

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Самодуров А. А., Тихомиров А. С.

Для исследования изгиба пластины со свободным краем применяется метод, включающий решение нестандартных парных уравнений, представляющих собой тригонометрические ряды, что приводит к квазиполнерегулярной системе линейных алгебраических уравнений. Исследуется характер напряженно-деформированного состояния пластины.

Применительно к рассматриваемой задаче один из методов, сводящихся к решению парных сумматорных уравнений, изложен в работе [1]. В большинстве работ рассматривалось сочетание опирания с защемлением, случай со свободным краем изучен недостаточно.

Рассмотрим тонкую круглую пластину радиуса  $a$  и толщиной  $h$ , нагруженную в центре по кругу радиуса  $b$  равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $p$ . Часть контура пластины свободна от нагрузок в пределах угла  $2\theta_0$ , а другая шарнирно опирается (фиг. 1).

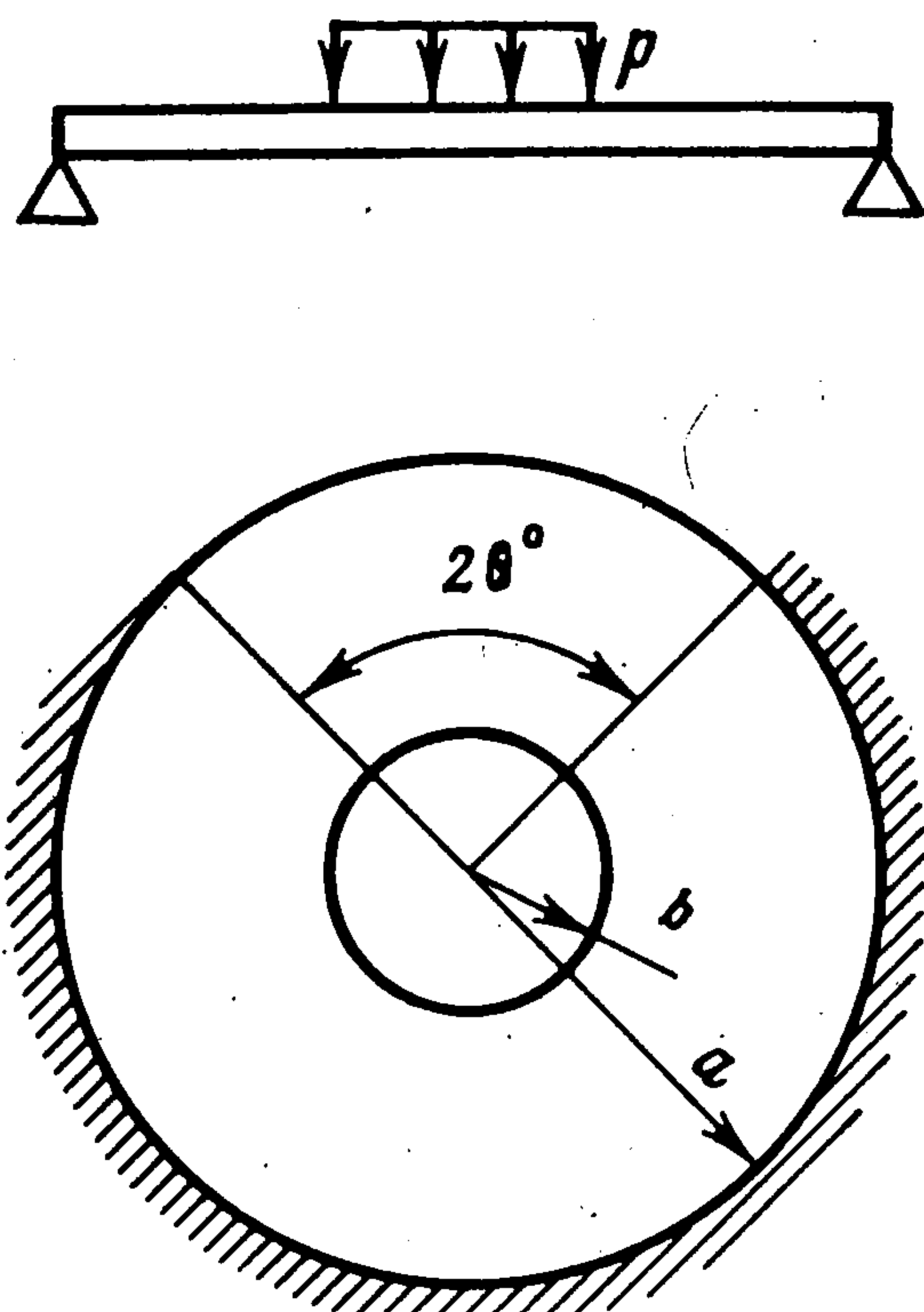
Решение исходной задачи целесообразно представить в виде суммы двух решений:  $w_c = w^{(1)} + w^{(2)}$  — по перемещениям, и  $\sigma_{ik}^c = \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)}$  — по напряжениям.

