

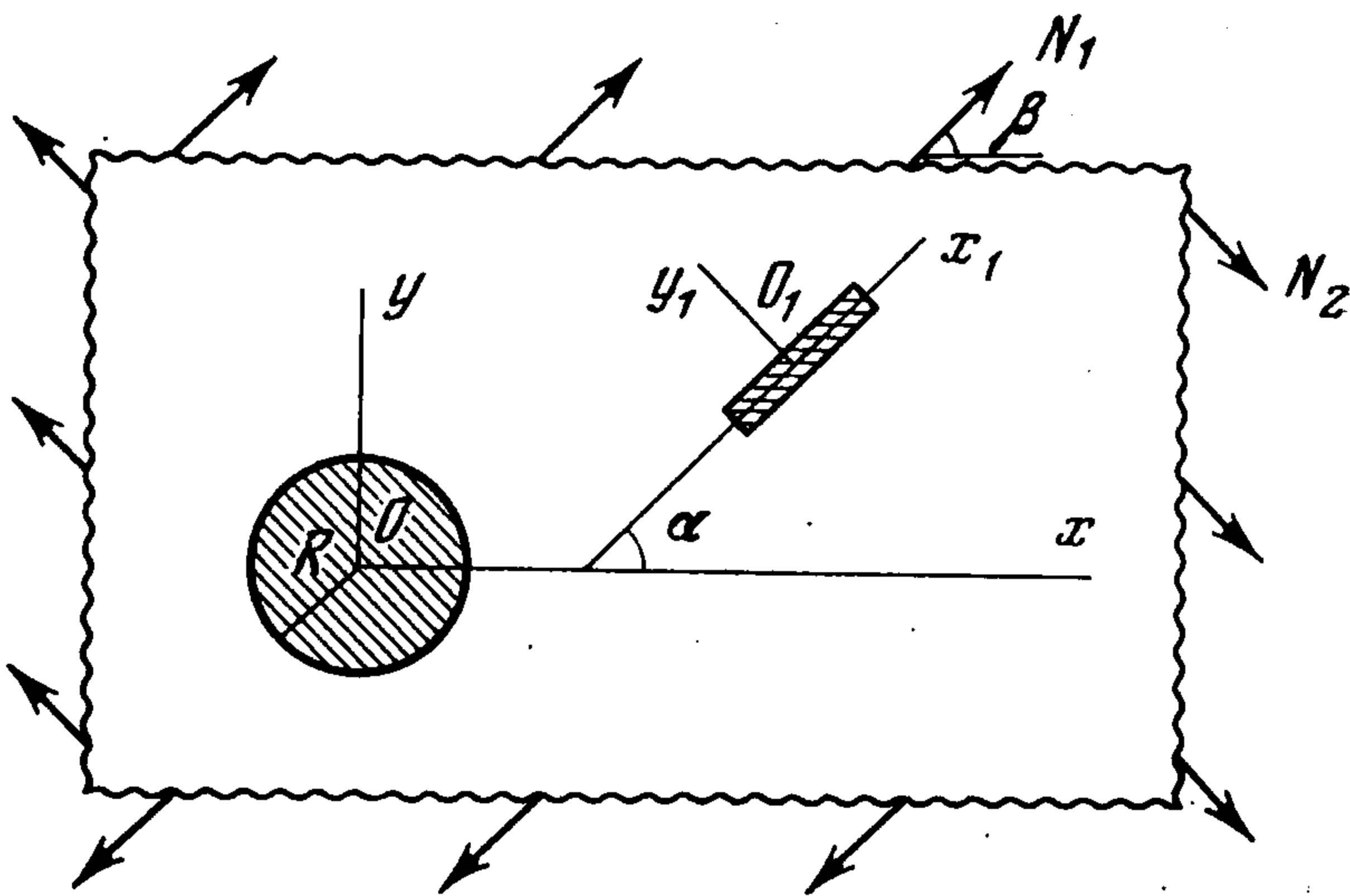
УДК 539.3

УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С КРУГЛОЙ ШАЙБОЙ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Тисовский Л. О.

Рассматривается задача о напряженном состоянии бесконечной упругой плоскости с впаиванной круглой шайбой и произвольно расположенным тонким упругим включением при двухосном растяжении. На линии раздела материалов выполняются условия идеального механического контакта. С использованием комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили задача сводится к системе интегродифференциальных уравнений, которая решалась численно с использованием метода механических квадратур. Дается численный анализ решения задачи об упругом равновесии плоскости с круглым отверстием и произвольно расположенным тонким включением.

1. Рассмотрим упругое равновесие изотропной бесконечной пластины с впаиванной круглой шайбой радиуса R и произвольно ориентированным прямолинейным тонким упругим включением длины $2l$ и ширины $2h$. Центр шайбы, точку O , свяжем с декартовой системой координат xOy , а в центре включения, точке O_1 , разместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, причем ось x_1 совпадает со срединной линией включения и образует угол α с осью x (фиг. 1). Пластина растягивается на бесконечности равномерно распределенными внешними усилиями N_1 и N_2 во взаимно перпендикулярных направлениях, причем усилие N_1 составляет с осью x угол β . На линии раздела шайбы с пластиной выполняются условия идеального механического контакта.



Фиг. 1

Величины, характеризующие включение, будем обозначать индексом 1, шайбу — 0. Индексами плюс и минус будем обозначать граничные значения функций соответственно при $y_1 \rightarrow +0$ и $y_1 \rightarrow -0$. Область $|z| \leq R$ обозначим S_0 , область $|z| \geq R$ — S_2 . Здесь и в дальнейшем будем придерживаться обозначений из монографии [1].

