Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 533.6.011

О ПОВЕДЕНИИ ДВУМЕРНЫХ НЕПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕВЯЗКОГО ГАЗА

Крайко А. Н.

Исследуется поведение во времени двумерных течений невязкого газа с отличными от нуля нормальной к плоскости независимых переменных компонентой скорости и параллельными этой плоскости компонентами вихря. Уравнения таких течений образуют две подсистемы. Первая описывает плоскопараллельное («первичное») течение без третьей компоненты скорости и не зависит от второй, состоящей из одного уравнения для третьей компоненты скорости и определяющей «вторичный» поток. Достаточно полный анализ рассматриваемых течений удается провести без численного интегрирования, вносящего неизбежные погрешности, и линеаризации, которые в той или иной степени привлекаются при изучении эволюции вихревых структур (см. [1—6]). В то же время простота исследуемых течений позволяет легко демонстрировать, по-видимому, весьма общие, хотя и не очевидные свойства такой «детерминированной» системы, как система уравнений Эйлера. К подобным свойствам относятся неограниченный рост завихренности, возникновение тангенциальных разрывов, не обусловленных пересечениями ударных волн, и «плохая прогнозируемость» [4]. Перечисленные свойства, проявляющиеся при сколь угодно гладких начальных распределениях, связаны с кинематикой жидких линий.

Рассмотрены первичные течения трех типов: зависящие от двух координат x и y и от времени t; одномерные нестационарные, зависящие от x и t, но имеющие две компоненты скорости; и двумерные стационарные, зависящие только от x и y. Вторичное течение (третья компонента скорости) всегда зависит от x, y и t. В первом случае при помощи подхода, развитого в [7], показан неограниченный рост завихренности вдоль некоторых траекторий, принадлежащих границе течения. В [7] для плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости аналогичный результат установлен для градиента единственной компоненты вихря, а для пространственного потока — и для самого вихря, однако при условии, что траектория частицы прямолинейна и принадлежит плоской границе. Если первичное течение одномерно или стационарно, то конечные соотношения, полученные ниже, дают эволюцию завихренности (в том числе, ее неограниченный рост при $t \to \infty$) для всего потока. Пример возникновения тангенциального разрыва построен для стационарного первичного течения. В этом же случае построено течение, у которого при сколь угодно гладких начальных данных любые пространственные моменты (корреляционные функции) отличны от нуля лишь на множествах нулевой меры.

1. Пусть $\mathbf{q}$ — вектор скорости, ρ — плотность и p — давление газа, а $\mathbf{F}$ — внешняя массовая сила. Тогда уравнение движения невязкой сжимаемой или несжимаемой среды имеет вид

$$d\mathbf{q} / dt = -\rho^{-1}\nabla p + \mathbf{F} \quad (d / dt = \partial / \partial t + \mathbf{q}\nabla) \tag{1.1}$$

где d / dt — полная производная по t вдоль траектории частиц газа.

Если $\mathbf{F} = -\nabla U$, т. е. сила потенциальна, а среда двухпараметрична, причем, как при термодинамическом равновесии, $T ds = di - (1 / \rho)\, dp$, где T — абсолютная температура, s — удельная энтропия и i — удельная энтальпия, то (1.1) можно переписать в виде

$$\partial\mathbf{q} / \partial t - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} = T\nabla s - \nabla I \tag{1.2}$$

$$(\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{q},\ 2I = 2i + q^2 + U,\ q = |\mathbf{q}|)$$

Взяв от (1.2) операцию rot, придем к уравнению Гельмгольца в форме

$$d\boldsymbol{\omega} / dt = \nabla T \times \nabla s + (\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{q} \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) — (1.3) справедливы вне зависимости от конкретного вида уравнения энергии. Более того, даже переход к уравнению

(1.4) $$d\boldsymbol{\omega} / dt = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{q}$$

которое используется далее вместо (1.3), не налагает на форму уравнения энергии достаточно жестких ограничений.

