

УДК 533.6.011

О ПОВЕДЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.

Рассматривается поведение нестационарных возмущений стационарных решений квазилинейных гиперболических или параболически вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных в окрестности критической точки. Искомые функции изучаемых уравнений считаются зависящими от двух аргументов — координаты x и времени t , количество искомых функций произвольно. Критической называется точка, в которой одна из характеристических скоростей системы обращается в нуль.

Развитие нестационарных возмущений в окрестности критических точек стационарных решений изучалось ранее [1] в предположении, что как коэффициенты, так и правые части уравнений в частных производных — непрерывные функции своих аргументов. Как показано в [1], критические точки при таких предположениях являются особыми точками системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающейся из исходной для стационарных решений, а поведение нестационарных возмущений в окрестности критических точек описывается нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Ниже ограничения, налагаемые на правые части исходных уравнений, существенно ослаблены: допускается, что правые части могут претерпевать разрывы первого рода. Рассматриваются стационарные и нестационарные решения в окрестности точек разрыва, в которых одновременно происходит изменение знака одной из характеристических скоростей. В таких критических точках производные стационарных решений обращаются в бесконечность. Получено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее эволюцию нестационарных возмущений, скорость распространения которых в окрестности таких критических точек обращается в нуль. Это уравнение представляет собой обобщение соответствующего уравнения работы [1], полученного для случая непрерывных правых частей, и отличается от него наличием дополнительного кусочно-постоянного слагаемого. Возмущение, характеристическая скорость которого обращается в нуль, порождает возмущения других типов. Получены формулы для главной части этих возмущений вблизи критической точки.

Результаты работы могут быть использованы при анализе устойчивости стационарных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений при наличии точек обращения в нуль одной из характеристических скоростей. Для задач газовой динамики и физической газовой динамики обращение в нуль характеристической скорости означает, что скорость течения достигает скорости звука.

1. Рассмотрим гиперболическую систему уравнений для n функций $u_j(x, t)$, зависящих от двух независимых переменных — пространственной координаты x и времени t

$$(1.1) \quad l_j^i(u_k, x) \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + c^i(u_k, x) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = f^i(u_k, x) \\ (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Система (1.1) записана в характеристической форме, $c^i(u_k, x)$ — характеристические скорости системы, по повторяющимся нижним индексам ведется суммирование от 1 до n .

В соответствии с гиперболическостью системы матрица (l_j^i) невырожденная. Ее элементы, а также характеристические скорости системы (1.1) предполагаются непрерывными и дифференцируемыми функциями u_k и x по всем аргументам. Функции $f^i(u_k, x)$, стоящие в правых частях уравнений (1.1), считаются кусочно-непрерывными и могут терпеть разрыв пер-

вого рода на некоторых плоскостях $x = \text{const}$ или на некоторых поверхностях $\vartheta(u_k, x) = 0$ в пространстве u_k, x . Частные производные первого порядка от $f^i(u_k, x)$ по всем аргументам будем считать существующими и непрерывными всюду, где определены $f^i(u_k, x)$, за исключением точек, принадлежащих поверхностям разрыва этих функций.

Пусть в рассматриваемой области изменения переменных u_k, x обращается в нуль одна из однократных характеристических скоростей системы уравнений (1.1), например $c^1(u_k, x)$, а остальные характеристические скорости $c^\mu(u_k, x)$ ($\mu = 2, \dots, n$) отличны от нуля. Выберем некоторое стационарное (не зависящее от времени) решение $U_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) системы (1.1), которое пересекает поверхность $c^1(u_k, x) = 0$ в некоторой точке x^* и непрерывно в малой ее окрестности. Точку пересечения $U_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) с поверхностью $c^1(u_k, x) = 0$ назовем критической и примем ее за начало отсчета пространственной координаты. Располагаясь выбором искомых функций, без ограничения общности можно считать, что $U_j(0) = 0$ для всех j от 1 до n . Тогда для стационарных решений в силу выбора начала отсчета координаты x и значений величин U_j в критической точке будем иметь $c^1(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Для стационарных решений система (1.1) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.2) \quad l_j^i(u_k, x) c^i(u_k, x) \frac{dU_j}{dx} = f^i(u_k, x)$$

Так как по предположению c^1 — однократная характеристическая скорость, то при $c^1 = 0$ первая строка матрицы коэффициентов при dU_j/dx обращается в нуль, следовательно, ранг этой матрицы в точках поверхности $c^1 = 0$ становится равным $n - 1$. В остальных точках рассматриваемой области этот ранг равен n .

Если в точках поверхности $c^1 = 0$ функция f^1 непрерывна и не равна нулю, то в этих точках производные dU_j/dx ($j = 1, 2, \dots, n$) обращаются в бесконечность и при переходе через эту поверхность меняют знак. Это означает, что непрерывное и однозначное по x решение существует только в односторонней окрестности критической точки, и такие точки могут рассматриваться только в качестве одной из границ интервала, на котором изучается решение.

