УДК 62—50

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ермолов А. Н.

Рассматривается дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, в которой управление со стороны первого игрока осуществляется многими лицами — агентами. Обмен информацией между агентами невозможен. Предлагается способ решения, опирающийся на исследование многокритериальной дифференциальной игры с помощью метода программных итераций. Дается решение линейной задачи при многогранном целевом множестве и некоторых ограничениях на множества управлений.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальная игра, в которой первый игрок (распоряжающийся управлением u) представляет собой коллектив из n агентов, каждый из которых выбирает управление $u_i[t]$ и в процессе проведения операции наблюдает положение вектора $x_i[t]$, которое зависит от управления i-го агента, но не зависит от управлений других агентов первого игрока. Обмен информацией между агентами в процессе игры невозможен. Цель агентов — привести траекторию $x[t]=(x_1[t],\ldots, x_n[t])$ в момент θ на некоторое целевое множество D, т. е. $x[\theta]\in D$. Данная задача обобщает принцип децентрализации управления, исследованный в работах [1, 2], на случай динамической системы.

Задача 1. Пусть имеется набор подсистем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x_i^{\cdot}=f_i(t, x_i, u_i, v_i) \tag{1.1}$$

$$t\in[t_0, \theta],\quad x_i\in R^{r_i},\quad u_i\in P_i(t)\subset R^{p_i}$$

$$v_i\in Q_i(t)\subset R^{q_i},\quad i=1,\ldots, n$$

$$P_i^* \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{[t_0,\theta]} P_i(t),\qquad Q_i^* \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{[t_0,\theta]} Q_i(t)$$

где P_i^*, Q_i^* — компакты в R^{p_i} и R^{q_i} соответственно, $i=1,\ldots, n$. Функция $f_i:[t_0, \theta]\times R^{r_i}\times P_i^*\times Q_i^*\to R^{r_i}$ непрерывна на всей области определения и для всякого компакта $K\subset R^{r_i}$ и $t_1<t_2$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $\Lambda_i(K, t_1, t_2)$ на множестве $[t_1, t_2]\times K\times P_i^*\times Q_i^*$; кроме того, для любых двух чисел $t_1<t_2$ существует $a_i(t_1, t_2)$, такое, что

$$\| f_i(t, x_i, u_i, v_i)\|_{r_i}\leqslant a_i(t_1, t_2)(\| x_i\|_{r_i}+1)$$

на множестве $[t_1, t_2]\times R^{r_i}\times P_i^*\times Q_i^*$; $i=1,\ldots, n$. Здесь $P_i(t)$, $Q_i(t)$ — компактозначные полунепрерывные сверху интегрируемые по мере Лебега λ на $[t_0, \theta]$ [3] многозначные отображения из R^1 в $2^{R^{p_i}}$ и $2^{R^{q_i}}$ соответственно, $i=1,\ldots, n$. Задано также целевое множество

$$D=\Big\{x\in R^r \,\Big|\, \sum_{i=1}^n d_i(x_i)\geqslant m^\circ\Big\} \tag{1.2}$$

$$r=\sum_{i=1}^n r_i,\quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^r,\quad m^\circ\in R^\xi,\quad \xi\in N\overset{\text{def}}{=\!=}\{1, 2, \ldots\}.$$

Здесь $d_i: R^{r_i}\to R^\xi$ — непрерывная на R^{r_i} вектор-функция.

Для решения задачи 1 рассматривается вспомогательная многокритериальная дифференциальная игра.

Задача 2.

$$\dot{x} = f(t, x, u, v)$$
$$t \in [t_0, \theta],\ x \in R^l,\ u \in P(t) \subset R^p$$
$$v \in Q(t) \subset R^q$$

Функция f и многозначные отображения $P(t)$, $Q(t)$ удовлетворяют всем условиям, которым удовлетворяют f_i, $P_i(t)$, $Q_i(t)$ в задаче 1. Цель первого игрока — максимизация $d(x[\theta])$, где d — непрерывная на всей области определения вектор-функция из R^l в R^{ξ}.

Для каждой точки (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in R^l$ строится множество $M(t_*, x_*)$ таких $m \in R^{\xi}$, что из точки (t_*, x_*) как из начальной разрешима задача 2 сближения в момент θ с множеством $\{x \in R^l \mid d(x) \geqslant m\}$. Способ нахождения $M(t_*, x_*)$ описывается ниже в теоремах 2 и 3. Для решения задачи 1 необходимо для каждой i-й подсистемы поставить задачу 2, где роль целевой вектор-функции играет d_i из (1.2), и найти для нее соответствующее множество $M_i(t_*, x_*)$. Затем построить множество

$$M^*(t_*, x_*) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_*, x_{*i})$$

(см. ниже лемму 1), где $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})$.