Действительно, замена (1.3) на (1.4) законна для произвольных «баротропных» течений, реализация которых отнюдь не требует обязательного отсутствия (наряду с вязкостью) теплопроводности и других диссипативных процессов. Так, уравнение (1.4) справедливо для изотермических течений, реализующихся, напротив, при интенсивном подводе (отводе) тепла. Для несжимаемой жидкости (1.4) с $\nabla\mathbf{q} = 0$ — результат (1.1) при потенциальной внешней силе. Для безударных течений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа их изэнтропичность и уравнение (1.4) — естественные следствия уравнения энергии и однородных начальных полей s.

Дальнейший анализ ограничен двумерными неплоскопараллельными течениями, все параметры которых не зависят от переменной z декартовой системы координат xyz. Если u, v и w — проекции $\mathbf{q}$ на ее оси, а ω_x, ω_y и ω_z — аналогичные компоненты $\boldsymbol{\omega}$, то для таких течений

(1.5) $$\omega_x = \partial w / \partial y, \quad \omega_y = \partial w / \partial x, \quad \omega_z = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$$

Пусть $\mathbf{V}$ — проекция $\mathbf{q}$ на плоскость xy. Так как w не зависит от z, то $\nabla\mathbf{q} = \nabla\mathbf{V}$ и полное уравнение неразрывности сводится к уравнению неразрывности первичного плоскопараллельного потока, т. е.

(1.6) $$d\rho / dt + \rho\nabla\mathbf{q} \equiv d\rho / dt + \rho\nabla\mathbf{V} = 0$$

Переход от первой ко второй записи (1.6) есть одна из предпосылок, делающих возможным разбиение течения на первичное и вторичное. Прочие предпосылки сводятся к отсутствию w в уравнении энергии (для идеального газа это так) и к независимости от w проекций F_x и F_y силы $\mathbf{F}$ на оси x и y. Наконец, в рассматриваемых течениях $\mathbf{F}$ не зависит от z, а уравнение, определяющее вторичное течение, т. е. проекция (1.1) на ось z имеет вид

(1.7) $$dw / dt = F_z$$

При $F_z = 0$ из (1.7) следует сохранение w в частице.

2. Посмотрим сначала, как изменяется $\boldsymbol{\omega}$ вдоль траекторий, лежащих на неподвижных непроницаемых границах. Для этого в каждой точке границы введем тройку ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, и $\mathbf{k}$, из которых $\mathbf{k}$ — орт оси z, $\boldsymbol{\tau}$ касается границы (направления $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{V}$ совпадают) и $\mathbf{n}$ нормален к ней. Проекции $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ обозначим через ω_τ и ω_n. В переменных τn уравнение неразрывности (1.6) примет вид

$$\nabla\mathbf{q} \equiv \nabla\mathbf{V} \equiv \partial V / \partial\tau + V\partial\vartheta / \partial n = -\rho^{-1}d\rho / dt$$

где $V = |\mathbf{V}|$, а ϑ — угол между $\mathbf{V}$ и осью x. С учетом этого из (1.4) следуют уравнения

(2.1) $$d\omega_\tau / dt = \omega_\tau\partial V / \partial\tau + (\omega_\tau / \rho)\, d\rho / dt + \omega_n (2VK - \omega_z)$$
$$d\omega_n / dt = -\omega_n\partial V / \partial\tau, \quad d\omega_z / dt = (\omega_z / \rho)\, d\rho / dt$$

Здесь $K = (\partial\vartheta / \partial\tau)_{n=0}$ — кривизна границы. Из последнего уравнения получим известный интеграл

(2.2) $$\omega_z = \omega_{z0}\rho / \rho_0$$

в котором нуль приписан величинам в точке, где частица находилась при $t = 0$. Согласно (2.2), завихренность первичного течения, как и должно быть, не зависит от вторичного потока. Напротив, завихренность вторичного потока зависит от параметров первичного.