Если критическая точка — внутренняя точка интервала, то для существования непрерывного и однозначного по x решения функция $f^1(u_k, x)$ должна менять знак в критической точке либо непрерывным образом, либо разрывным.

В первом случае точки пространства U_k, x , где одновременно выполнены условия

$$(1.3) \quad c^1(u_k, x) = 0, f^1(u_k, x) = 0$$

представляют собой особые точки стационарных уравнений (1.2). Исследование стационарного и нестационарного решения при условиях (1.3) было проведено в работе [1].

Во втором случае, когда функция f^1 разрывна в точках поверхности $c^1 = 0$, существование непрерывного решения в двусторонней окрестности критической точки возможно при условии

$$(1.4) \quad c^1 = 0, f_-^1 \neq f_+^1$$

Индексы минус и плюс здесь и далее приписываются величинам непосредственно слева и справа от критической точки соответственно.

При условиях (1.4) производные dU_j/dx обращаются в бесконечность в критической точке $x = 0$.

Множества точек, определяемые равенствами (1.3), и пересечениями поверхности $c^1 = 0$ с поверхностью, где f^1 терпит разрыв, образуют $(n - 1)$ -мерные поверхности в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных U_k, x .

Заметим, что требование существования непрерывного стационарного решения в окрестности критической точки не налагает дополнительных условий на функции f^μ ($\mu = 2, \dots, n$), поэтому в дальнейшем для простоты будем считать их непрерывными и дифференцируемыми во всей рассматриваемой области, в том числе и в точках, где $c^1 = 0$.

2. Предположим, что стационарное решение $U_j(x)$ слабо возмущено, т. е. решение уравнений (1.1) $u_j(x, t)$ представляет собой сумму решений $U_j(x) + u_j^*(x, t)$, где $u_j^*(x, t)$ — малое нестационарное возмущение. Рассмотрим поведение решения $u_j(x, t)$ системы уравнений (1.1) в малой окрестности (размера δ) критической точки $x = 0$, в которой $c^1 = 0$ и $U_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

В этом пункте будем исследовать случай разрывной функции f^1 , соответствующий условиям (1.4).

Обозначим через l_{j0}^i предельные значения величин l_j^i при $x = 0, u_k = 0$ и введем новые переменные

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w_i(x, t) &= l_{j0}^i u_j, \quad u_j = r_{jk} w_k \\ r_{jk} &= (l_{j0}^k)^{-1} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Вследствие того что решение уравнений (1.1) рассматривается в малой окрестности критической точки величины $u_j(x, t)$, а следовательно, и $w_i(x, t)$ малы. Предположим, что величина $w_1 \equiv w$ имеет порядок $\sqrt{\delta}$, а величины $w_\mu(x, t), w_{\mu 0}(t)$, ($\mu = 2, \dots, n$), где $w_{\mu 0}(t) = w_\mu(0, t)$, имеют порядок δ . Величину характерного масштаба времени будем считать порядка $\sqrt{\delta}$. Эти важные и нетривиальные предположения подтвердятся в дальнейшем для решений, сосредоточенных вблизи критической точки при выполнении условий (1.4).

Разложим в ряды по w_k и x коэффициенты и правые части уравнений (1.1), сохраняя при записи главные члены

$$(2.2) \quad (l_{j0}^1 + l_{j1}^1 w) \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + (c_k^1 w_k + c_x^1 x + c_{11}^1 w^2) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = f_0^1 + f_1^1 w$$

$$(2.3) \quad (l_{j0}^\mu + l_{j1}^\mu w) \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + (c_0^\mu + c_1^\mu w) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = f_0^\mu$$

$$(i, j, k = 1, 2, \dots, n, \mu = 2, \dots, n)$$

$$l_{j0}^i = l_j^i(0, 0), \quad l_{j1}^i = \frac{\partial l_j^i}{\partial w}(0, 0), \quad c_0^\mu = c^\mu(0, 0)$$

$$c_k^i = \frac{\partial c^i}{\partial w_k}(0, 0), \quad c_{11}^1 = \frac{\partial^2 c^1}{\partial w^2}(0, 0), \quad c_x^1 = \frac{\partial c^1}{\partial x}(0, 0)$$

$$f_0^i = f^i(0, 0), \quad f_1^1 = \frac{\partial f^1}{\partial w}(0, 0)$$

Обозначение $(0, 0)$ показывает, что соответствующая величина вычислена в критической точке, где $x = 0, U_j = 0$.

В силу того что величины f_0^1 и f_1^1 принимают разные значения справа и слева от критической точки, уравнение (2.2) будем рассматривать отдельно — справа и слева от точки $x = 0$.

