Прикладная математика и механика. Том 47, вып. 1, 1983

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Трошин В. Г.

Предлагается способ линеаризации геометрически нелинейных уравнений технической теории оболочек [1]. Исходная нелинейная задача сводится к последовательности линейных задач для оболочки, имеющей дополнительные параметры изгибной жесткости, кривизны и кручения, которые определяются в процессе последовательных приближений. Для построения кривой деформирования весь процесс нагружения разбивается на ряд этапов, на каждом из которых решение ищется на гиперплоскости, перпендикулярной прямой, проходящей через точки, соответствующие двум предыдущим этапам. Алгоритм позволяет строить кривые деформирования как при однопараметрическом, так и при многопараметрическом нагружениях.

Существующие методы решения соответствующих нелинейных задач в зависимости от уровня, на котором проводится линеаризация, могут быть разделены на три основные группы: 1) линеаризация системы алгебраических (см., например [2]) и 2) обыкновенных дифференциальных [3] уравнений, к которым сведена исходная двумерная задача; 3) линеаризация системы разрешающих уравнений в частных производных. В ряде случаев более предпочтителен третий подход, где линеаризация исходных уравнений не связана с конкретным методом решения краевой задачи. Известно два основных метода, реализующих в общем виде данный подход: простой итерации и последовательных нагружений [4]. В первом случае нелинейные члены переносятся в правую часть уравнений и трактуются как дополнительная нагрузка, определяемая итерационным путем. Во втором — весь процесс нагружения разбивается на ряд этапов, на каждом из которых приращения разрешающих функций удовлетворяют линейной системе уравнений, коэффициентами которой являются значения самих функций, накопленные за все предыдущие этапы нагружения. Однако применимость метода простой итерации ограничена его плохой сходимостью, которая нарушается при прогибах порядка толщины, а метода последовательных нагружений — накоплением погрешности линеаризации в процессе нагружения.

Ниже предлагается метод линеаризации системы разрешающих уравнений технической теории оболочек, свободной от указанных недостатков.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h из однородного изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν, находящуюся под действием произвольной системы сил с компонентами X_1, X_2, X_3 в криволинейной системе координат $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ (α_1, α_2 — направления главных кривизн; α_3 — нормаль к срединной поверхности). В рамках технической теории система разрешающих уравнений в смешанной форме, описывающая упругое равновесие оболочки, может быть приведена к виду [5]

$$\begin{gathered}
D\Delta\Delta w + \Delta_k \Phi + L(w, \Phi) = p_1 \\
H\Delta\Delta\Phi - \Delta_k w - {}^1/_2\, L(w, w) = p_2 \qquad (1)\\
\Delta w = R_{11}(w) + R_{22}(w); \quad \Delta_k w = k_2 R_{11}(w) + k_1 R_{22}(w) \\
L(w, \Phi) = R_{11}(w) R_{22}(\Phi) + R_{22}(w) R_{11}(\Phi) - 2R_{12}(w) R_{12}(\Phi) \\
R_{11}(w) = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \omega}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} \\
R_{22}(w) = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} \\
R_{12}(w) = \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial \omega}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial \omega}{\partial\alpha_2}\right) \\
p_1 = X_3 + (k_1 + k_2) U, \quad p_2 = (1 - \nu) H\Delta U
\end{gathered}$$

Здесь w, Φ — прогиб и функции напряжений; D, H — изгибная жесткость и гибкость на растяжение; A_1, A_2 — коэффициенты Ляме; U — потенциал компонент касательной нагрузки X_1, X_2; k_1, k_2 — главные кривизны.

Нелинейность системы (1) обусловлена наличием операторов L. Представим нелинейный оператор в первом уравнении (1) в виде (S — некоторая постоянная)

$$L(w, \Phi) = SL(\Phi, w) + (1 - S)\, L(w, \Phi)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_1 = {}^1/_2 w, \quad \varphi_2 = (1 - S)\, w, \quad \varphi_3 = S\Phi \tag{2}$$

Система (1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &D\Delta\Delta w + L(\varphi_3, w) + \Delta_k\Phi + L(\varphi_2, \Phi) = p_1 \\ &H\Delta\Delta\Phi - \Delta_k w - L(\varphi_1, w) = p_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Величины φ_i в (3) будем определять в процессе последовательных приближений: принимаем некоторое начальное приближение $w^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ и из (2) определяем $\varphi_i^{(0)}$, соответствующие этому нриближению. Решая систему (3) для заданных $\varphi_i^{(0)}$, находим следующее приближение $w^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ и т. д. Процесс продолжаем до тех пор, пока разность между последующим и предыдущим приближениями не будет соответствовать заданной точности решения. Таким образом, на каждом шаге итерации следует решать линейную систему вида (3) с заданными параметрами φ_i.