Первая задача соответствует модели пластинки с полным опиранием по контуру и нагрузкой, показанной на фиг. 1, ее решение известно в литературе [2]. Вторая задача содержит ту же пластинку с контурными условиями, изображенными на фиг. 1, а нагрузка численно равна реакции опоры  $q$  в первой задаче и направлена в противоположную сторону на контуре свободного края. (В данном случае  $q = p \cdot (\pi b^2 / 2\pi a)$  — интенсивность равномерно распределенной нагрузки.) Таким образом, решение исходной задачи по существу сводится к анализу второй задачи, граничные условия которой при  $r = a$  таковы:

$$(1) \quad \begin{aligned} M_r^{(2)} &= 0, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ Q_r^{(2)} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{rt}^{(2)}}{\partial \theta} &= P, & 0_0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ w^{(2)} &= 0, & \theta_0 < \theta \leq \pi \end{aligned}$$

Здесь  $r, \theta$  — текущие координаты,  $w^{(2)}$  — перемещение,  $Q_r^{(2)}$  — перерезывающая сила,  $M_r^{(2)}, M_{rt}^{(2)}$  — моменты соответственно изгибающий и крутящий.

В связи с симметричным расположением пластины относительно начала отсчета угла  $\theta$  рассмотрим ее половину и будем искать решение, вы-



Фиг. 1

раженное через функцию прогиба  $w^{(2)}(r, \theta)$  в виде ряда по косинусам, удовлетворяющего уравнению равновесия в полярных координатах

$$\nabla \nabla w^{(2)} = 0$$

На основании рассуждений, аналогичных приведенным в работе [1], получим функцию

$$w^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^* \rho^n + B_n^* \rho^{n+2}) a^n \cos n\theta, \quad \rho = \frac{r}{a}$$

через которую выражаются основные компоненты  $M_r^{(2)}$ ,  $M_{rt}^{(2)}$ ,  $Q_n^{(2)}$  и др. [2], где  $A_n^*$ ,  $B_n^*$  — неизвестные коэффициенты. Из первого граничного условия находится связь коэффициентов  $A_n^*$  и  $B_n^*$ . Далее выполнение второго и третьего условий приводит к системе парных сумматорных уравнений, которую необходимо разрешить относительно неизвестных  $A_n$ . Вводя новые неизвестные, запишем эту систему в виде ( $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины)

$$(2) \quad \begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} A_n Y_n \cos n\theta &= 1, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos n\theta &= -A_0 - A_1 \cos \theta, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi \\ A_n &= A_n^* a^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)(1-\nu)}{(n+1)[(n+2) - \nu(n-2)]} \right\} A \\ A &= -\frac{3+\nu}{12(1+\nu)} \frac{E}{q} \left( \frac{h}{a} \right)^3, \quad Y_n = \frac{n^2(n^2-1)}{2n+(1+\nu)} \end{aligned}$$

Таким образом, задача состоит в отыскании неизвестных  $A_n$  из системы парных сумматорных уравнений (2).

По сравнению с рассмотренным ранее ([3—6] и др.) решениями парных сумматорных уравнений с тригонометрическими базовыми функциями данная задача имеет ряд особенностей: степени многочленов по  $n$  в уравнениях системы различаются на величину, большую единицы; в одном из рядов системы отсутствуют два первых члена. Поэтому подход к решению системы (2) требует специального рассмотрения.

Продифференцируем второе уравнение системы (2) три раза и запишем полученную систему в виде

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} D_n \cos n\theta &= 1, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} D_n \sin n\theta &= \sum_{n=2}^{\infty} D_n (1 - \varphi_n) \sin n\theta - \frac{A_1}{2} \sin \theta, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi \\ \varphi_n &= \frac{n^2 + 1/2n(1+\nu)}{n^2 - 1}; \quad D_n = A_n Y_n \end{aligned}$$

Величина  $(1 - \varphi_n)$  при  $n \rightarrow \infty$  убывает не хуже, чем  $O(1/n)$ , что необходимо для квазивполнерегулярности системы (см. ниже). Для приведения к одинаковому виду левых частей уравнений системы (3) умножим первое уравнение (3) на  $\cos(\theta/2) (\cos \theta - \cos t)^{-1/2}$ , а затем проинтегрируем по  $\theta$  от 0 до  $t$ ; второе уравнение умножим на  $\cos(\theta/2) (\cos t - \cos \theta)^{-1/2}$  и проинтегрируем по  $\theta$  от  $t$  до  $\pi$  (более подробно этот прием описан в работе [7]). После преобразований получим ( $P_n(t)$  — полиномы Лежандра)

$$(4) \quad \sum_{n=2}^{\infty} D_n y_n = F(t), \quad 0 \leq t \leq \theta_0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n y_n = \sum_{n=2}^{\infty} D_n (1 - \varphi_n) y_n - \frac{A_1}{2} y_1 \sin t, \quad \theta_0 < t \leq \pi$$

$$y_n = P_{n-1}(\cos t) + P_n(\cos t)$$

$$F(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^t \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos t}}$$