Далее всюду будем считать, не оговаривая этого каждый раз, что латинские индексы меняются от 1 до n , а греческие — от 2 до n .

Выражая du_j/dt и du_j/dx через dw_k/dt и dw_k/dx по формулам (2.1), получим вместо (2.3)

$$(2.4) \quad \frac{\partial w_\mu}{\partial t} + c_0^\mu \frac{\partial w_\mu}{\partial x} = f_0^\mu - c_0^\mu \sum_{j=1}^n l_{j1}^\mu r_{j1} w \frac{\partial w}{\partial x}$$

Сохраняя в уравнениях (2.4) только члены порядка единицы, можно найти квазистационарное решение этих уравнений, пренебрегая производной по времени, которая имеет порядок δ . Интегрируя (2.4), получим

$$(2.5) \quad w_\mu = a_\mu x + b_\mu w^2 + w_{\mu 0}(t)$$

$$a_\mu = \frac{f_0^\mu}{c_0^\mu}, \quad b_\mu = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n l_{j1}^\mu r_{j1}$$

Используем решения (2.5) для преобразования уравнений (2.2). Сохраняя в (2.2) члены порядка единицы и порядка $\sqrt{\delta}$, получим

$$(2.6) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + [c_1^1 w + s x + r w^2 + \varphi(t)] \frac{\partial w}{\partial x} = f_0^1 + \chi w$$

$$s = c_x^1 + \sum_{\mu=2}^n c_\mu^1 a_\mu, \quad r = c_{11}^1 + \sum_{\mu=2}^n c_\mu^1 b_\mu$$

$$\varphi(t) = \sum_{\mu=2}^n c_\mu^1 w_{\mu 0}(t), \quad \chi = f_1^1 - f_0^1 \sum_{j=1}^n l_{j1}^1 r_{j1}$$

Приведем уравнение (2.6) к более простому виду, для чего введем новую переменную

$$(2.7) \quad c = c_1^1 w + s x + r w^2$$

Умножив уравнение (2.6) на выражение $c_1^1 + 2rw$, получим

$$(2.8) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + [c + \varphi(t)] \frac{\partial c}{\partial x} = \gamma + \alpha c + s\varphi(t)$$

$$\gamma = f_0^1 c_1^1, \quad \alpha = f_1^1 + s + f_0^1 \left(\frac{2r}{c_1^1} - \sum_{j=1}^n l_{j1}^1 r_{j1} \right)$$

Здесь также предполагается, что уравнение (2.8) записано слева и справа от точки $x = 0$.

Заметим, что во многих случаях функции $w_{\mu 0}(t)$ и, следовательно, $\varphi(t)$ можно считать равными нулю, поскольку эти величины определяются приходящими к окрестности критической точки возмущениями, связанными с характеристическими скоростями $c^\mu \neq 0$. Во всяком случае, если $\varphi(t)$ и $d\varphi/dt$ малы, что верно для широкого круга задач, то, переобозначая через c выражение $c + \varphi(t)$ и пренебрегая в правой части уравнения (2.8) членами, содержащими $\varphi(t)$ и $d\varphi/dt$, получим

$$(2.9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = \gamma + \alpha c$$

Уравнение (2.9) описывает как нестационарные, так и стационарные решения в окрестности критической точки $x = 0$.

Рассмотрим сначала стационарные решения этого уравнения. Интегрируя (2.9) при $\partial c/\partial t = 0$, получим

$$(2.10) \quad x = \frac{1}{2\gamma} c^2 - \frac{\alpha}{2\gamma^2} c^3 + \text{const}$$