Обозначим через $W = \{(t_*, x_*) \in R^{r+1} \mid m^0 \in M^*(t_*, x_*)\}$ множество всех позиций (t_*, x_*), из которых как из начальных разрешима задача 1 для первого игрока. Чтобы получить набор стратегий агентов первого игрока, с помощью которых решается задача 1 о сближении с множеством (1.2) из начальной позиции $(t_*, x_*) \in W$, достаточно найти набор векторов $m_i \in M_i(t_*, x_{*i}) \subset R^{\xi}$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant m^0$$

и решить n дифференциальных игр с уравнениями движения, совпадающими с уравнениями движения i-й подсистемы (1.1) и целевым множеством $\{x \in R^{r_i} \mid d^i(x) \geqslant m_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Для решения задачи 2 используется метод, идея которого выдвинута в работе [4]. Некоторые обозначения, необходимые ниже, введены в работах [4, 5], поэтому приведем лишь их словесное описание. Пусть U_v — контрстратегия первого игрока в задаче 2; $\{U_v\}$ — множество всех контрстратегий в задаче 2; $\{U_v\}_i$ — множество всех контрстратегий i-го агента в задаче 1, $i = 1, \ldots, n$; $X(\cdot) = X(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ — множество движений, порожденных контрстратегией $U_v \in \{U_v\}$ из точки $(t_*, x_*) \in R^{l+1}$ в задаче 2; $X_i(\cdot) = X_i(\cdot, t_*, x_{*i}, U_{vi})$ — множество движений, порожденных контрстратегией $U_{vi} \in \{U_v\}_i$ из точки $(t_*, x_{*i}) \in R^{r_i+1}$ в задаче 1, $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим $RA \overset{\text{def}}{=} A + \{y \in R^{\alpha} \mid y \leqslant 0\}$, где $A \subset R^{\alpha}$, $\alpha \in N$; $Ry \overset{\text{def}}{=} R\{y\}$.

Определение 1. Множество $A \subset R^{\alpha}$ называется R-множеством, если $RA = A$.

Свойства оператора R и R-множеств.

1°. $A, B \subset R^{\alpha}$, $RA + B = RA + RB = R(A + B)$. Если A является R-множеством, то $A + B = A + RB = R(A + B)$.

2°. Пусть $A_z \subset R^\alpha$, $z \in Z$ — семейство R-множеств, тогда $\bigcup_Z A_z$, $\bigcap_Z A_z$ R-множества.

3°. Пусть $A_z \subset R^\alpha$, $z \in Z$ — семейство R-множеств, тогда

$$\bigcap_Z (A_z + S_\alpha(0, a)) \subset \bigcap_Z A_z + S_\alpha(0, a\sqrt{\alpha})$$

$$S_\alpha(y, a) = \{x \in R^\alpha \mid \| x - y \|_\alpha \leqslant a\}$$

Обозначим в задаче 2

$$M(t_*, x_*) = \bigcup_{\{U_v\}} \bigcap_{X(\theta)} Rd(x)$$

и в задаче 1 соответствующие множества для i-й подсистемы

$$M_i(t_*, x_{*i}) = \bigcup_{\{U_v\}_i} \bigcap_{X_i(\theta)} Rd_i(x_i)$$

Кроме того, обозначим

$$M^*(t_*, x_*) = \bigcup_{U_{vi}} \bigcap_{X_i} R\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i)\right)$$

где объединение берется по $U_{vi} \in \{U_v\}_i$, $i = 1, \ldots, n$, а пересечение — по $x_i \in X_i(\theta, t_*, x_{*i}, U_{vi})$, $i = 1, \ldots, n$, $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})$.

Лемма 1.

$$M^*(t_*, x_*) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_{*i}, x_{*i})$$

Доказательство опирается на определение и свойства движений [6].

2. Нахождение множества гарантированных результатов в задаче 2. Ниже потребуются обозначения, введенные в работе [4]: $\{E_\lambda, [t_1, t_2]\}$ — множество программных управлений второго игрока на $[t_1, t_2]$ в задаче 2; $\{H_\lambda, [t_1, t_2]\}$ — множество допустимых программных управлений на $[t_1, t_2]$ в задаче 2; $\varphi(t)$ — программное движение: абсолютно непрерывная функция, определенная единственным образом для каждого программного управления $\eta \in \{H_\lambda, [t_1, t_2]\}$; $\{\Pi(\nu), [t_1, t_2]\}$ — программа, соответствующая программному управлению второго игрока $\nu \in \{E_\lambda, [t_1, t_2]\}$; $G(t, t_1, x_1, \nu)$ — область достижимости в момент $t \in [t_1, t_2]$ для программы $\{\Pi(\nu), [t_1, t_2]\}$, $\nu \in \{E_\lambda, [t_1, t_2]\}$ из позиции $(t_1, x_1) \in R^{l+1}$.