На берегах включения имеют место следующие граничные условия:

$$(1.1) \quad (\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm = (\sigma_y - i\tau_{xy})_1^\pm, \quad (u + iv)^\pm = (u + iv)_1^\pm$$

Компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ тензора напряжений и компоненты u, v вектора перемещений определим по формулам [1]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) &= \kappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Omega(z) &= \overline{\Phi(z)} + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \\ \Psi(z) &= \overline{\Omega(z)} - \Phi(z) - z \Phi'(z) \end{aligned}$$

В силу линейности задачи комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для пластинки представим в виде

$$(1.4) \quad \Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$$

где $\Phi_j(z), \Psi_j(z)$ ($j=1, 2$) — функции, определяющие напряженное состояние в пластине с включением без круглой шайбы ($j=1$) и с круглой шайбой без включения ($j=2$).

Для тонкого включения, пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с h , на основании (1.2) можно записать в системе координат $x_1 O_1 y_1$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\sigma_y - i\tau_{xy})_1^+ - (\sigma_y - i\tau_{xy})_1^- &= 2ihK'(x), \quad |x| \leq l \\ \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^+ - \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^- &= \frac{ih}{\mu_1} M'(x), \quad |x| \leq l \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})_1^+ + (\sigma_y - i\tau_{xy})_1^- &= \\ &= \frac{2}{(1 + \kappa_1)} [(1 - \kappa_1)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}], \quad |x| \leq l \\ \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^+ + \frac{\partial}{\partial x} (u + iv)_1^- &= \\ &= \frac{1}{\mu_1(1 + \kappa_1)} [2\kappa_1 K(x) + (\kappa_1 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] + \\ &+ i \frac{\gamma}{\mu_1}, \quad |x| \leq l \end{aligned}$$

Здесь $K(x), M(x)$ — подлежащие определению функции, γ — поворот включения как жесткого целого. Для простоты в (1.5) и в дальнейшем индекс единица у переменной x опускаем.

Используя граничные условия (1.1), из соотношений (1.5) и (1.2) получим следующие краевые задачи для определения кусочно-голоморфных функций $[\Phi_1(z), \Omega_1(z)]$ с линией скачков $[-l, l]$:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} [\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^+ - [\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^- &= 2ihK'(x), \quad |x| \leq l \\ [\kappa\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ - [\kappa\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- &= 2ihkM'(x), \\ |x| &\leq l \end{aligned}$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} [\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^+ + [\Phi_1(x) + \Omega_1(x)]^- &= \\ &= \frac{2}{1 + \kappa_1} [(1 - \kappa_1)K(x) + 2M(x) + 2\overline{K(x)} + 2\overline{M(x)}] - \\ &- 2R(x)\varepsilon_1, \quad |x| \leq l; \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_1)}{\mu} \\ [\kappa\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^+ + [\kappa\Phi_1(x) - \Omega_1(x)]^- &= 2ik\gamma + \frac{2k}{1 + \kappa_1} \times \\ \times [2\kappa_1 K(x) + (\kappa_1 - 1)M(x) - 2\overline{K(x)} - 2\overline{M(x)}] - \\ - 2P(x)\varepsilon_2, \quad |x| \leq l; \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_1)}{\mu_1} \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} R(x) &= \Phi_2(X) + \overline{\Phi_2(X)} + e^{-2i\alpha} (\overline{\Psi_2(X)} + X\overline{\Phi_2'(X)}) \\ P(x) &= (1 + \kappa)\Phi_2(X) - R(x); \quad X = xe^{i\alpha} + z_0, \quad z_0 = x_0 + \\ &+ iy_0, \quad k = \mu/\mu_1 \end{aligned}$$

(x_0, y_0 — координаты точки O_1 в системе координат xOy).

Решая задачи линейного сопряжения (1.6) и переходя к системе координат xOy , получим выражения для функций $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{h}{\pi(1 + \kappa)} \int_{-l}^l [K'(t) + kM'(t)] \frac{dt}{t - z_1} \\ \Psi_1(z) &= \frac{h}{\pi(1 + \kappa)} \int_{-l}^l \left\{ \frac{-\kappa\overline{K'(t)} + k\overline{M'(t)}}{t - z_1} - \frac{\overline{T}e^{i\alpha} [K'(t) + kM'(t)]}{(t - z_1)^2} \right\} dt \\ T &= te^{i\alpha} + z_0, \quad z_1 = e^{-i\alpha}(z - z_0) \end{aligned}$$

Аналитически продолжим функцию $\Phi_j(z)$ из области S_j в область S_{2-j} ($j = 0, 2$) по формуле

$$(1.10) \quad \Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z} \overline{\Phi_j'\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2} \overline{\Psi_j\left(\frac{R^2}{z}\right)}$$