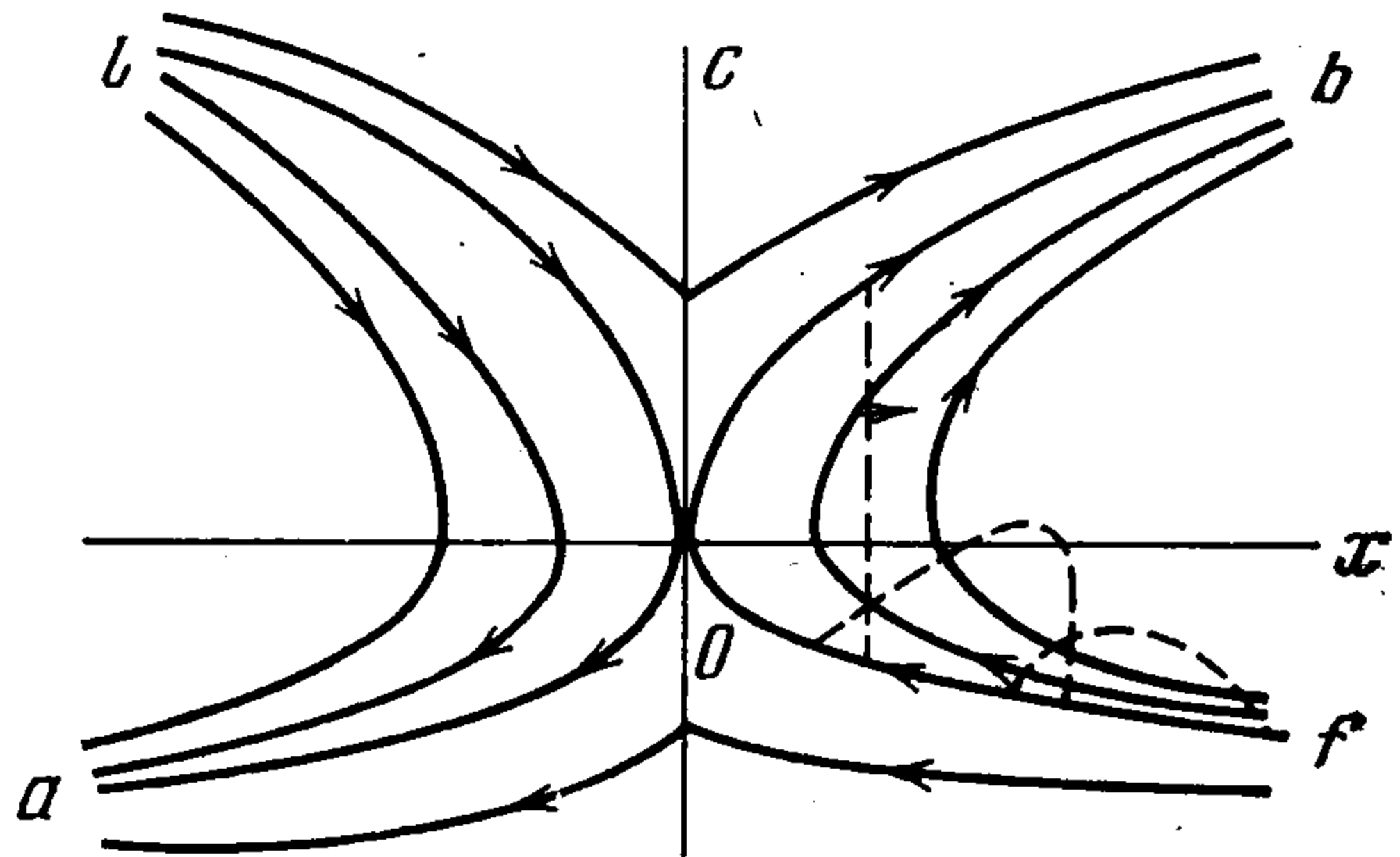
Отсюда видно, что для прохождения решения через критическую точку $x = 0, c = 0$ необходимо, чтобы постоянная в выражении (2.10) равнялась нулю и выполнялись неравенства

$$(2.11) \quad \gamma_- < 0, \gamma_+ > 0$$

Индексы минус и плюс приписаны величинам слева и справа от критической точки соответственно. Условие (2.11) уточняет ранее выписанное условие (1.4).

Картина интегральных кривых изображена на фигуре. Для определенности выбрано $\alpha_- < 0, \alpha_+ > 0$. Легко представить изменение картины интегральных кривых при других сочетаниях значений α слева и справа от критической точки.

Если выбрать решение, проходящее через критическую точку, то из (2.10) можно подсчитать, что характеристики уравнения (2.9) проходят половину окрестности критической точки размером δ за время порядка $\sqrt{\delta}$, которое и было принято за характерное время изменения решения. Таким же будет и время линейного опрокидывания возмущения, описываемого уравнением (2.9), если его амплитуда имеет порядок $\sqrt{\delta}$, а характерная длина порядка δ . Вид стационарного решения (2.10) и связь c и w по формуле (2.7) подтверждают сделанные ранее предположения о порядке величины w в окрестности начала координат. Очевидно, что существует класс нестационарных решений с теми же порядками величин. Равенство (2.5) подтверждает справедливость ранее сделанного предположения о том, что величины $w_\mu(x, t)$ имеют порядок δ , если $w_{\mu 0}(t)$ тоже порядка δ .