В работах [4, 5] все обозначения вводились для случая $P(t)$ и $Q(t)$, не зависящих от времени, однако в сделанных предположениях все необходимые свойства программных конструкций сохраняются.

Пусть $F(t, x)$ — многозначное отображение $R^{l+1} \to 2^{R^\xi}$. Обозначим $\Gamma(F)$ многозначное отображение $R^{l+1} \to 2^{R^\xi}$, для которого

$$\Gamma(F)(t_*, x_*) = \bigcap_{\tau} \bigcap_{\nu} \bigcup_{x} F(\tau, x)$$

где объединение берется по $\tau \in [t_*, \theta]$ и по $\nu \in \{E_\lambda, [t_*, \tau]\}$, а пересечение — по $x \in G(\tau, t_*, x_*, \nu)$.

Определение 2. Многозначное отображение $C(y) : R^\alpha \to 2^{R^\beta}$, $\alpha, \beta \in N$ называется равномерно непрерывным на множестве $Y \subset R^\alpha$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall y_j \in Y$, $j = 1,2$, $\| y_1 - y_2 \|_\alpha < \delta$ выполняется $C(y_j) \subset C(y_{3-j}) + S_\beta(0, \varepsilon)$, $j = 1,2$.

Ниже потребуются следующие леммы, приводимые без доказательств.

Лемма 2. Пусть $C(y)$ — многозначное отображение $R^\alpha \to 2^{R^\beta}$, непрерывное на компакте $Y \subset R^\alpha$, тогда $C(y)$ равномерно непрерывно на Y.

Лемма 3. Пусть $C(y)$ удовлетворяет условиям леммы 2, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ для всяких компактов $K_j \subset Y$, $j = 1,2$, таких, что

$$\operatorname{dist}^\alpha(K_1, K_2) < \delta, \quad \bigcup_{K_j} C(y) \subset \bigcup_{K_{3-j}} C(y) + S_\beta(0, \varepsilon), \quad j = 1, 2.$$

Здесь $\operatorname{dist}^\alpha(K_1, K_2)$ — хаусдорфово расстояние в 2^{R^α}, $\alpha \in N$.

Определение 3. Многозначное отображение $C : Y \to 2^{R^\beta}$, $Y \subset R^\alpha$ называется R-значным, если $C(y)$ есть R-множество, $y \in Y$.

Лемма 4. Пусть $F(t, x) : [t_0, \theta] \times R^l \to 2^{R^\xi}$ — непрерывное на всей области определения R-значное отображение, тогда $\Gamma(F)(t, x)$ — также непрерывное на $[t_0, \theta] \times R^l$ R-значное отображение.

Доказательство. В силу свойств функции f, $\forall (t_*, x_*) \in R^{l+1}$ $\exists \eta \in \{H_\lambda, [t_*, \theta]\}$ $\forall t \in [t_*, \theta]$ $\| \varphi(t, t_*, x_*, \eta) \|_l \leqslant \omega$ (см. [4]).

Пусть последовательность $\{(t_k, x_k)\}$ сходится к (t_*, x_*) справа, т. е. $x_k \to x_*, t_k \downarrow t_*$. Тогда

$$\forall \gamma > 0\ \exists k^1 \in N\ \forall k \geqslant k^1 \tag{2.1}$$
$$\Gamma(F)(t_k, x_k) \subset \Gamma(F)(t_*, x_*) + S_\xi(\theta, \gamma)$$

$$\forall (\gamma) > 0\ \exists k^2 \in N \quad \forall k \geqslant k^2 \tag{2.2}$$
$$\Gamma(F)(t_*, x_*) \subset \Gamma(F)(t_k, x_k) + S_\xi(0, \gamma)$$

Пусть последовательность $\{(t_k, x_k)\}$ сходится к (t_*, x_*) слева. Тогда для всякого $\gamma > 0$ найдется $k^3 \in N$, такое, что выполнено соотношение (2.1). Кроме того, для любого $\gamma > 0$ существует $k^4 \in N$, такое, что выполняется (2.2).

Из приведенных утверждений следует непрерывность многозначного отображения $\Gamma(F)$, а из свойства 2° оператора R — его R-значность. Доказательства всех утверждений похожи, приведем, например, доказательство первого из них.

По лемме 2 $F(t, x)$ равномерно непрерывно на $[t_*, \theta] \times S_l(0, \omega)$, т. е.

$$\forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall (t_j, x_j) \in S_{l+1}((t_*, x_*), \varepsilon),\ j = 1, 2 \tag{2.3}$$
$$F(t_j, x_j) \subset F(t_{3-j}, x_{3-j}) + S_\xi(0, \gamma/2\sqrt{\xi})$$

Вследствие того что функция f удовлетворяет условию Липшица на всяком компакте, для $\varepsilon > 0$ из (2.3) следует, что $\exists \delta > 0$ $\forall \tau \in [t_*, t_* + \delta]$ $\forall \nu \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$ $G(\tau, t_*, x_*, \nu) \subset S_{l+1}((t_*, x_*), \varepsilon)$. Таким образом, $\forall \gamma > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что

$$\bigcap_\nu \bigcup_x F(t_* + \delta, x) \subset \bigcup_{(t, x)} F(t, x)$$

где $\nu \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$, $x \in G(t_* + \delta, t_*, x_*, \nu)$ и $(t, x) \in S_{l+1}((t_*, x_*), \varepsilon)$.