и учтем зависимости (1.4), тогда для определения компонент $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ тензора напряжений в полярной системе координат будем иметь следующие соотношения [2]:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \sigma_r + i\tau_{r\theta} = & \left\{ \Phi_j(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) [\overline{\Phi_j(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_j'(z)}] \right\} + \\ & + \left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_1'(z)} - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\Psi_1(z)} \right] \delta_{j2}, \quad j = 0, 2 \\ 2\mu_p \frac{\partial}{\partial \theta} (u + iv) = & iz \left\{ \left[\kappa_p \Phi_j(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) (\overline{\Phi_j(z)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{z}\overline{\Phi_j'(z)}) \right] + \left[\kappa_p \Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} + \bar{z}\overline{\Phi_1'(z)} + \frac{\bar{z}}{z} \overline{\Psi_1(z)} \right] \delta_{j2} \right\} \\ & j = 0, 2 \\ \delta_{ij} = & \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (\mu_p, \kappa_p) = \begin{cases} (\mu, \kappa), & j = 2 \\ (\mu_0, \kappa_0), & j = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $j = 2$ для плоскости с включением без шайбы, $j = 0$ для шайбы; $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ — функции, определяющие напряженное состояние в шайбе. По условию задачи на линии раздела шайбы с пластиной выполняются условия идеального механического контакта, поэтому на основании формул (1.11) приходим к краевым задачам для определения функций $\Phi_0(z), \Phi_2(z)$:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} [\Phi_0(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_0(t) + \Phi_2(t)]^- = \\ = \Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - \bar{t}\overline{\Phi_1'(t)} - \bar{t}t^{-1}\overline{\Psi_1(t)}, \quad t \in S_0 \cap S_2 \\ [\mu\kappa_0\Phi_0(t) - \mu_0\Phi_2(t)]^+ - [\mu_0\kappa\Phi_2(t) - \mu\Phi_0(t)]^- = \\ = \mu_0 [\kappa\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + \bar{t}\overline{\Phi_1'(t)} + \bar{t}t^{-1}\overline{\Psi_1(t)}], \quad t \in S_0 \cap S_2 \end{aligned}$$

Решая задачи линейного сопряжения (1.12) и приняв во внимание соотношение (1.10) и асимптотические представления функций $\Phi_j(z), \Psi_j(z)$ ($j = 0, 2$) [1], находим после преобразований

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Phi_2(z) = & \Gamma + c \left[\frac{R^2}{z^2} \overline{\Gamma'} + \overline{\Phi_1(0)} - \overline{\Phi_1\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \right. \\ & \left. + \frac{R^2}{z} \overline{\Phi_1'\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2} \overline{\Psi_1\left(\frac{R^2}{z}\right)} \right] \\ \Psi_2(z) = & L(z) + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_2(z) + c_1 \overline{\Phi_1\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2} \left[R^2 \overline{\Phi_1''\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\overline{\Psi_1\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z} \overline{\Psi_1'\left(\frac{R^2}{z}\right)} \right] \right\} \\ L(z) = & \Gamma' + \frac{R^2}{z^2} \left[\Phi_1(0) + c_1 \Gamma + c_2 \overline{B_0} + \frac{2R^2 c}{z^2} \overline{\Gamma'} \right] \\ \Gamma = & \frac{1}{4} (N_1 + N_2), \quad \Gamma' = \frac{1}{2} (N_1 - N_2) e^{-2i\beta}, \quad c = \frac{\mu - \mu_0}{\kappa\mu_0 + \mu} \\ B_0 = & c_3 \left[\frac{(\mu_0 - \mu) \Phi_1(0) - (\kappa_0\mu + \mu_0) \overline{\Phi_1(0)}}{\mu(1 + \kappa_0)} - \Gamma \right] \\ c_1 = & \frac{\mu\kappa_0 - \mu_0\kappa}{\kappa_0\mu + \mu_0}, \quad c_2 = \frac{\mu(1 + \kappa_0)}{\kappa_0\mu + \mu_0}, \quad c_3 = \frac{\mu_0(1 + \kappa)}{\mu\kappa_0 + 2\mu_0 - \mu} \end{aligned}$$

Переходя в (1.13) к пределу при $z_0 \rightarrow \infty$, получим значения комплексных потенциалов для плоскости с впаиной круглой шайбой, которые совпадают с соответствующими формулами, приведенными в [3].

Имея выражения для функций $\Phi_2(z)$, $\Psi_2(z)$ (1.13), на основании (1.7) и (1.9) получим систему интегродифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $K(x)$, $M(x)$, которая в безразмерных переменных $\xi = x/l$, $\tau = t/l$ будет иметь вид

$$(1.14) \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} f_j(\xi) - \beta_i \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=1}^4 S_{ij}(\tau, \xi) f_j'(\tau) \right] d\tau = p_i(\xi) \quad (i=1, 2)$$

$$|\xi| \leq 1$$

$$(1.15) \quad f_1(\xi) = M(l\xi), \quad f_2(\xi) = \overline{M(l\xi)}, \quad f_3(\xi) = K(l\xi), \quad f_4(\xi) = \overline{K(l\xi)}$$

$$\beta_i = \frac{hs_i}{l\pi(1+\kappa)}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \frac{2}{1+\kappa_1}, \quad \alpha_{13} = \frac{1-\kappa_1}{1+\kappa_1}$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{24} = -\frac{2k}{1+\kappa_1}, \quad \alpha_{21} = \frac{\kappa_1-1}{1+\kappa_1}k, \quad \alpha_{23} = \frac{2\kappa_1k}{1+\kappa_1}$$

$$(1.16) \quad S_{1j}(\tau, \xi) = \left[\frac{2}{\varepsilon_1} \frac{\delta_{1j}}{\tau - \xi} + G_j(\tau, \xi) + f_j(\tau, \xi) + g_j(\tau, \xi) \right] k, \quad j=1, 2$$

$$S_{13}(\tau, \xi) = \frac{1-\kappa}{\varepsilon_1} \frac{1}{\tau - \xi} + G_1(\tau, \xi) - \kappa g_1(\tau, \xi) + f_1(\tau, \xi)$$