3. Сравним уравнение (2.8) с соответствующим уравнением работы [1], полученным для описания решения в малой окрестности критической точки при не прерывных правых частях уравнений (1.1)

$$(3.1) \quad \frac{\partial c_*}{\partial t} + [c_* + \varphi(t)] \frac{\partial c_*}{\partial x} = \alpha c_* + \beta x + f(t)$$

$$c_* = c_1^1 w + s x, \quad \alpha_* = f_1^1 + s, \quad \beta_* = (f_x^1 + \sum_{\mu=2}^n f_\mu^1 a_\mu) c_1^1 - f_1^1 s$$

$$s = c_x^1 + \sum_{\mu=2}^n c_\mu^1 a_\mu, \quad f(t) = s \varphi(t) + c_1^1 \sum_{\mu=2}^n f_\mu^1 w_{\mu 0}(t)$$

Выражения для c_* , α , β , $f(t)$ даны в обозначениях, принятых в этой статье, выражения для s и $\varphi(t)$ совпадают с соответствующими обозначениями в формуле (2.6).

Из сравнения (2.8) и (3.1) следует, что оба случая — непрерывной и разрывной функции f^1 — можно обобщить, если считать связь w и c всегда заданной равенством (2.7), а уравнение для определения c в δ -окрестности критической точки записать в виде

$$(3.2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + [c + \varphi(t)] \frac{\partial c}{\partial x} = \gamma + \alpha c + \beta x + F(t)$$

$$F(t) = s \varphi(t) (\gamma \neq 0), \quad F(t) = f^1(t) (\gamma = 0)$$

При $\gamma \neq 0$ член βx мал по сравнению с γ и αc , и им можно пренебречь, а при $\gamma = 0$, т. е. при непрерывной функции f^1 ($f_0^1 = 0$ в соответствии с

условием (1.3)), можно пренебречь в выражении (2.7) членом rw^2 , который мал по сравнению со слагаемыми пропорциональными w и x .

Функция $\varphi(t)$ одинакова в уравнениях (2.8) и (3.1), однако, как было сказано в п. 2, ее можно исключить из уравнения (2.8), а как было показано в [1], из уравнения (3.1) можно исключить функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ путем введения новых переменных $c(x, t) - c^\circ(t)$ и $x(t) - x^\circ(t)$, где $c^\circ(t)$ и $x^\circ(t)$ — частные решения системы дифференциальных уравнений

$$dc^\circ/dt = \alpha c^\circ + \beta x^\circ + f(t), \quad dx^\circ/dt = c^\circ + \varphi(t)$$

Таким образом, записывая уравнение для c в виде (3.2), а связь между c и w в виде (2.7), получаем уравнение, описывающее решение в окрестности любой критической точки, причем уравнение (3.2) может рассматриваться и при выполнении условий

$$(3.3) \quad F(t) = \varphi(t) = 0$$

Решение уравнения (3.2) может быть найдено интегрированием вдоль характеристик системы уравнений

$$(3.4) \quad \frac{dc}{dt} = \gamma + \alpha c + \beta x + F(t), \quad \frac{dx}{dt} = c + \varphi(t)$$

Уравнения (3.4) описывают как нестационарные, так и стационарные решения. Для стационарного случая система (3.4) при условии (3.3) дает решение для $c(x)$ в параметрической форме $c = c(t)$, $x = x(t)$.

В случае образования неоднозначных по x решений нужно вводить разрывы так же, как в [2], чтобы их введение не изменяло величины $\int c dx$ что делалось и в [1].

Из уравнения (3.2) можно получить уравнение для нахождения малого нестационарного возмущения $c^*(x, t) = c(x, t) - C(x)$ стационарного решения $C(x)$

$$(3.5) \quad \frac{\partial c^*}{\partial t} + [C(x) + c^* + \varphi(t)] \frac{\partial c^*}{\partial x} = \left(\alpha - \frac{dC}{dx} \right) c^* + F(t) - \varphi(t) \frac{dC}{dx}$$

Согласно (2.7), величина c^* связана с величиной $w^* = w - W(x)$, $W(x) = l_{j0}^1 U_j(x)$ соотношением

$$(3.6) \quad c^* = c_1^1 w^* + (2rW + w^*) w^*$$

Второе слагаемое в (3.6) много меньше первого.

В малой окрестности точки $x = 0$ поведение возмущений c^* и $w_\mu^* = w_\mu(x, t) - W_\mu(x)$, $W_\mu(x) = l_{j0}^\mu U_j(x)$ описывается уравнением (3.5) и выражениями

$$(3.7) \quad w_\mu^* = b_\mu w^* (2W(x) + w^*) + w_{\mu 0}(t)$$

которые следуют из (2.5), а вне окрестности точки $x = 0$ можно пользоваться обычным образом линеаризованной системой уравнений (1.1), которую запишем относительно функций w_j^* в виде

$$(3.8) \quad l_i^m(x, U_k) r_{ij} \left[\frac{\partial w_j^*}{\partial t} + C^m(x, U_k) \frac{\partial w_j^*}{\partial x} \right] = \chi_k^m(x) w_k^*$$

$$w_j^* = l_{jk}(0, 0) u_k^*, \quad u_k^* = r_{kj} w_j^*, \quad u_k^* = u_k(x, t) - U_k(x)$$

$$\chi_k^m = \left[\frac{\partial f^m}{\partial u_j} - \frac{\partial (l_i^m c^m)}{\partial u_j} \frac{dU_i}{dx} \right] r_{jk}$$

$$(i, j, k, m = 1, 2, \dots, n)$$

Уравнения (3.8) для w_μ^* ($\mu = 2, \dots, n$) справедливы во всей области изменения x , включая окрестность критической точки, но при этом в силу