Перепишем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &L_1[w, \Phi] \equiv D\Delta\Delta w + L(\varphi_3, w) + \Delta_2\Phi = p_1 \\ &L_2[w, \Phi] \equiv H\Delta\Delta\Phi - \Delta_1 w = p_2 \\ &\Delta_i w = [k_2 + R_{22}(\varphi_i)]\, R_{11}(w) + [k_1 + R_{11}(\varphi_i)]\, R_{22}(w) - \\ &-2R_{12}(\varphi_i)\, R_{12}(w); \quad i = 1,\ 2 \end{aligned} \tag{4}$$

Величина φ_3 в системе (4) представляет собой дополнительную изгибную жесткость оболочки, а в операторы Δ_i входят дополнительные параметры кривизны $R_{jj}(\varphi_i)$ и кручения $R_{12}(\varphi_i)$ срединной поверхности. Следовательно, исходная нелинейная система (1) заменяется последовательностью линейных систем вида (4) с дополнительными параметрами жесткости, кривизны и кручения, определяемыми итерационным путем. Коэффициент S характеризует вклад, который вносит дополнительная изгибная жесткость в общий уровень нелинейности системы (1). При $S = 0$ в (4) дополнительными параметрами являются только кривизна и кручение срединной поверхности оболочки, зависящие от w, т. е. изгибная жесткость в итерационном процессе не участвует. При $S = 0{,}5$ дополнительные параметры кривизны и кручения в обоих уравнениях системы (4) одинаковы ($\Delta_1 = \Delta_2$), а дополнительная изгибная жесткость определяется соотношением $\varphi_3 = 0{,}5\ \Phi$.

Для построения кривой деформирования алгоритм должен предусматривать смену ведущего параметра, т. е. заданной может быть не внешняя нагрузка, а какой-либо иной параметр напряженно-деформированного состояния оболочки. Представим внешнюю нагрузку в виде

$$p_i = Qq_i(\alpha_1, \alpha_2); \quad i = 1,\ 2 \tag{5}$$

где q_i — заданные функции, Q — неизвестная постоянная.

Так как система (4) линейна, то в силу принципа суперпозиции ее решение представимо в виде

$$w = Qw_0; \quad \Phi = Q\Phi_0; \quad L_i [w_0, \Phi_0] = q_i; \quad i = 1, 2 \tag{6}$$

Из соотношений (6) может быть найдена неизвестная константа Q, соответствующая заданному значению какого-либо ведущего параметра. Пусть решение линейной системы дифференциальных уравнений (4) определяется через $N + 1$ независимую переменную z_j, где N переменных зависят от способа дискретизации задачи (для методов Бубнова — Галеркина, Релея — Ритца, коллокаций это будут коэффициенты соответствующего функционального ряда; для метода конечных разностей — значения разрешающих функций в узлах сетки и т. д.), а $(N + 1)$-я независимая переменная — параметр нагрузки ($z_{N+1} = Q$). В этом случае система дифференциальных уравнений (4) заменяется алгебраическим аналогом — системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j + Q b_i = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{7}$$

Соотношения (6) принимают вид

$$z_j = Q\xi_j; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \xi_j + b_i = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

При построении кривой деформирования в $(N + 1)$-мерном пространстве Z переменных z_j весь процесс нагружения разбивается на ряд этапов, на каждом из которых в качестве ведущего параметра может быть принята одна из переменных z_j либо их комбинация [6].