$$S_{14}(\tau, \xi) = -\kappa G_2(\tau, \xi) + g_2(\tau, \xi) + f_2(\tau, \xi)$$

$$S_{2j}(\tau, \xi) = \left[\frac{\nu-1}{\varepsilon_2} \frac{\delta_{1j}}{\tau - \xi} - G_j(\tau, \xi) + \kappa g_j(\tau, \xi) - \right. \\ \left. - f_j(\tau, \xi) + f_3(\tau, \xi) \delta_{2j} \right] k, \quad j=1, 2$$

$$S_{23}(\tau, \xi) = \frac{2\kappa}{\varepsilon_2} \frac{1}{\tau - \xi} - G_1(\tau, \xi) - \kappa^2 g_1(\tau, \xi) - f_1(\tau, \xi)$$

$$S_{24}(\tau, \xi) = \kappa G_2(\tau, \xi) + \kappa g_2(\tau, \xi) - f_2(\tau, \xi) + f_3(\tau, \xi)$$

$$(1.17) \quad g_1(\tau, \xi) = \frac{c\varepsilon^2 e^{i\alpha}}{X(XT - \varepsilon^2)}, \quad g_2(\tau, \xi) = ce^{-i\alpha} \left[\frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - TT)}{XT(\varepsilon^2 - XT)^2} - \frac{1}{T} \right]$$

$$G_1(\tau, \xi) = \frac{c_1}{c} \overline{g_1(\tau, \xi)} + \left(1 + \frac{\varepsilon^2 e^{-2i\alpha}}{X^2} \right) \overline{g_2(\tau, \xi)} + g_3(\tau, \xi)$$

$$G_2(\tau, \xi) = \overline{g_1(\tau, \xi)} + g_4(\tau, \xi)$$

$$g_3(\tau, \xi) = ce^{-i\alpha} \frac{2\varepsilon^2(\varepsilon^2 - XX)(\varepsilon^2 - TT)}{X(\varepsilon^2 - TX)^3}$$

$$g_4(\tau, \xi) = ce^{-3i\alpha} \frac{XX(\varepsilon^2 - 2TX) + 3\varepsilon^2 TX - 2\varepsilon^4}{X^3(\varepsilon^2 - TX)^2}$$

$$f_1(\tau, \xi) = \left[c + \frac{\varepsilon^2 e^{-2i\alpha}}{X^2} (c + c_4) \right] \frac{e^{i\alpha}}{T}, \quad c_4 = \frac{c_3(\mu_0 - \mu)}{\kappa_0\mu + \mu_0}$$

$$f_2(\tau, \xi) = \left[c + \frac{\varepsilon^2 e^{-2i\alpha}}{X^2} (1 - c_3) \right] \frac{e^{-i\alpha}}{T}, \quad f_3(\tau, \xi) = (1 + \kappa) c \frac{e^{-i\alpha}}{T}$$

$$(1.18) \quad p_i(\xi) = (-1)^{(i-1)} \varepsilon_i \left\{ 2\Gamma + \overline{\Gamma'} e^{-2i\alpha} + c\varepsilon^2 \left[\frac{\overline{\Gamma'}}{X^2} + \frac{\Gamma'}{X^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Gamma' e^{-2i\alpha}}{X^3} \left(\frac{3\varepsilon^2}{X} - 2X \right) \right] + \frac{\varepsilon^2 e^{-2i\alpha}}{X^2} (1 - c_2 c_3 + c_1) \Gamma - \right. \\ \left. - (1 + \kappa) \left(\Gamma + \frac{c\varepsilon^2 \overline{\Gamma'}}{X^2} \right) \delta_{2i} \right\} - 2ik\gamma \delta_{2i}$$

$$\varepsilon = R/l, \quad X = \xi e^{i\alpha} + z_0/l, \quad T = \tau e^{i\alpha} + z_0/l$$

При этом должны выполняться следующие условия: однозначность перемещений при обходе контура включения, равенство нулю главного вектора и главного момента всех усилий, приложенных к включению. Эти условия можно представить в виде (Λ — замкнутый контур, охваты-

ю щей области включения)

$$(1.19) \quad \int_{-1}^1 f_j'(\tau) d\tau = 0, \quad j = 1, 3; \quad \operatorname{Re} \iint_{\Lambda} [z_1 \bar{\Omega}(z_1) + \Phi(z_1)] dz_1 = 0$$

Система уравнений (1.14) и условий (1.19) решалась численно с использованием метода механических квадратур [4]. После преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения u_{jm} и γ

$$(1.20) \quad \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^4 M_{ij}(t_m, x_r) u_{jm} = M p_i(x_r, \gamma); \quad i = 1, 2;$$

$$r_i = 1, 2, \dots, M - 1$$

$$\sum_{m=1}^M u_{jm} = 0, \quad j = 1, 3; \quad \operatorname{Im} \sum_{m=1}^M u_{3m} t_m = 0$$

$$u_{jm} = f_j'(t_m) \sqrt{1 - t_m^2}, \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$$

$$M_{ij}(t_m, x_r) = \alpha_{ij} \eta(t_m - x_r) - \beta_i S_{ij}(t_m, x_r)$$

$$\eta(t_m - x_r) = \begin{cases} 0, & t_m > x_r \\ 1, & t_m \leq x_r \end{cases}$$

Напряженное состояние в окрестности конца включения можно представить по формулам [5], причем коэффициенты интенсивности напряжений K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в рассматриваемом случае вычисляются по формулам ($j = 1$ для левого конца, $j = 2$ для правого конца, M — четное)

$$K_1^j - i K_2^j = k \Sigma_1, \quad K_3^j - i K_4^j = \Sigma_3$$

$$\Sigma_i = \frac{2h}{\sqrt{i(1+\kappa)}} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^m u_{im} \left(\operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \right)^{(2j-3)}, \quad [i = 1, 3]$$

Аналогично решается задача для включения, расположенного внутри шайбы. Таким же путем можно получить решение задачи, когда в пластине или шайбе имеется N включений.