линейности (3.8) в выражении (3.7) будет пропущен член, содержащий w^{*2} , который пренебрежимо мал в окрестности критической точки при $\gamma = 0$ ($f_0^1 = 0$) и вне ее. Член, содержащий w^{*2} , нужно добавлять к решению для w_μ^* , если требуется его уточнение вблизи критической точки при $\gamma \neq 0$.

Уравнения (3.5) и (3.8) необходимы для решения задачи на устойчивость на всем отрезке по x ($-L_1 \leq x \leq L_2$), где существует и рассматривается стационарное решение $U_j(x)$ системы уравнений (1.1). Критическая точка $x = 0$ в зависимости от постановки задачи может совпадать с правой или левой границей отрезка по x или содержаться внутри него. Для исследования устойчивости решения $U_j(x)$ на всем отрезке должны быть еще заданы условия отражения возмущений $w_j^*(x, t)$ от границы $x = -L_1$ или $x = L_2$ или от той и другой одновременно. При этом число граничных условий, как известно [3], должно соответствовать слева числу положительных характеристик скоростей, а справа — числу отрицательных характеристических скоростей системы (1.1).

Введем здесь, так же, как и в [1], в качестве характеристики поведения малых возмущений в окрестности точки $x = 0, c = 0$ площадь возмущения

$$(3.9) \quad S = \int_{x_1}^{x_2} c^*(x, t) dx, \quad c^*(x, t) = c(x, t) - C(x)$$

Так как вводимые в решение разрывы не меняют площади возмущения, а эволюция решения описывается уравнениями (3.4), то изменение площади возмущения S по времени определяется дивергенцией вектора, составленного из правых частей уравнений (3.4).

$$(3.10) \quad \frac{dS}{dt} = S \left[\frac{\partial}{\partial x} (c + \varphi(t)) + \frac{\partial}{\partial c} (\gamma + \alpha c + \beta x + F(t)) \right] = \alpha S$$

$$S(t) = S(0) \exp[\alpha t]$$

Формула (3.10) получена в предположении, что интегрирование (3.9) ведется по области, вне которой $c^*(x, t) = 0$.

Если $c^*(x, t) \neq 0$ и вне интервала интегрирования (x_1, x_2) , то в формулу (3.10) необходимо добавить еще приток площади q

$$(3.11) \quad \frac{dS}{dt} = \alpha S + q, \quad q(x, t) = \int_{C(x)}^{C(x)+c^*(x, t)} c dc$$

$$q = q(x_2, t) - q(x_1, t) = \left[C(x_2) c^*(x_2, t) + \frac{1}{2} c^{*2}(x_2, t) \right] -$$

$$- \left[C(x_1) c^*(x_1, t) + \frac{1}{2} c^{*2}(x_1, t) \right]$$

В работе [1] на основе уравнений (3.4), (3.3) проведено исследование поведения возмущений стационарных решений, проходящих через особые точки, т. е. при условиях $\gamma_\pm = 0, \alpha_+ = \alpha_-, \beta_+ = \beta_-$.

Здесь рассмотрим поведение возмущений стационарных решений, проходящих через критическую точку, при условии, что функция f^1 разрывна. В уравнениях (3.4) в этом случае $\gamma_- < 0, \gamma_+ > 0, \alpha_- \neq \alpha_+$, а величины $\beta x, F(t)$ и $\varphi(t)$ малы по сравнению с членами, содержащими γ и c .

Картина интегральных кривых при $\gamma \neq 0, \alpha_- \neq \alpha_+$ приведена на фигуре и напоминает деформированное седло. Стрелками вдоль интегральных кривых указано направление роста t .

В этом случае имеется четыре решения, проходящих через точку $x = 0, c = 0$: aob, lof, lob и aof . Рассмотрим развитие возмущений на решении lof . Характеристики на решении lof сходятся к точке $x = 0, c = 0$, а возмущения этого решения, согласно (3.4), принимают со временем форму криволинейного треугольника, расположенного между кривыми lob или aol , в зависимости от знака возмущения, и ограниченного разрывом соответственно справа или слева (фигура).