Далее, используя свойство 3 оператора R, получим

$$\bigcup_{(t, x)} F(t, x) \subset \bigcap_\tau \bigcap_\nu \bigcup_x \left(F(\tau, x) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2\sqrt{\xi}}\right)\right) \subset$$
$$\subset \bigcap_\tau \bigcap_\nu \bigcup_x F(\tau, x) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2}\right)$$

где пересечение берется по $\tau \in [t_*, t_* + \delta]$, $\nu \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$, а объединение по $x \in G(\tau, t_*, x_*, \nu)$.

Фиксируем $\gamma > 0$. Для него выберем δ и рассмотрим $\tau \in [t_* + \delta, \theta]$. Начиная с некоторого $k_0 \in N$, $t_k \leqslant t_* + \delta \leqslant \tau$; рассмотрим $\nu^k \in \{E_\lambda, [t_k, \theta]\}$ и $\nu^* \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$, совпадающее с ν^k на $[t_k, \theta]$ [4]. Для таких ν^* и ν^k справедливо известное неравенство

$$\operatorname{dist}^l(G(\tau, t_k, x_k, \nu^k), G(\tau, t_*, x_*, \nu^*)) \leqslant (\| x_k - x_* \|_l + k\omega(t_k - t_*)) \cdot \tag{2.4}$$
$$\cdot \exp(\Lambda_\omega \cdot (\theta - t_*))$$
$$\Lambda_\omega = \Lambda(S_l(0, \omega), t_0, \theta),\ k_\omega = \max_{(t, x, u, v)} \| f(t, x, u, v) \|_l$$

максимум берется по $[t_0, \theta] \times S_l(0, \omega) \times P^* \times Q^*$.

По лемме 3 $\forall \gamma > 0$, $\exists \varepsilon > 0$, такое, что

$$\bigcup_{G_k} F(\tau, x) \subset \bigcup_{G_*} F(\tau, x) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2\sqrt{\xi}}\right) \tag{2.5}$$

если $\mathrm{dist}^l(G_k, G_*) < \varepsilon$; здесь $G_k = G(\tau, t_k, x_k, \nu^k)$, $G_* = G(\tau, t_*, x_*, \nu^*)$. Таким образом, из оценки (2.4) следует, что $\forall \gamma > 0$ $\exists k^1 \geqslant k_0$ $\forall \tau \in [t_*, t_* + \delta]$ $\forall \nu^k \in \{E_\lambda, [t_k, \theta]\}$, для всякого $\nu^* \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$, совпадающего с ν^k на $[t_k, \theta]$, выполняется соотношение (2.5). Следовательно, используя свойство 3° оператора R, $\forall \gamma > 0$ $\exists k^1 \in N$ $\forall k \geqslant k^1$

$$\Gamma(F)(t_k, x_k) = \bigcap_{[t_k, \theta]} \bigcap_{\nu^k} \bigcup_{G_k} F(\tau, x) \subset \bigcap_{[t_*+\delta, \theta]} \bigcap_{\nu^*} \bigcup_{G_*} \left(F(\tau, x) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2\sqrt{\xi}}\right)\right) \subset$$

$$\subset \bigcap_{[t_*, \theta]} \bigcap_{\nu^*} \bigcup_{G_*} F(\tau, x) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2}\right) + S_\xi\left(0, \frac{\gamma}{2}\right) = \Gamma(F) + S_\xi(0, \gamma)$$

где $\nu^k \in \{E_\lambda, [t_k, \theta]\}$, $\nu^* \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}$, что и доказывает первое утверждение.

Обозначим

$$M^{(0)}(t_*, x_*) = \bigcap_{\nu^*} \bigcup_{x} Rd(x)$$

$$\nu^* \in \{E_\lambda, [t_*, \theta]\}, \quad x \in G(\theta, t_*, x_*, \nu)$$

$$M^{(k+1)}(t_*, x_*) = \Gamma(M^{(k)})(t_*, x_*), \quad k \in N_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, \ldots\}.$$

Лемма 5. $M^{(0)}(t_*, x_*)$ — непрерывное на $[t_0, \theta] \times R^l$ и R-значное отображение.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Следствие 1. $M^{(k)}(t_*, x_*)$ является непрерывным на $[t_0, \theta] \times R^l$ и R-значным отображением, $k \in N$.

Замечание 1. $M^{(k+1)}(t_*, x_*) \subset M^{(k)}(t_*, x_*)$, $k \in N_0$.