2. Частные случаи. Пластина с шайбой и трещиной. Введя замену переменных

$$(2.1) \quad g_j'(\tau) = -f_j'(\tau) k \frac{2h}{1+\kappa}$$

и переходя в (1.14) к пределу при $\mu_1 \rightarrow 0$, получим

$$(2.2) \quad \int_{-1}^1 [S_{11}(\tau, \xi) g_1'(\tau) + S_{12}(\tau, \xi) g_2'(\tau)] d\tau = \pi p_1(\xi)$$

$$g_3(\xi) = g_4(\xi) = 0, \quad |\xi| \leq 1$$

где выражения для функций $S_{11}(\tau, \xi)$, $S_{12}(\tau, \xi)$, $p_1(\xi)$ даются формулами (1.16) — (1.18).

Пластина с шайбой и абсолютно жестким включением. Переходя в (1.14) к пределу при $\mu_1 \rightarrow \infty$, находим

$$(2.3) \quad \frac{h}{l} \int_{-1}^1 [S_{23}(\tau, \xi) f_3'(\tau) + S_{24}(\tau, \xi) f_4'(\tau)] d\tau = \pi(1+\kappa) p_2(\xi), \quad |\xi| \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{1j} f_j(\xi) - \frac{h(1-\kappa)}{l\pi(1+\kappa)} \int_{-1}^1 \frac{f_3'(\tau)}{\tau - \xi} d\tau = 0, \quad |\xi| \leq 1$$

где выражения для функций α_{1j} , $S_{23}(\tau, \xi)$, $S_{24}(\tau, \xi)$ определяются соотношениями (1.15) — (1.18).

Пластина с круглым отверстием и исключением. Переходя в (1.14) к пределу при $\mu_0 \rightarrow 0$, будем иметь систему интегродифференциальных уравнений для плоскости с круглым отверстием и произвольно ориентированным включением, в предположении, что контур отверстия свободен от усилий. В формулах (1.14) — (1.17) следует положить $[c = c_1 = 1$ и

$$(2.4) \quad p_i(\xi) = (-1)^{(i-1)} \varepsilon_i \left\{ 2\Gamma + \bar{\Gamma}' e^{-2i\alpha} + \varepsilon^2 \left[\frac{\bar{\Gamma}'}{X^2} + \frac{\Gamma'}{X^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-2i\alpha} \left(\frac{\Gamma'}{X^3} \left(\frac{3\varepsilon^2}{X} - 2X \right) + \frac{2\Gamma}{X^2} \right) \right] - (1 + \kappa) \delta_{2j} \left(\Gamma + \frac{\varepsilon^2}{X^2} \bar{\Gamma}' \right) \right\} - \\ - 2ik\gamma\delta_{2i}$$

Переходя теперь к пределу при $\mu_1 \rightarrow 0$, получим интегральное уравнение для плоскости с круговым отверстием и произвольно расположенной трещиной, которое совпадает с соответствующим уравнением, приведенным в [4].

Переходя к пределу при $\mu_1 \rightarrow \infty$, находим систему интегральных уравнений для плоскости с круглым отверстием и абсолютно жестким включением.

Пластина с включением. Переходя в (1.14) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $\mu_0 \rightarrow \mu$, получим систему интегродифференциальных уравнений типа Прандтля для плоскости с упругим включением, которая совпадает с системой уравнений, приведенной в [5].

