R/h)$$

$$\Psi_{12}(u,\alpha)=\frac{2u}{\delta}\{\sigma_2[(\sigma_2^2+u^2)e^{\sigma_2 z_0}-2u^2e^{\sigma_1 z_0}][uJ_0(R_0u)-$$

$$-R_0^{-1}J_1(R_0u)]\sin^2\alpha-u\sigma_2[(\sigma_2^2+u^2)e^{\sigma_2 z_0}-2\sigma_1^2e^{\sigma_1 z_0}]\times$$

$$\times J_0(R_0u)\cos^2\alpha+[(\sigma_2^2+u^2)e^{\sigma_2 z_0}-4u^2\sigma_1\sigma_2e^{\sigma_1 z_0}]J_1(R_0u)\times$$

$$\times\sin\alpha\cos\alpha\}+\frac{2\lambda\sigma_2}{\mu\delta}(\sigma_1^2-u^2)u^2e^{\sigma_1 z_0}J_0(R_0u);$$

$$z_0=z\,|_{r=a}=a\cos\alpha-h,\quad R_0=R\,|_{r=a}=a\sin\alpha$$

Остальные параметры описаны в п. 1. Следует отметить, что основные свойства элементов системы (2.2) аналогичны свойствам системы (1.2).

В случае $|h|<a$ (сферическая полость пересекает поверхность полупространства) необходимо, аналогично предыдущему, регуляризовать систему (2.2), для чего исследуем поведение неизвестных функций в окрестности угловых точек. Как и в задаче п. 1, трансформанты Меллина $X_j(p)$, $Y_j(p)$ искомых функций определяются соотношениями (1.4), т. е. неизвестные функции для задач о сферическом и цилиндрическом отверстиях в упругом полупространстве имеют одни и те же особенности в угловых точках области. Система (2.2) приводится к бесконечной квазивполне регулярной системе линейных алгебраических уравнений вида (1.5) ($|h|>a$), где

$$Y^{(k)}_\alpha=\int_0^\pi Y_\alpha(\varphi)\sin\varphi D_\alpha P_k(\cos\varphi)\,d\varphi,\qquad \tau^{(k)}_\alpha=\int_0^\pi\tau_\alpha(\varphi)\sin\varphi\times$$

$$\times D_\alpha P_k(\cos\varphi)\,d\varphi,\quad D_\alpha=\begin{cases}1, & \alpha=1\\ \partial/\partial\varphi, & \alpha=2.\end{cases}$$

$$F^{(n)}_{\alpha\beta k}=\int_{\sigma+}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\pi[\Phi^{(n)}_{1\beta}(R)\Psi_{\alpha1}(u,\varphi)J_0(Ru)+$$

$$+\Phi^{(n)}_{2\beta}(R)\Psi_{\alpha2}(u,\varphi)J_1(Ru)]R\sin\varphi D_\alpha P_k(\cos\varphi)\,d\varphi\,dR\,du$$

$$T^{(k)}_\alpha=\int_{\sigma+}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\pi[t_1(R)\Psi_{\alpha1}(u,\varphi)J_0(Ru)+t_2(R)\Psi_{\alpha2}(u,\varphi)\times$$

$$\times J_1(Ru)]R\sin\varphi D_\alpha P_k(\cos\varphi)\,d\varphi dRdu$$

$$(\alpha,\beta=1,2;\ k,n=0,1,2,\ldots)$$

В случае $|h|<a$ аналогичная система получается после регуляризации системы (2.2). При этом изменится лишь внешний вид коэффициентов $F^{(n)}_{\alpha\beta k}$, $T_\alpha^{(k)}$ (2.3), основные свойства сохранятся.

В заключение отметим, что при использовании изложенного выше метода при исследовании установившихся колебаний в областях, содержащих угловые точки, порядок особенности неизвестных функций в окрестности угловой точки определяется геометрией сечения в координатной плоскости, содержащей угловую точку. А именно при изучении аналогич-

ным способом задачи для клиновидных областей, полученных как суперпозиция двух полупространств в плоской постановке, порядок особенности будет несколько иным, чем в задаче о сферической или цилиндрической полости (при угле раствора плоского клина, равном углу γ_0 между плоскостью и касательной к сечению сферы или цилиндра в угловой точке). Из последнего факта можно сделать вывод, что наличие кривизны одной из линий в координатном сечении, содержащем угловую точку, изменяет порядок особенности неизвестных функций, определяемых из интегрального уравнения, к которому сводится при данном подходе решение краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости, М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
4. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
15.IV.1982