Далее в теореме 1 доказана сходимость последовательности множеств $M^{(k)}(t, x)$ к множеству $M(t, x)$. Содержательно множество $M^{(k)}(t, x)$ состоит из всех таких m, что первый игрок может гарантированно получить выигрыш m в многокритериальной игре в случае, когда второй игрок имеет возможность в процессе движения получить информацию о фазовых координатах объекта не более чем k раз.

Теорема 1.

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(t, x) = M(t, x) \quad t \in [t_0, \theta], \quad x \in R^l$$

Доказательство. Докажем, что

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(t, x) \subset M(t, x)$$

Пусть $m \in M^{(k)}(t_*, x_*)$, $k \in N_0$. $m \in M(t_*, x_*)$ тогда и только тогда, когда $(t_*, x_*) \in W_m$, где W_m максимальный u-стабильный мост для задачи 2° с целевым множеством $D_m = \{x \in R^l \mid d(x) \geqslant m\}$ [5].

Обозначим

$$V_m^{(k)} = \{(t, x) \in R^{l+1} \mid m \in M^{(k)}(t, x)\}, \quad k \in N_0$$

$$V_m = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_m^{(k)}$$

Множество $V_m^{(k)}$ обрывается в момент θ на D_m, т. е. $V_m^{(k)} \cap \{(t, x) \in R^{l+1} \mid t = \theta\} = D_m$, $k \in N_0$ и, следовательно, V_m обрывается в момент θ на D_m.

Таким образом, остается показать u-стабильность множества V_m [6]. Для этого покажем, что для всякой позиции из V_m и всякого программного управления второго игрока найдется программа, удерживающая движение на множестве V_m. Пусть $(t_*, x_*) \in V_m$, $t^* \in [t_*, \theta]$, $\nu^* \in \{E_\lambda, [t_*, t^*]\}$.

Тогда

$$m \in M^{(k+1)}(t_*, x_*) \subset \bigcup_{G(t^*,\, t_*,\, x_*,\, \nu^*)} M^{(k)}(t^*, x), \quad k \in N_0$$

Следовательно, существует $x^* \in G(t^*, t_*, x_*, \nu^*)$, такое, что $m \in \in M^{(k)}(t^*, x^*)$, и, таким образом, существует $\eta^k \in \{\Pi(\nu^*), [t_*, t^*]\}$: $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^k)) \in V_m{}^{(k)}$, $k \in N_0$.

Из последовательности $\{\eta^k\} \subset \{\Pi(\nu^*), [t_*, t^*]\}$ выделим $*$-слабо сходящуюся к некоторому $\eta^* \in \{\Pi(\nu^*), [t_*, t^*]\}$ подпоследовательность. Соответствующая подпоследовательность $\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta^{k_j})\}$ сходится равномерно к $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta^*)$ [5, 6]; тогда $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^{k_j}) \to \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*)$ при $j \to \infty$. В силу непрерывности $M^{(k)}(t, x)$, $V_m{}^{(k)}$ — замкнутое множество, причем из замечания 1 следует, что

$$V_m^{(k_j+1)} \subset V_m^{(k_j)}, \ \forall j \in N \varphi(t^*, t_* x_* \eta^{k_j}) \in V_m^{(k_j)}$$

откуда $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*) \in V_m$, а это и означает u-стабильность множества V_m.

Аналогично [4] доказывается, что

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(t, x) \supset M(t, x)$$

3. Линейный случай задачи 2. Рассматривается линейная многокритериальная игра, т. е. в задаче 2

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v + g(t)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, непрерывно зависящие от t на $[t_0, \theta]$, $g(t)$ — непрерывная вектор-функция; $d(x) = Lx$, где L — матрица размерности $\xi \times l$. Поскольку можно провести стандартную процедуру преобразования линейной задачи (см., например, [6]), то без ограничения общности будем считать, что задача 2 в линейном случае выглядит следующим образом.

Задача 3.

$$\dot{x} = u + v + g(t); \ u \in P(t) \subset R^l, \ v \in Q(t) \in R^l$$

Функция $f(t, x, u, v) = u + v + g(t)$ и многозначные отображения $P(t)$ и $Q(t)$ удовлетворяют всем условиям задачи 2. Целевая функция Lx не изменится при преобразовании. |

В дальнейшем понадобится теоретико-множественная операция геометрической разности

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_B (A + B), \ A, \ B \subset R^\alpha, \ \alpha \in N$$

введенная в работах [7, 8]. Приведем некоторые ее свойства.