При отсутствии притока площади q площадь криволинейного треугольника, расположенного справа от критической точки ($c^* > 0$), будет изменяться, как $\exp \alpha_+ t$, а площадь треугольника, расположенного слева от критической точки ($c^* < 0$), как $\exp \alpha_- t$. На фиг. представлена эволюция во времени ($t_1 < t_2 < t_3$) положительного ($c^* > 0$) возмущения решения lof , движущегося в отрицательном направлении оси x при $\alpha_+ > 0$. Передний фронт этого возмущения за время $t \sim \sqrt{\delta_0}$, где δ_0 — координата переднего фронта при $t = 0$, достигает критической точки, а задний его фронт превращается в слабую ударную волну, скорость распространения которого равна полусумме характеристических скоростей перед и за разрывом. В силу того что $\alpha_+ > 0$ — разрыв, начиная с некоторого момента времени будет двигаться в положительном направлении оси x , как показано на фигуре. При $\alpha_+ < 0$ разрыв будет двигаться по направлению к точке $x = 0, c = 0$, что приведет к затуханию возмущения.

Аналогичным образом будет развиваться отрицательное возмущение решения lof , движущееся по интегральной кривой fo к точке 0 , с тем отличием, что слабым разрывом станет передний фронт этого возмущения, и за конечное время оно примет форму криволинейного треугольника слева от критической точки; с этого момента его развитие будет определяться коэффициентом α_- . В зависимости от знака α_- слабый разрыв будет двигаться в отрицательном направлении оси x ($\alpha_- > 0$), что означает рост возмущения, или в положительном направлении оси x ($\alpha_- < 0$) к критической точке, что приведет к затуханию возмущения.

Если положительное возмущение движется по интегральной кривой lo к критической точке, то в этом случае слабым разрывом станет его передний фронт. Со временем это возмущение превратится в криволинейный треугольник справа от критической точки и дальнейшая его эволюция будет определяться знаком α_+ .

Отрицательное возмущение, движущееся по интегральной кривой lo , со временем превратится в криволинейный треугольник слева от критической точки, и его рост или затухание будет определяться знаком α_- .

Рассмотрим теперь развитие положительного возмущения решения aob . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = 0, c = 0$ амплитуда этого возмущения отлична от нуля. Так как любая точка на характеристике lo за конечное время порядка $\sqrt{\delta_0}$ достигает точки o , то за это же время амплитуда этого возмущения станет равной нулю в критической точке и в результате все возмущение за время

$$t \sim \int_0^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\delta$$

покинет δ -окрестность критической точки. То же произойдет и с отрицательным возмущением решения aob .

Таким же образом можно рассмотреть развитие положительных и отрицательных возмущений решений lob и aof . Любое начальное возмущение этих решений покидает δ -окрестность критической точки за конечное время t порядка $\sqrt{\delta}$, что существенно отличает решения aob, lob и aof от решения lof , где возмущения всегда задерживаются критической точкой.

На основе проведенного анализа можно представить случай, когда критическая точка совпадает с левым или правым концом отрезка по x .

4. Исследование развития возмущений, проведенное в п. 3 и в [1], предполагает отсутствие притока площади возмущения, который может оказаться существенным и повлиять на заключения о росте или убывании возмущений в окрестности критической точки. Покажем это.

Рассмотрим взаимодействие возмущения $c^*(x, t)$ или $w^*(x, t) = w(x, t) - W(x)$ с возмущениями, распространяющимися с характеристическими скоростями c^μ , отличными от нуля в критической точке. Это позволит оценить величину притока площади q в равенстве (3.11), которая может представлять собой отраженный сигнал, порожденный возмущениями, распространяющимися с характеристическими скоростями c^μ .

Наибольший интерес здесь представляет случай, когда сами эти возмущения порождаются возмущением $w^*(x, t)$. Поэтому ниже будет предполагаться, что указанные возмущения имеют порядок величины, равный их изменениям в окрестности критической точки, а характерное время изменения этих возмущений совпадает с характерным временем изменения $w^*(x, t)$.

Вычислим более точно, чем в равенстве (3.7), поведение величин w_μ^* . В (3.7) первый член правой части содержит в себе возмущение, выражающееся через w^* , и, следовательно, распространяющееся со скоростью c , и только второй член может соответствовать возмущениям, распространяющимся с другими характеристическими скоростями. Для уточнения выражения (3.7) вернемся к системе уравнений (1.1) и рассмотрим уравнения для i от 2 до n , выразив величины u_j через w_k согласно (2.1)

$$(4.1) \quad (\delta_k^\mu + a_k^\mu) \left(\frac{\partial w_k}{\partial t} + c^\mu \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) = f^\mu, \quad \delta_k^\mu + a_k^\mu = l_j^\mu r_{jk}$$

В (4.1) символ Кронекера $\delta_k^\mu = 1$ при $\mu = k$, $\delta_k^\mu = 0$ при $\mu \neq k$, функции a_k^μ зависят от w_i и x и обращаются в нуль в критической точке.