Сложим первое уравнение (2.1), умноженное на ω_n, со вторым, умноженным на ω_τ, и из результата при помощи уравнения неразрывности исключим $\nabla V = \partial V / \partial \tau + V \partial \vartheta / \partial n$, а при помощи (2.2) $-\omega_z$. В итоге придем к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_n \omega_\tau}{\rho}\right) = \omega_n^2 \chi \qquad \left(\chi = 2\frac{VK}{\rho} - \frac{\omega_{z0}}{\rho_0}\right) \tag{2.3}$$

в котором χ определяется по параметрам первичного течения.

Пусть вдоль рассматриваемой траектории χ нигде не обращается в нуль. Последнее при $\omega_{z0} \neq 0$ выполняется, например, на плоских границах, где $K = 0$, а $\chi = \mathrm{const}$, однако не только на них. В таких ситуациях (2.3) можно записать в форме

$$d(fg) / dt = f^2, \quad f = \omega_n \sqrt{|\chi|}, \quad g = (\omega_\tau \operatorname{sign} \chi) / (\rho \sqrt{|\chi|}) \tag{2.4}$$

Компоненты ω_τ и ω_n, связанные с ω_x и ω_y равенствами

$$\omega_\tau = \omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta, \quad \omega_n = \omega_y \cos \vartheta - \omega_x \sin \vartheta$$

характеризуют согласно (1.5) завихренность вторичного потока. Поскольку он не влияет на первичное течение, то начальное (при $t = 0$) распределение $w(x, y, 0) \equiv w_0(x, y)$ и как результат значения $\omega_{\tau 0}$ и ω_{n0} в начальной точке траектории не изменяют χ и ρ вдоль нее. Воспользовавшись произволом в выборе функции $w_0(x, y)$, возьмем ее такой, чтобы в начальной точке произведение $f_0 g_0 \equiv \omega_{\tau 0} \omega_{n0} (\operatorname{sign} \chi) / \rho_0$ было положительным. Тогда в силу леммы, доказанной в [7], $f^2 + g^2$, а поэтому (для $0 < |\chi| < N < \infty$, что как правило, выполняется) и $\omega_\tau^2 + \omega_n^2$ при $t \to \infty$ растет неограничено. Так как в рассмотренных случаях при $V \not\equiv \mathrm{const}$ даже для $K = 0$ траектории криволинейны, то описанная ситуация отличается от примера из [7] с прямолинейной траекторией на плоской стенке.

3. Если первичное течение с отличными от нуля u и v одномерно, т. е. все его параметры — функции только x и t, то изменение $\boldsymbol{\omega}$ легко проследить для всех частиц, а не только для движущихся по непроницаемым границам. Действительно, пусть $w = w(x, y, t)$, а остальные параметры от y не зависят. В силу (1.1) это, в частности, означает, что F_x и F_y не зависят от y, хотя F_z может быть функцией и y. Ограничившись случаем потенциальной силы, в согласии с (1.4) и (1.6) найдем, что при одномерном первичном потоке

$$d\omega_x / dt = 0, \quad d\omega_y / dt = \omega_x \omega_z + (\omega_y / \rho)\, d\rho / dt$$

а ω_z удовлетворяет (2.2). Отсюда следует, что

$$\omega_x = \omega_{x0}, \quad \omega_y = (\omega_{y0} + \omega_{x0}\omega_{z0} t)\, \rho / \rho_0 \tag{3.1}$$

Первое из полученных равенств становится очевидным, если рассмотреть элементарную жидкую площадку S, принадлежащую при $t = 0$ некоторой плоскости $x = x_0$. В исследованном течении такая площадка, оставаясь плоской, сохраняет ориентацию нормали и площадь, хотя и изменяет свою форму. Отсюда и из неизменности циркуляции по контуру S следует первое равенство (3.1).