Полученную систему (4) сведем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$(5) \quad D_n' = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{ni} D_i' + \beta_n \left( D_n' = 2 \frac{D_n}{n} \right)$$

$$\alpha_{ni} = (1 - \varphi_i) \frac{i}{2} I_{ni}(\theta_0), \quad \beta_n' = \beta_n \left[ 1 - \frac{A_1}{2} I_{ni}(\theta_0) \right]$$

$$\beta_n' = \int_0^{\theta_0} F(t) y_n \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt, \quad I_{ni}(x) = \int_x^{\pi} y_n y_i \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt, \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

В свободной части системы (5) присутствует неизвестная величина которую, как и  $A_0$ , находим из граничных условий на контуре ( $r = a$ )

$$w = 0(t = \pi), \quad \int_{\theta_0}^{\pi} w dt = 0$$

Получим

$$(6) \quad A_1 = \sum_{n=2}^{\infty} D_n' \frac{n}{2Y_n} \chi_n$$

$$\chi_n = \left[ \frac{\sin n\theta_0}{n(n-\theta_0)} + (-1)^n \right] \left( 1 - \frac{\sin n\theta_0}{\pi - \theta_0} \right)^{-1}$$

$$A_0 = A_1 - \sum_{n=2}^{\infty} D_n' \frac{n+1}{2Y_n} (-1)^n$$

Если теперь в первом разложении (6) изменить индекс суммирования  $n$  на  $i$ , подставить  $A_1$  в свободный член системы (5), а затем объединить общий член разложения  $A_1$  и ядро системы, то получим систему следующего вида:

$$(7) \quad D_n' = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_{ni}' D_i' + \beta_n'$$

$$\alpha_{ni}' = \frac{i}{2} \left\{ (1 - \varphi_i) I_{ni} - \frac{\chi_i}{2Y_i} I_{n1} \right\}$$

Исследование этой системы на регулярность, аналогичное проведенному в работе [7], показывает, что она квазивполнерегулярна.

Решение системы (7) относительно неизвестных  $D_n'$  проводилось методом Гаусса. Для этого была проведена оценка вырожденности матрицы коэффициентов, показавшая хорошую обусловленность системы. При расчете удерживалось до 150 неизвестных членов системы, выполнение граничных условий задачи обеспечивалось с точностью до 2%. Очевидно, эта ошибка уменьшается при подсчете компонент тензора напряжений и вектора перемещений в точках, удаленных от контура.