Разрешим эти уравнения относительно производных по x от w_μ и получим

$$(4.2) \quad \frac{\partial w_\mu}{\partial x} = -\frac{1}{c^\mu} \frac{\partial w_\mu}{\partial t} + A_{\mu\nu} \frac{\partial w_\nu}{\partial t} + F_\mu + B_\mu \frac{\partial w}{\partial t} + D_\mu \frac{\partial w}{\partial x}$$

Здесь $A_{\mu\nu}$, B_μ , D_μ — функции w_k и x , обращающиеся в нуль при нулевых значениях аргументов, функции F_μ линейно выражаются через f^μ .

Разложим все эти функции в окрестности критической точки в ряды по w_k и x . Найдем величину dw/dt из формулы (2.6), а w_ν — из (2.5) и подставим в правую часть выражения (4.2), пренебрегая при этом членами $w_{\mu 0}^\mu(t)$, которые, как будет показано ниже, при сделанных в начале этого пункта предположениях дают поправки более высокого порядка малости, чем остальные члены в (2.5) и (2.6). Ограничиваясь несколькими первыми членами разложений, получим

$$(4.3) \quad \frac{\partial w_\mu}{\partial x} = a_\mu + b_\mu w + e_\mu x + (g_\mu w + h_\mu w^2 + k_\mu x) \frac{\partial w}{\partial x}$$

Здесь a_μ , b_μ , e_μ , g_μ , h_μ , k_μ — постоянные коэффициенты разложения.

С использованием интегрирования по частям выпишем уточненное выражение для w_μ

$$(4.4) \quad w_\mu = a_\mu x + \frac{1}{2} e_\mu x^2 + (b_\mu - k_\mu) \int_0^x W(x) dx + \\ + g_\mu \frac{w^2}{2} + h_\mu \frac{w^3}{3} + k_\mu x w + v_\mu \\ v_\mu = (b_\mu - k_\mu) \int_0^x w^* dx + p_\mu(t)$$

($p_\mu(t)$ — производная функция, зависящая только от времени).

При наличии разрывов у функции w последнее равенство остается верным, так как интегрирование через разрыв можно проводить считая dw/dx обобщенной функцией. Это утверждение основано на том, что изменение величин на разрыве с точностью до третьего порядка малости по амплитуде разрыва совпадает с их изменением в некоторой простой волне [2], аппроксимирующей разрыв в данный момент времени.

Неучтенные члены в равенстве (4.3) дают ошибку порядка δ^2 , а в равенстве (4.4) эта ошибка будет соответственно иметь порядок δ^3 , если изучается случай $\gamma = 0$, когда величина w имеет порядок δ и dw/dx — порядок единицы. При $\gamma \neq 0$, когда w и dw/dx — величины порядка $\delta^{1/2}$ и $\delta^{-1/2}$ соответственно, ошибка в равенстве (4.3) за счет отброшенных членов оказывается порядка δ , а в равенстве (4.4) — порядка δ^2 .

В правой части равенства (4.4) все члены, кроме последнего, выражаются через x и w в текущей точке и, следовательно, относятся или к стационарному фону, или к возмущению, движущемуся со скоростью c .

Выражение v_μ , которое не зависит непосредственно от w^* в рассматриваемой точке, представляет собой возмущение соответствующее другим характеристическим скоростям, в основном — характеристической скорости c^μ .

Согласно предположению, сделанному в начале этого пункта, будем считать, что порядок величины v_μ определяется [первым интегральным членом. Заметим, что v_μ уточняет член $w_{\mu 0}(t)$ в равенстве (2.5). Считая, что величины v_μ и $w_{\mu 0}(t)$ одного порядка, можно убедиться в справедливости пренебрежения членами $w_{\mu 0}(t)$ при выводе уравнений (4.3) как при $\gamma = 0$, так и при $\gamma \neq 0$.

Равенство (4.4) показывает, что возмущение $w^*(x, t)$, находящееся в окрестности критической точки, порождает возмущения v_μ , соответствующие другим характеристическим скоростям, равные по порядку величины площади S , вычисленной по формуле (3.9).

Считая, что критическая точка находится на конечном расстоянии от границ отрезка, где условия отражения волн задаются с конечными коэффициентами, и взаимопревращение волн внутри отрезка не меняет существенно порядка их величин легко понять, что приток площади q определяется значением v_μ .

Отсюда следует, что q имеет порядок $\alpha_1 S$, где α_1 — конечное число, не зависящее от δ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 593—602.
2. Lax P. D. Hyperbolic Systems of Conservations Laws II. — Commun. Pure and Appl. Math., 1957, v. 10, No. 4, p. 537—566.
3. Hersch R. Boundary Conditions for equations of evolutions. — Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1964, v. 16, No. 4, p. 243—264.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1982