Предположим, что решение найдено для двух этапов нагружения z_{1j} и z_{2j}. Этим решениям соответствуют две точки в пространстве Z, через которые проведем прямую, параметр λ которой примем в качестве ведущего на следующем этапе нагружения. Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид

$$z_j = z_{1j} + \lambda (z_{2j} - z_{1j}); \quad j = 1, 2, \ldots, N + 1 \tag{9}$$

Зафиксируем λ и через точку, соответствующую этому параметру, проведем гиперплоскость, перпендикулярную прямой (9). Уравнение этой плоскости имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N+1} (z_{2j} - z_{1j}) [z_j - z_{1j} - \lambda (z_{2j} - z_{1j})] = 0 \tag{10}$$

Решение системы (7) будем искать на гиперплоскости (10). Подставляя (8) в (10), получаем уравнение для определения параметра нагрузки

$$Q = \sum_{j=1}^{N+1} (z_{2j} - z_{1j}) [z_{1j} + \lambda (z_{2j} - z_{1j})] \Big[\sum_{j=1}^{N+1} (z_{2j} - z_{1j}) \xi_j \Big]^{-1}, \quad \xi_{N+1} = 1 \tag{11}$$

Соотношения (11) и (8) определяют решение системы (7) на каждом шаге итерации. Такой выбор ведущего параметра позволяет алгоритму проходить все предельные точки и точки возврата на кривой деформирования. На скорость сходимости итерационного процесса существенное влияние оказывает выбор начального приближения. Следуя [2], это приближение можно строить путем экстраполяции решений с предыдущих этапов нагружения. Для этого строится интерполяционный полином, а в качестве начального приближения выбирается точка пересечения кривой, соответствующей этому полиному, с гиперплоскостью (10). Очевидно, что чем выше степень аппроксимирующего полинома, тем лучше кривая соответствует истинной кривой деформирования и тем выше скорость сходимости итерационного процесса. В простейшем случае этот полином может быть первой степени, т. е. в качестве начального приближения выбирается точка, лежащая на прямой (9) и соответствующая значению ведущего параметра λ.

На первом этапе нагружения в качестве z_{1j} и z_{2j} может быть выбрано решение линейной задачи (система (3) при $\varphi_i = 0$) и тривиальное решение $z_{2j} = 0$. Численное значение параметра λ может выбираться в зависимости от скорости сходимости итерационного процесса на предыдущем этапе нагружения. Значение $\lambda = 0$ соответствует точке z_{1j} на прямой (9), а $\lambda = 1$ — точке z_{2j}. Следовательно, на последующем этапе нагружения следует брать $\lambda > 1$. При $\lambda = 2$ решение будет отыскиваться на гиперплоскости, находящейся на том же расстоянии d от точки z_{2j}, что и точка z_{1j} ($d = | z_{2j} - z_{1j} |$). Зафиксируем некоторое число итераций r_0. Если на предыдущем этапе нагружения число итераций, которое потребовалось для получения решения с заданной точностью ε, составляет $r_1 < r_0$, то на последующем этапе следует взять $\lambda > 2$, т. е. отыскивать решение на гиперплоскости, отстоящей от z_{2j} на расстояние $d > | z_{2j} - z_{1j} |$. В противном случае $1 < \lambda < 2$ ($d < | z_{2j} - z_{1j} |$). Зависимость λ от r_0 и r_1 может быть принята, например, в виде

$$\lambda = 2 + \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1}$$

При этом параметр λ изменяется в пределах $1 < \lambda < 3$, т. е. максимальное расстояние d от точки z_{2j} до гиперплоскости (10) не превышает $2 | z_{2j} - z_{1j} |$. На первом этапе нагружения расстояние между начальными точками (линейное и тривиальное решения) следует выбирать таким образом, чтобы влияние геометрической нелинейности было заведомо незначительным (например, при максимальном прогибе порядка $0{,}2h$).