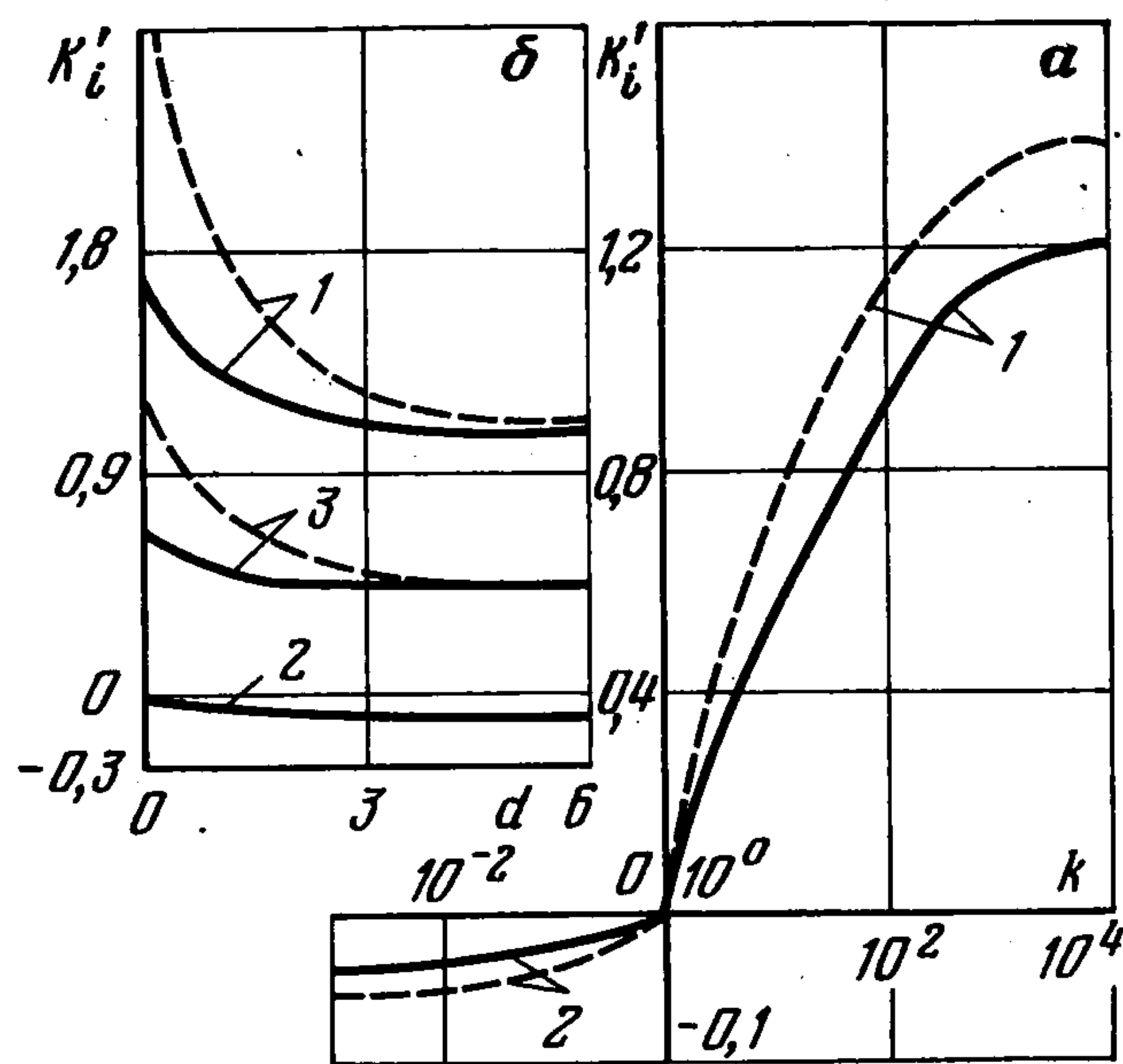
Две спаянные полуплоскости с включением. Сделав преобразование системы координат $x \rightarrow x$, $y \rightarrow y - \varepsilon$ и переходя в (1.14) к пределу при $\varepsilon \rightarrow \infty$, получим систему интегродифференциальных уравнений для двух спаянных вдоль действительной оси однородных полуплоскостей с произвольно расположенным упругим включением в одной из них. Соотношения (1.17) — (1.18) в этом случае имеют вид

$$(2.5) \quad g_1(\tau, \xi) = \frac{ce^{i\alpha}}{X - \bar{T}}, \quad g_2(\tau, \xi) = \frac{ce^{-i\alpha}(T - \bar{T})}{(X - \bar{T})^2} \\ G_1(\tau, \xi) = \frac{c_1}{c} \overline{g_1(\tau, \xi)} + (1 + e^{-2i\alpha}) \overline{g_2(\tau, \xi)} + g_3(\tau, \xi) \\ G_2(\tau, \xi) = \overline{g_1(\tau, \xi)} + g_4(\tau, \xi), \quad f_i(\tau, \xi) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ g_3(\tau, \xi) = \frac{2ce^{-i\alpha}(T - X)(\bar{T} - T)}{(X - \bar{T})^3}, \quad g_4(\tau, \xi) = \frac{c(T - X)}{(X - T)^2} e^{-3i\alpha} \\ (2.6) \quad p_i(\xi) = (-1)^{(i-1)} \varepsilon_i \{ [2 + e^{-2i\alpha}(1 - c_2c_3 + c_1)] \Gamma + (1 - [c] \bar{\Gamma}' e^{-2i\alpha} + \\ + c(1 + e^{-2i\alpha})(\Gamma' + \bar{\Gamma}') - (1 + \kappa)(\Gamma + c\bar{\Gamma}') \delta_{2i} \} - 2ik\gamma\delta_{2i}$$