1°. $(A + h) \overset{*}{-} B = A \overset{*}{-} (B + h) = A \overset{*}{-} B + h$, где $h \subset R^\alpha$, $\alpha \in N$

2° Пусть $\psi > 0$, тогда $(\psi A) \overset{*}{-} (\psi B) = \psi (A \overset{*}{-} B)$

3°. $(A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} C = A \overset{*}{-} (B + C)$

4°. $(A \overset{*}{-} B) + C \subset (A + C) \overset{*}{-} B$

5°. $A \overset{*}{-} C \subset B \overset{*}{-} C$, если $A \subset B$

6°. $A \overset{*}{-} B$ выпукло, если A выпукло

7°. Пусть A, B, C — выпуклые множества из R^α, $\psi \geqslant 0$, $\chi \geqslant 0$. Тогда $[(C + \psi A) \overset{*}{-} \psi B + \chi A] \overset{*}{-} \chi B = [C + (\psi + \chi) A] \overset{*}{-} (\psi + \chi) B$.

Для задачи 3, используя свойство 1° оператора R, найдем

$$M^{(0)}(t_*, x_*) = \bigcap_y RL\Big(x_* + \int\limits_{[t_*, \theta]} P(t)\,d\lambda + y + \int\limits_{[t_*, \theta]} g(t)\,d\lambda\Big) =$$

$$= \Big(RL \int\limits_{[t_*, \theta]} P(t)\,d\lambda\Big) \overset{*}{-} \Big(L \int\limits_{[t_*, \theta]} Q(t)\,d\lambda\Big) + L \int\limits_{[t_*, \theta]} g(t)\,d\lambda + Lx_*$$

(пересечение берется по $y \in \int\limits_{[t_*\theta]} Q(t)\,d\lambda$).

Лемма 6. Для задачи 3

$$M^{(k)}(t_*, x_*) = M^{(k)}(t_*, 0) + Lx_*, \; k \in N_0$$

Следствие 2.

$$M(t_*, x_*) = M(t_*, 0) + Lx_*$$

Обозначим $M_*^{(k)}(t_*, \theta) = M^{(k)}(t_*, 0)$

Замечание 2. Для задачи 3

$$\Gamma(M^{(k)})(t_*, x_*) = \bigcap_{[t_*, \theta]} \Big[\Big(M_*^{(k)}(\tau, \theta) + L \int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\,d\lambda\Big) \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} L \int\limits_{[t_*, \tau]} Q(t)\,d\lambda + L \int\limits_{[t_*, \tau]} g(t)\,d\lambda\Big] + Lx_*$$

Теорема 2. Пусть в задаче 3 $P(t) = \mu(t)P + p(t)$ и $Q(t) = \mu(t)Q + q(t)$, где P, Q — компакты в $R^l \mu$: $[t_0, \theta] \to R^1$, $\mu(t) > 0$, $p(t)$, $q(t)$ — интегрируемые вектор-функции из $[t_0, \theta]$ в R^l. Тогда

$$M(t_*, x_*) = M^{(0)}(t_*, x_*) = \int\limits_{[t_*, \theta]} \mu(t)\,d\lambda \cdot (RL \operatorname{conv} P \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} L \operatorname{conv} Q) + L \int\limits_{[t_*, \theta]} (p(t) + q(t) + g(t))\,d\lambda + Lx_*$$

Доказательство. Опираясь на замечание 2, свойство 1° оператора R и свойства 1°, 4° геометрической разности, получим

$$M_*^{(1)}(t_*, \theta) = \Gamma(M^{(0)})(t_*, 0) =$$

$$= \bigcap_{[t_*, \theta]} \Big[(M_*^{(0)}(\tau, \theta) + L \int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\,d\lambda) \overset{*}{-} L \int\limits_{[t_*, \tau]} Q(t) + L \int\limits_{[t_*, \tau]} g(t)\,d\lambda\Big] \supset$$

$$\supset \bigcap_{[t_*, \theta]} \Big[M_*^{(0)}(\tau, \theta) + \Big(RL \int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\,d\lambda \overset{*}{-} \int\limits_{[t_*, \tau]} Q(t)\,d\lambda\Big) +$$

$$+ L \int\limits_{[t_*, \tau]} g(t)\,d\lambda\Big] = \bigcap_{[t_*, \theta]} (M_*^{(0)}(\tau, \theta) + M_*^{(0)}(t_*, \tau))$$

Таким образом, согласно замечанию 1, из соотношения

$$(3.1) \qquad M_*^{(0)}(t_*, \tau) + M_*^{(0)}(\tau, \theta) \supset M_*^{(0)}(t_*, \theta), \quad t_* \in [t_0, \theta], \quad \tau \in [t_*, \theta]$$

следует, что $M_*^{(1)}(t_*, \theta) = M_*^{(0)}(t_*, \theta)$, $t_* \in [t_0, \theta]$. Последнее означает, что

$$M^{(k)}(t, x) = M^{(0)}(t, x), \quad t \in [t_0, \theta], \; x \in R^l, \; k \in N$$

а так как выполнены все условия теоремы 1, то $M(t, x) = M^{(0)}(t, x)$.