Согласно (3.1) и (2.2), для одномерного первичного потока ω_x и ω_z в частице ограничены ($|\omega_z|$ растет пропорционально ρ), а $|\omega_y|$ при $\omega_{x0}\omega_{z0} \neq 0$ растет по t почти линейно (с точностью до изменения ρ).

4. Пусть теперь первичное течение плоскопараллельно и стационарно. Тогда каждую его линию тока можно рассматривать в качестве непроницаемой границы, для которой справедливы равенства (2.1) — (2.4) с вытекающим из них выводом о неограниченном росте $|\boldsymbol{\omega}|$ по t при $\omega_{\tau 0}\omega_{n0}\operatorname{sign}\chi > 0$. Более того, в этом случае, как и в п. 3, удается получить явные формулы, дающие вместе с (2.2) изменение всех компонент вихря вдоль траектории частицы.

Действительно, в силу стационарности первичного потока $\partial V / \partial\tau = (dV / dt) / V$, что позволяет проинтегрировать сначала второе, а затем с учетом найденного интеграла и (2.2) и первое уравнение (2.1). В результате получим

$$\omega_n = \omega_{n0}V_0 / V, \quad \omega_\tau = \left[\frac{\omega_{\tau 0}}{\rho_0 V_0} + \omega_{n0}V_0 \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\chi(\tau, \tau_0)}{V^3(\tau)}\, d\tau\right] \rho V \tag{4.1}$$

Здесь χ — то же, что в (2.3), причем от τ в χ зависит первое слагаемое, а от τ_0 — второе. Первое равенство (4.1) получается также, если по аналогии с п. 3 рассмотреть кинематику элементарного жидкого элемента поверхности тока первичного течения. Поскольку зависимость t от τ в рассматриваемом случае дается равенством

$$t = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{V(\tau)} \tag{4.2}$$

а все параметры первичного течения — известные функции τ, то (2.2), (4.1) и (4.2) описывают эволюцию во времени всех компонент вихря. Так, ω_n неограниченно растет лишь на линиях тока, приходящих в критические точки, вблизи которых $V(\tau) \approx V_0 - \alpha(\tau - \tau_0)$ с положительной константой α. Согласно (4.2) и (4.1), здесь $V \approx V_0 e^{-\alpha t}$ и

$$\omega_n \approx \omega_{n0} e^{\alpha t}, \quad \omega_\tau \approx -(\omega_{n0}\omega_{z0} / (2\alpha))\, e^{\alpha t} \tag{4.3}$$

Точность (4.3) увеличивается с ростом t и с приближением начальной точки к критической.

В общем случае ω_τ — весьма сложная функция t. Однако, если, как чаще всего бывает, интеграл в (4.1) при $\tau \to \infty$ расходится, то $|\omega_\tau|$ при $t \to \infty$ растет неограниченно, хотя и необязательно монотонно. При этом не требуется знакопостоянства χ, что было необходимым элементом доказательства, выполненного в п. 2.

В качестве примера покажем, как ω_τ меняется вдоль траекторий, которые отвечают замкнутым линиям тока, не имеющим критических точек. Для них (4.1) можно записать в виде

$$\omega_\tau(t) = \{F(n) + \Phi(t^\circ)\} R(t^\circ) \tag{4.4}$$

$$n = [t/T], \quad t^\circ = t - nT, \quad R = \rho V, \quad \Phi(t^\circ) = \omega_{n0}V_0 \int\limits_0^{t^\circ} \frac{\chi(t^\circ)}{V^2(t^\circ)}\, dt^\circ$$