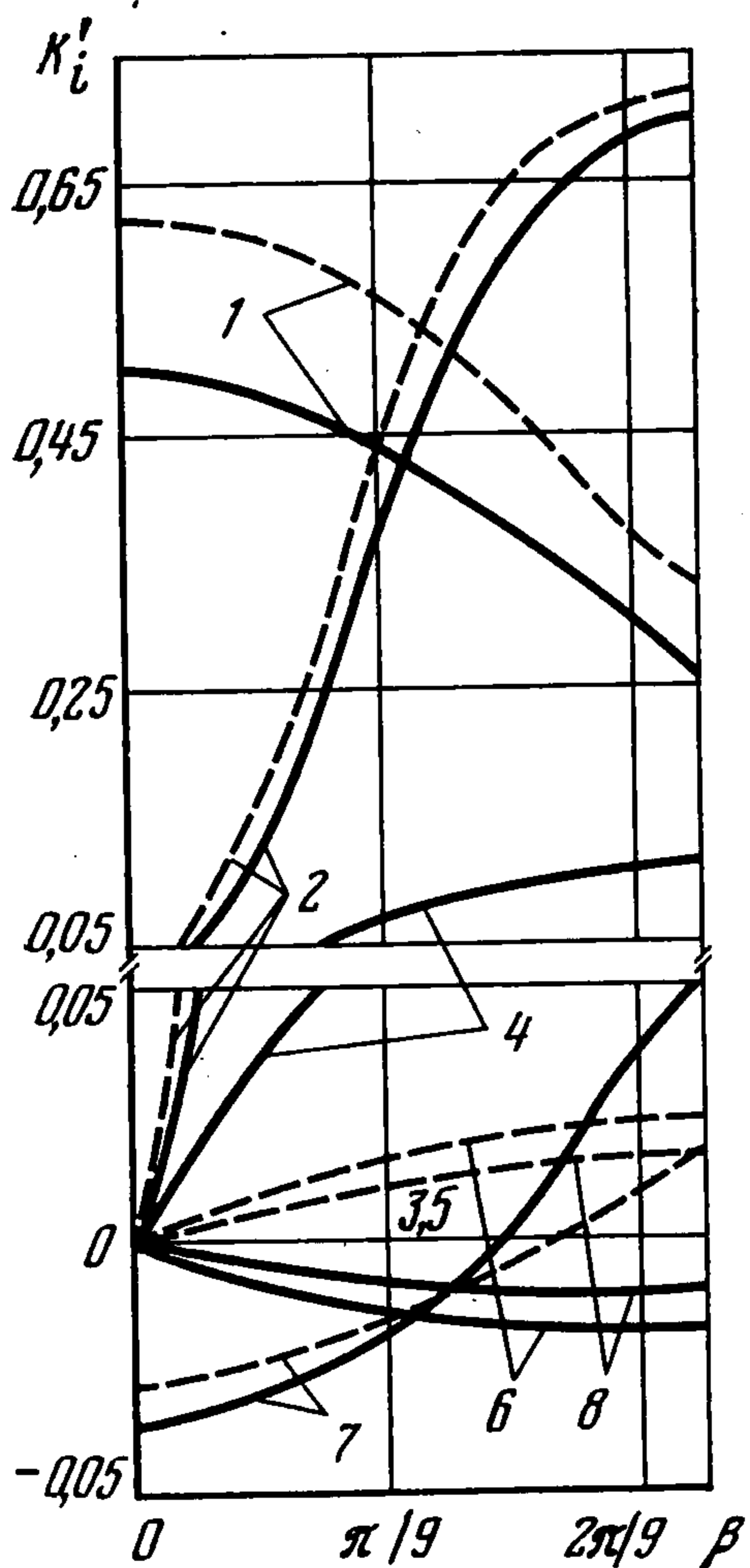
Полуплоскость с упругим включением. Сделав преобразование системы координат, как в предыдущем случае, и переходя в (1.14) — (1.16), (2.5), (2.6) к пределу при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_0 \rightarrow 0$ (т. е. положив $c = c_1 = 1$), найдем систему интегродифференциальных уравнений для полуплоскости с произвольно ориентированным упругим включением. Формула (2.6) в этом случае принимает вид

$$(2.7) \quad p_i(\xi) = (-1)^{(i-1)} \varepsilon_i \{ [(1 + e^{-2i\alpha})(2\Gamma + \Gamma' + \bar{\Gamma}')] - (1 + \kappa)(\Gamma + \\ + \bar{\Gamma}') \delta_{2i} \} - 2ik\gamma\delta_{2i}$$