Сходимость алгоритма на r-м шаге итерации может контролироваться с помощью величины

$$\sum_{j=1}^{N+1} \left| \frac{z_j^{(r)} - z_j^{(r-1)}}{z_j^{(r-1)}} \right| < \varepsilon$$

Для исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрена задача о равновесии пологой над планом оболочки, для которой можно считать, что метрика срединной поверхности совпадает с метрикой плоскости

$$\alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = y, \quad A_1 = A_2 = 1$$

В качестве примера рассматривалась прямоугольная в плане $a \times b$ сферическая панель, края которой опираются шарнирно-подвижно, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки p_0 ($p_1 = p_0$; $p_2 = 0$). Решение линейной системы (4) строилось в двойных тригонометрических рядах:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \tag{12}$$

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

Подставляя (12) в (4) и применяя процедуру Бубнова — Галеркина, приходим к линейной системе алгебраических уравнений вида (7). Так как функция напряжений во втором уравнении системы (4) входит в дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, то в (7) без труда могут быть исключены величины Φ_{nm}. Следовательно, в качестве независимых переменных z_j могут быть приняты лишь коэффициенты w_{nm} разложения в ряд Фурье прогиба. Вычисления выполнялись для

$$b = a;\ k_1 = k_2 = 18h/a^2;\ \nu = 0{,}3$$

В рядах (12) удерживалось 9 членов (n, m = 1, 3, 5). Дальнейшее увеличение n и m не приводило к заметному изменению результатов. Начальное расстояние между точками z_{1j} и z_{2j} выбиралось таким образом, чтобы прогиб в центре панели составлял 0,2h, а фиксированное число итераций принималось $r_0 = 5$. Исследовалось влияние коэффициента S в (2) на скорость сходимости итерационного процесса.

Результаты вычислений приведены в таблице: в первом столбце даны значения прогиба в центре панели, во втором — соответствующие значения параметра нагрузки, в последующих — число итераций, которое потребовалось для построения решения с точностью $\varepsilon = 1\%$ при разных значениях коэффициента S. Из таблицы видно, что на начальном участке кривой деформирования скорость сходимости для всех S практически одинакова, но несколько лучшая при $S = 1$. Однако в дальнейшем она оказывается более быстрой при $S = 0$, при прогибе $w > 3h$ для $S = 1$ сходимость процесса нарушается.

$\frac{w}{h}$	$\frac{p_0 a^4}{Eh^4}$	$S=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,4	88	6	5	5	5	4	4
1,2	151	7	6	5	4	5	6
2,0	127	4	5	5	6	7	12
2,8	98	4	4	4	5	10	64
3,6	76	3	3	4	6	11	—
4,4	67	3	3	4	5	12	—
5,2	91	3	4	4	5	9	—
6,0	140	4	5	7	7	22	—

Таким образом, оптимальное значение S (с точки зрения скорости сходимости итерационного процесса) может быть различным на разных участках кривой деформирования и зависеть от конкретных особенностей рассматриваемой задачи. Предсказать оптимальное значение этого параметра затруднительно, но можно сформулировать некоторые общие рекомендации по его выбору. С физической точки зрения величина $S\cdot100\%$ означает вклад дополнительной изгибной жесткости в общий уровень нелинейности (или $(1 - S)\cdot100\%$ — доля дополнительных параметров кривизны и кручения).

Рассмотренный пример показывает, что при малых прогибах основной вклад вносит дополнительная изгибная жесткость, в окрестности первой предельной точки доля дополнительной жесткости и кривизны примерно одинакова, а в дальнейшем основную роль играют дополнительные параметры кривизны и кручения. В общем случае для S целесообразно выбирать: $S = 1$ на докритической ветви; $S = 0{,}5$ в окрестности первой предельной точки; $S = 0$ в закритической стадии деформирования. Такой выбор S может и не быть оптимальным, но должен, по всей видимости, обеспечивать достаточно быструю скорость сходимости итерационного процесса.

Исходная система дифференциальных уравнений (4) линейна, поэтому построенный алгоритм может быть распространен на случай многопараметрического нагружения. Пусть к оболочке приложена система M сил, которым соответствуют грузовые члены p_{ik} в правой части уравнений (1). Представим эти величины в виде

$$p_{ik} = Q_k q_{ik} (\alpha_1, \alpha_2); \quad i = 1, 2; \; k = 1, 2, \ldots, M \tag{13}$$

где q_{ik} — заданные функции; Q_k — неизвестные постоянные.