Проверим справедливость (3.1), пусть $t_0 < t_1 < t_2 < \theta$. Опираясь на свойства интеграла от многозначного отображения [3, 9] и свойства 1°,

2° из п. 3, получим

$$M_*^{(0)}(t_1, t_2) = RL\Big(\int\limits_{[t_1, t_2]} \mu(t)\,d\lambda\cdot \mathrm{conv}\, P + \int\limits_{[t_1, t_2]} p(t)\,d\lambda\Big) \overset{*}{-} \tag{3.2}$$

$$\overset{*}{-} L\Big(\int\limits_{[t_1, t_2]} \mu(t)\,d\lambda\cdot \mathrm{conv}\, Q + \int\limits_{[t_1, t_2]} q(t)\,d\lambda\Big) + L\int\limits_{[t_1, t_2]} g(t)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_{[t_1, t_2]} \mu(t)\,d\lambda\cdot(RL\,\mathrm{conv}\, P \overset{*}{-} L\,\mathrm{conv}\, Q) +$$

$$+ L\int\limits_{[t_1, t_2]} (p(t) + q(t) + g(t))\,d\lambda$$

По свойству 5° геометрической разности RL conv $P \overset{*}{-} L$ conv Q выпукло, следовательно, (3.1) справедливо. Положив в (3.2) $t_1 = t_*$, $t_2 = \theta$, завершаем доказательство теоремы.

Введем обозначения

$$M_\tau^{(0)}(t_*) = M_*^{(0)}(t_*, \theta)$$

$$M_\tau^{(k+1)}(t_*) = (M_*^{(k)}(\tau, \theta) + L\int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\,d\lambda) \overset{*}{-} L\int\limits_{[t_1, \tau]} Q(t)\,d\lambda,\ k \in N_0$$

Тогда для задачи 3

$$M_*^{(k)}(t_*, \theta) = \bigcap_{[t_*, \theta]} M_\tau^{(k)}(t_*)$$

Теорема 3. Пусть задана последовательность $\{T_k\}\ \theta = T_0 > T_1 > \ldots > T_k > \ldots$, такая, что $P(t) = \mu(t)P^k + p(t)$, $Q(t) = \mu(t)Q^{(k)} + q(t)$, $t \in [T_k, T_{k-1}]$, где P^k, Q^k — компакты в R^l, $k \in N$, $p(t)$, $q(t)$, $\mu(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда

$$M(t_*, x_*) = M^{(k)}(t_*, x_*) = M_{T_k}^{(k)}(t_*) + L\int\limits_{[t_*, \theta]} g(t)\,d\lambda + Lx_*$$

$$t_* \in [T_{k+1}, T_k],\quad k \in N_0$$

Доказательство. Для упрощения выкладок доказательство проводится только в случае

$$g(t) = p(t) = q(t) = 0,\ \mu(t) = 1,\ t \in [t_0, \theta]] \tag{3.3}$$

Согласно лемме 6 и следствию 2, достаточно доказать, что

$$\begin{gathered} M(t_*, 0) = M_*^{(k)}(t_*, \theta) = M_{T_k}^{(k)}(t_*) \\ t_* \in [T_{k+1}, T_k],\ k \in N_0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Доказательство проводится по индукции; при $k = 0$ справедливость (3.4) показана в теореме 2. Для $k = 1$ доказательство аналогично доказательству индукционного шага. Пусть (3.4) верно для всех $k' = 0, 1, \ldots, k$. Пусть $t_* \in [T_{k+2}, T_{k+1}]$, докажем

$$M_\tau^{(k+1)}(t_*) \supset M_{T_{k+1}}^{(k+1)}(t_*),\quad \tau \in [t_*, \theta] \tag{3.5}$$

Пусть $T_{k+1} < \tau < T_k$, опираясь на предположение индукции, свойства интеграла от многозначного отображения и свойства 3°, 4°, 6°, 7° геометрической разности, получим

$$M_\tau^{(k+1)}(t_*) = \Big(M_*^{(k)}(\tau, \theta) + L\int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\,d\lambda\Big) \overset{*}{-} L\int\limits_{[t_*, \tau]} Q(t)\,d\lambda \supset$$

$$\supset \Big\{[(M_*^{(k-1)}(T_k, \theta) + (T_k - \tau)\,L\,\mathrm{conv}\, P^k) \overset{*}{-} (T_k - \tau)\,L\,\mathrm{conv}\, Q^k +$$

$$+ (\tau - T_{k+1})\,L\,\mathrm{conv}\, P^k] \overset{*}{-} (\tau - T_{k+1})\,L\,\mathrm{conv}\, Q^k + L\int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} P(t)\,d\lambda\Big\} \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} L\int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} Q(t)\,d\lambda = [(M_*^{(k-1)}(T_k, \theta) + (T_k - T_{k+1})\,L\,\mathrm{conv}\, P^k) \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} (T_k - T_{k+1}) L \operatorname{conv} Q^k + L \int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} P(t)\, d\lambda \Big] \overset{*}{-} L \int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} Q(t)\, d\lambda =$$

$$= \Big(M_*^{(k)} (T_{k+1}, \theta) + L \int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} P(t)\, d\lambda \Big) \overset{*}{-} L \int\limits_{[t_*, T_{k+1}]} Q(t)\, d\lambda = M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (t_*)$$

Похожим образом доказывается справедливость (3.5) в случае $t_* \leqslant \tau \leqslant T_{k+1}$ и $T_k < \tau \leqslant \theta$.