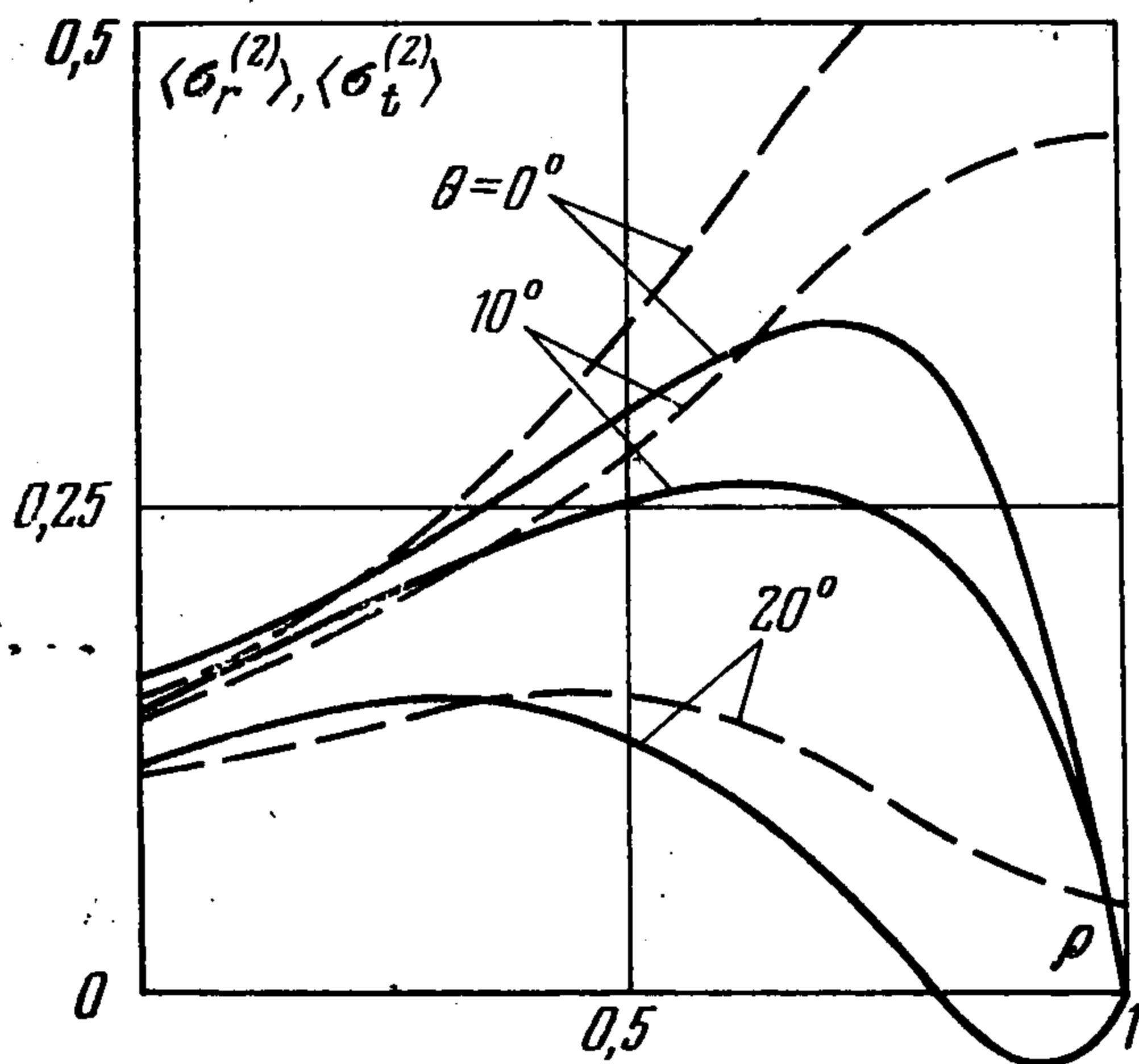
На фиг. 2 показаны (сплошной и штриховой линиями соответственно) зависимости компонент радиальной  $\langle \sigma_r^{(2)} \rangle$  и окружной  $\langle \sigma_t^{(2)} \rangle$  составляю-

щих напряжений от  $\rho$  при  $\theta_0 = 20^\circ$  и разных значениях угла  $\theta$ , причем

$$\langle \sigma_r^{(2)} \rangle = \frac{6}{h^2} \langle M_r \rangle = \frac{6M_r}{h^2 \kappa}, \quad \langle \sigma_t^{(2)} \rangle = \frac{6}{h^2} \langle M_t \rangle = \frac{6M_t}{h^2 \kappa}$$

$$\kappa = \frac{3\rho a}{h^2(3+\nu)}$$

При анализе исходной задачи представляет интерес влияние величины свободного края на характер напряженно-деформированного состояния



Фиг. 2

пластины. Соответствующую оценку можно [найти из следующих соотношений:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_r^{(2)}(r=0, \theta=0)}{\sigma_r^{(1)}(r=0)}$$

$$K_w = \frac{w^{(2)}(r=0, \theta=0)}{w^{(1)}(r=0)}$$

Эта оценка дает представление о соотношении напряжений в центре пластины для двух указанных задач. Ниже приводятся значения  $K_w$  и  $K_\sigma$  для  $b/a = 0,015$ ; показан также характер изменения приведенного коэффициента  $A_0 = A_0^* A$  от угла  $\theta_0$

(этот коэффициент характеризует величину прогиба в центре пластины,  $\rho = 0$ )

$\theta_0$ , град.	10	20	30	40
$K_w \cdot 10^4$	151	687	1593	2931
$K_\sigma \cdot 10^4$	24	101	217	359
$A_0$	0,02	0,06	0,14	0,20

Предложенный метод решения может быть распространен и на случай произвольного нагружения, принцип построения решения остается прежним.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гликман Б. Т. Изгиб тонкой круглой пластинки со смешанными граничными условиями.— Строительная механика и расчет сооружений, 1970, № 5, с. 21—25.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
3. Баблюян А. А. Решение некоторых «парных» рядов.— Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 3, с. 149—157.
4. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 964—967.
5. Травкин Ю. И. О системе парных тригонометрических рядов и ее применение к смешанным задачам.— Прикл. механика, 1977, т. 13, № 6, с. 27—37.
6. Tranter C. Y. Dual trigonometrical series.— Proc. Glasgow Math. Assoc., 1959, v. 4, No. 2, p. 49—57.
7. Баблюян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 678—689.