В силу линейности системы (4) ее решение представимо в виде

$$w = \sum_{k=1}^{M} Q_k w_k; \quad \Phi = \sum_{k=1}^{M} Q_k \Phi_k \tag{14}$$

$$L_i [w_k, \Phi_k] = q_{ik}; \; i = 1, 2; \; k = 1, 2, \ldots, M$$

В M-мерном пространстве переменных Q_k кривая, описывающая программу нагружения, может быть произвольной. Пусть уравнение этой кривой в параметрической форме

$$Q_k = F_k (t); \quad k = 1, 2, \ldots, M \tag{15}$$

где t — параметр кривой (например, длина дуги).

Кривую деформирования будем строить в $(N + 1)$-мерном пространстве Z переменных z_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ и параметра t $(z_{N+1} = t)$ кривой (15). Алгебраический аналог системы (4) в этом случае

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j + \sum_{k=1}^{M} F_k(t)\, b_{ik} = 0; \; i = 1, 2, \ldots, N$$

Соотношение (14) в переменных z_j запишется в виде

$$z_j = \sum_{k=1}^{M} F_k(t)\, \xi_{jk}; \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \xi_{jk} + b_{ik} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, N; \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Подставляя (16) в уравнение гиперплоскости (10), на которой отыскивается решение, получаем

$$\sum_{j=1}^{N+1} (z_{2j} - z_{1j}) \Big[\sum_{k=1}^{M} F_k(t)\, \xi_{jk} - z_{1j} - \lambda (z_{2j} - z_{1j})\Big] = 0 \tag{17}$$

$$\xi_{N+1,\, k} = 1; \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Соотношение (17) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно неизвестного параметра нагрузки t, решение которого может быть получено, например, методом прямого поиска. При этом в качестве начального значения t_0 следует брать

$$t_0 = t_1 + \lambda (t_2 - t_1) \tag{18}$$

которое соответствует точке, лежащей на прямой (9) для заданного ведущего параметра $1 < \lambda < 3$. Строя процедуру метода прямого поиска уравнения (17) с начальным значением (18) в двух противоположных направлениях, отыскиваем ближайший к t_0 корень t. Подставляя найденное t в (16), находим все остальные компоненты решения z_j. Таким образом, при многопараметрическом нагружении оболочки по произвольной программе (15) весь алгоритм остается без изменения, только параметр нагрузки определяется не из соотношения (11) (как для однопараметрического нагружения), а численно из нелинейного уравнения вида (17).

Рассмотренный алгоритм позволяет построить кривую деформирования в $(N + 1)$-мерном пространстве Z переменных z_j и параметра нагрузки t. Для локализации точек ветвления общего вида (не только предельных) на каждом этапе нагружения следует ставить бифуркационную задачу к исходному нелинейному уравнению (1). Линеаризованная система уравнений для возмущенного состояния может быть записана в виде

$$D\Delta\Delta w + L(\Phi^*, w) + \Delta_k\Phi + L(w^*, \Phi) = 0 \tag{19}$$
$$H\Delta\Delta\Phi - \Delta_k w - L(w^*, w) = 0$$

где w^*, Φ^* — решение исходной нелинейной системы (1).

Коэффициенты системы (19) с точностью до постоянного множителя совпадают с коэффициентами (2) линеаризованной системы (3). Следовательно, построение алгебраического аналога системы (19) не вызывает особого труда, так как элементы его матрицы a_{ij}^* с точностью до постоянного множителя совпадают с элементами a_{ij} матрицы системы (7). Обращение в нуль определителя $\det(a_{ij}^*)$ означает наличие нетривиального решения системы (19). Таким образом, при построении кривой деформирования на каждом этапе нагружения следует следить за знаком определителя $\det(a_{ij}^*)$, смена которого свидетельствует о наличии точки бифуркации на кривой деформирования. Для построения решения на вторичной ветви следует в начальном приближении ввести возмущение по заведомо тривиальным компонентам z_j, т. е. вывести решение из исходной гиперплоскости ненулевых составляющих.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. *Корнишин М. С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.
3. *Крысько В. А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. 214 с.
4. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и пологих оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 119 с.
5. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 433 с.
6. *Шалашилин В. И.* Некоторые алгоритмы метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости.— В кн.: Нелинейная теория оболочек и пластин: Тезисы докл. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. с. 50—51.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
27.IV.1982