Следовательно,

$$M_*^{(k+1)} (t_*, \theta) = M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (t_*) \tag{3.6}$$

Докажем, что

$$M_*^{(k+2)} (t_*, \theta) \supset M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (t_*) \tag{3.7}$$

Для этого достаточно проверить вложение

$$M_\tau^{(k+2)} (t_*, \theta) \supset M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (t_*)$$

Пусть $t_* \leqslant \tau \leqslant T_{k+1}$. Опираясь на свойства интеграла от многозначного отображения и свойство 7° геометрической разности, получим

$$M_\tau^{(k+2)} (t_*) = \Big(M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (\tau) + L \int\limits_{[t_*, \tau]} P(t)\, d\lambda \Big) \overset{*}{-} L \int\limits_{[t_*, \tau]} Q(t)\, d\lambda =$$

$$= [(M_*^{(k)} (T_{k+1}, \theta) + (T_{k+1} - \tau) L \operatorname{conv} P^{k+1}) \overset{*}{-} (T_{k+1} - \tau) L \operatorname{conv} Q^k +$$

$$+ (\tau - t_*) L \operatorname{conv} P^{k+1}] \overset{*}{-} (\tau - t_*) L \operatorname{conv} Q^{k+1} = M_{T_{k+1}}^{(k+1)} (t_*)$$

При $T_{k+1} < \tau \leqslant \theta$ справедливость (3.7) проверяется аналогично. Таким образом, $M(t_*, 0) = M_*^{(k+1)} (t_*, \theta)$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3. Лемма 1 и теоремы 2, 3 дают также решение задачи 1 с критерием — максимизация в момент θ функции

$$\min_{j=1, \ldots, \xi} (h_j (< l_j, x >))$$

где $l_j \in R^r$, $h_j : R^1 \to R^1$ — монотонно возрастающая функция, $j = 1, \ldots, \xi$

Замечание 4. Пусть в задаче 1 с целевым множеством $\{x \in R^r \mid Lx \geqslant m^\circ\}$, f_i, $P_i(t)$, $Q_i(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, $i = 1, \ldots, n$, и пусть для простоты выполнены соотношения (3.3). Тогда по лемме 1

$$M^* (t_*, x_*) = (\theta - t_*) \sum_{i=1}^{n} (RL_i \operatorname{conv} P_i \overset{*}{-} L_i \operatorname{conv} Q_i) + Lx_*$$

Если же в задаче 1 управление осуществляется из единого центра, то решение такой дифференциальной игры в терминах множества $M(t, x)$ также получается с помощью теоремы 2. В этом случае

$$M^{**} (t_*, x_*) = (\theta - t_*) \Big(RL \operatorname{conv} \prod_{i=1}^{n} P_i \overset{*}{-} L \operatorname{conv} \prod_{i=1}^{n} Q_i \Big) + Lx_* =$$

$$= (\theta - t_*) \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} RL_i \operatorname{conv} P_i \Big) \overset{*}{-} \Big(\sum_{i=1}^{n} L_i \operatorname{conv} Q_i \Big) \Big) + Lx_*$$

Следовательно, вообще говоря,

$$M^{**} (t_*, x_*) \supset M^* (t_*, x_*), \ t_* \in [t_0, \theta], \ x_* \in R^r$$

согласно свойствам 2°, 4° геометрической разности. Однако в случае $P_i = \psi_i P$, $Q_i = \psi_i Q$, $\psi_i \in R^1$, $i = 1, \ldots, n$, например, $M^{**} = M^*$, т. е. децентрализованное управление системой в этом случае не хуже централизованного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marschak J., Radner R.* Economic Theory of Teams. New Heven, Yale Univ. Press, 1971. 345 p.
2. *Witsenhausen H. S.* Separation of Estimation and Control for Discrate Time Systems.— Proc. of IEEE, 1971, v. 59, N 11, p. 1557—1566.

3. *Благодатских В. И.* Теория дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1979. 88 с.
4. *Ченцов А. Г.* Об игровой залаче сближения в заданный момент времени.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 394—420.
5. *Субботин А. И.*, *Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6, с. 1278—1280.
8. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. II.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
9. *Иоффе А. Д.*, *Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Поступила в редакцию
5.X.1981

Москва