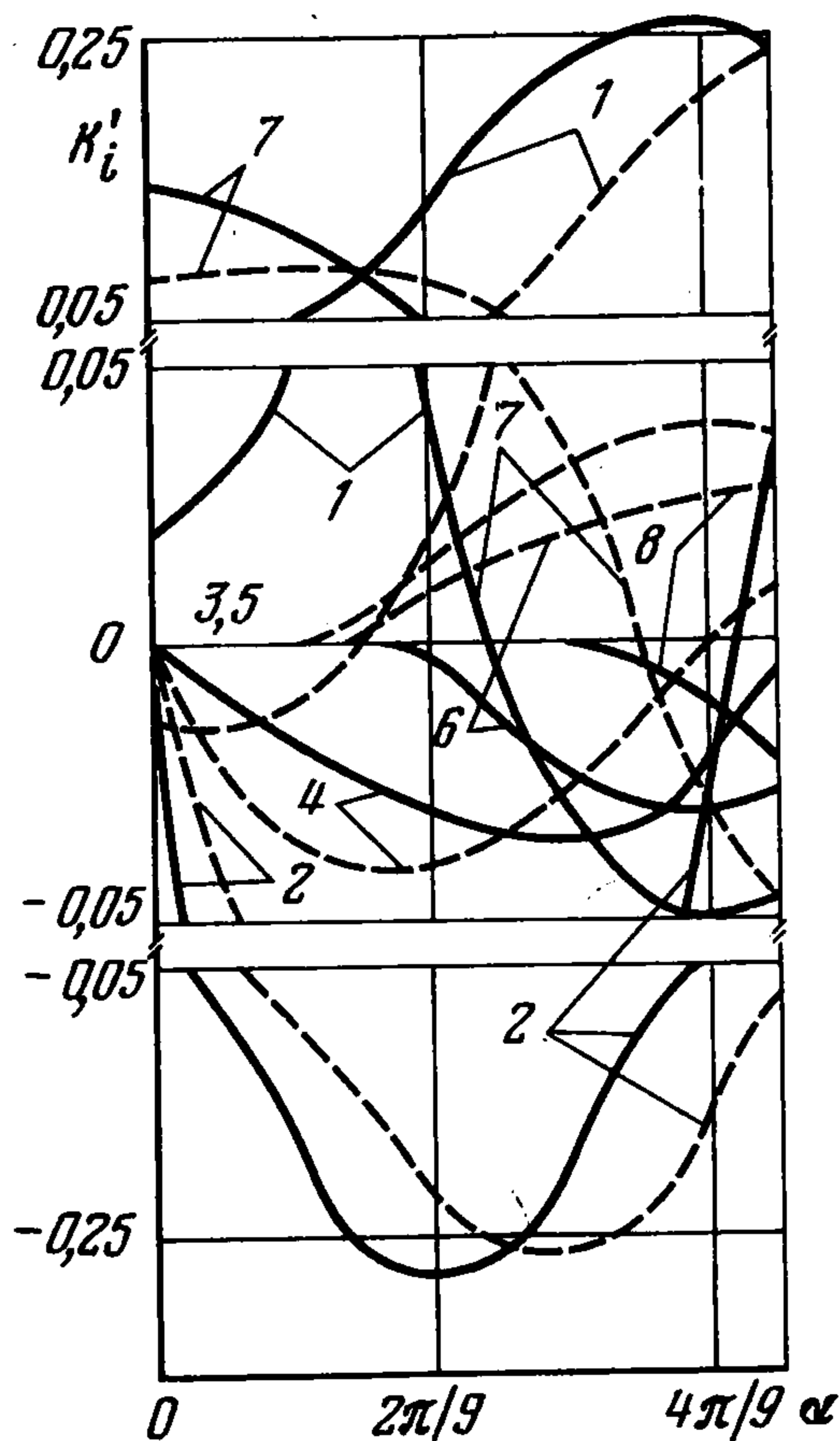
3. Был проведен численный анализ решения задачи. С точностью 0,2% были получены значения коэффициентов интенсивности напряжений для трещины и абсолютно жесткого включения в изотропной плоскости. На фиг. 2—4 представлены результаты численного анализа для упругой плоскости с круглым отверстием и произвольно



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ориентированным упругим включением. Величины, относящиеся к левой вершине включения, обозначены штриховыми линиями, к правой — сплошными.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $M = 20$, $h/l = 0,1$, $R/l = 2$, $x_0/l = 4$, $y_0/l = 0$, $N_2/N_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa = 2$.

На фиг. 2, а представлена зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K_i' = K_i / (\sqrt{lN_1})$ ($i = 1, 2, 3, 4$) от относительной жесткости пластинки $k = \mu/\mu_1$ при одноосном растяжении в направлении, перпендикулярном линии включения ($\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$). Кривые 1, 2 характеризуют соответственно коэффициенты интенсивности напряжений K_1' , K_3' . При таком нагружении $K_2' = K_4' = 0$.

На фиг. 2, б представлена зависимость K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) от расстояния d между краем отверстия и левым концом включения при условии, что включение лежит на действительной оси при $\beta = \pi/2$. Кривые 1 характеризуют трещину ($K_2' = K_3' = K_4' = 0$), 2 — абсолютно жесткое включение ($K_1' = K_2' = K_4' = 0$), 3 — упругое включение с относительной жесткостью $k = 10$ ($K_2' = K_3' = K_4' = 0$). При $k = 0,1$ коэффициенты интенсивности напряжений имеют порядок 10^{-4} — 10^{-2} и поэтому на фиг. 2, б не указаны.

На фиг. 3, 4 кривые 1—4 характеризуют коэффициенты K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) при $k = 10$, а кривые 5—8 — те же коэффициенты при $k = 0,1$.

На фиг. 3 дана зависимость K_i' от угла β , под которым действует растягивающее усилие при $\alpha = 0$. Проанализировав вид функций $p_i(\xi)$ ($i = 1, 2$), можно представить их следующим образом: $p_i(\xi) = A_i(\xi) + B_i(\xi) e^{2i\beta}$, где $A_i(\xi)$, $B_i(\xi)$ — некоторые действительные функции. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{p_i(\pi/4 - \beta)\} &= A_i(\xi) + B_i(\xi) \sin 2\beta, \quad \operatorname{Re} \{p_i(\pi/4 + \beta)\} = \\ &= A_i(\xi) - B_i(\xi) \sin 2\beta, \quad \operatorname{Im} \{p_i(\pi/4 - \beta)\} = \operatorname{Im} \{p_i(\pi/4 + \beta)\} \end{aligned}$$

откуда следует, что прямая линия $\beta = \pi/4$ — ось симметрии для K_2' , K_4' , на прямые линии $K_i' = K_i'(\pi/4)$ ($i = 1, 3$) — оси антисимметрии соответственно для K_1' , K_3' . Поэтому исследования достаточно проводить для углов $0 \leq \beta \leq \pi/4$.

На фиг. 4 представлена зависимость K_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) от угла ориентации включения α при $\beta = 0$. Из физических соображений следует, что указанные зависимости следует рассматривать только на сегменте $[0, \pi/2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
3. Грилицкий Д. В., Луцишин Р. М. Напряжения в пластинках с круговой линией раздела граничных условий. Львов: Вища школа, 1975. 114 с.
4. Панасюк В. В., Саверук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К.: Наук. думка, 1979. 443 с.
5. Драган М. С., Опанасович В. К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 342—348.

Львов

Поступила в редакцию
4. I. 1982