$$F(n) = \omega_{\tau 0} / R_0 + n\Phi(T)$$

Здесь T — период (время однократного обхода линии тока), $[f]$ — целая часть f; связь между τ и t, вытекающая из (4.2), предполагается известной (в (4.4) эту связь достаточно иметь лишь для одного периода). В фигурных скобках стоит сумма ступенчатой функции F и разрывной периодической (по t) функции Φ. Разрывы Φ, вызванные скачкообразным уменьшением t° от T до нуля в конце каждого периода по t, компенсируются скачками F. В результате сумма в фигурных скобках дает непрерывную функцию t, которая совершает периодические колебания около прямой $\omega_\tau = F(t / T)$. Непрерывная периодическая по t функция R не вносит принципиальных изменений в поведение $\omega_\tau(t)$, играя роль модулирующего множителя. Для поступательного потока со сдвигом, течения, индуцируемого в безграничном пространстве единичной вихревой нитью, а также для течения Куэтта между соосными вращающимися цилиндрами (как известно, оно удовлетворяет уравнениям Эйлера) «первичные» параметры на каждой линии тока постоянны. Здесь в силу (4.1) и (4.2)

$$\omega_\tau(t) = \omega_{\tau 0} + \omega_{n0}(2VK - \omega_z)_0 t$$

а ω_z и ω_n согласно (2.2) и (4.1) не изменяются.

5. Неограниченный рост завихренности, т. е. производных от компонент вектора скорости свидетельствует о возможности возникновения в первоначально сколь угодно гладком невязком потоке газа или жидкости тангенциальных разрывов, а также демонстрирует «плохую прогнозируемость» нестационарных вихревых течений. Используя двумерные неплоскопараллельные течения, построим примеры, в которых указанные свойства прослеживаются более явно, чем в пп. 2—4.

Начнем с возникновения тангенциального разрыва, для чего в качестве первичного возьмем плоскопараллельное стационарное безотрывное течение около достаточно произвольного несимметричного плоского тела, помещенного в равномерный набегающий поток при $\mathbf{F} = 0$. Если бы в таком течении частицы проходили от передней критической точки к задней вдоль верхней и нижней образующих за разные конечные времена t_+ и t_-, то при $w_0(x, y) \neq \text{const}$ тангенциальный разрыв за телом возникал бы за конечное время. Последнее очевидно, так как при $\mathbf{F} = 0$ согласно (1.7) w в частице сохраняется, а при неравных и конечных $t_\pm$ за телом через конечное время встречались бы частицы, которые в набегающем потоке имели разные значения w. Вместо тела можно рассмотреть цилиндрический «пузырь». При его обтекании, которое может быть и симметричным, тангенциальный разрыв при конечных $t_\pm$ через конечное время возникал бы на граничной линии тока пузыря (внутрь пузыря частицы из набегающего потока не попадают).

Существенным в приведенных рассуждениях была конечность времен $t_\pm$, не имеющая места в действительности. Поэтому в описанных случаях при любом $t < \infty$ вместо разрыва w реализуется переходный слой толщины δ, весьма быстро уменьшающейся при $t \to \infty$ до нуля. Именно, согласно (4.2) при обтекании тела или неподвижного пузыря $\delta \sim e^{-\alpha t}$, где положительные постоянные α, как и в (4.3), определяют поле скоростей первичного течения вблизи критических точек.

Построим теперь пример течения, для которого весьма просто вычисляются пространственные моменты (корреляционные функции), характеризующие в некотором смысле степень упорядоченности (или наоборот неупорядоченности) нестационарного потока. Для этого в качестве первичного возьмем стационарное течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами радиусов r_- и r_+, причем $0 \leqslant r_- < r_+ \leqslant \infty$. В таком течении, удовлетворяющем, как уже упоминалось, уравнениям Эйлера, линии тока — концентрические окружности, а при $\rho \equiv \text{const}$ единственная компонента скорости (окружная) $V = V(r) = Ar + Br^{-1}$, где r — радиальная переменная полярных координат $r\varphi$ в плоскости течения с началом на оси цилиндров, A и B — константы, связанные со скоростями вращения цилиндров. Для дальнейшего существенно лишь то, что V — функция только r, а угловая скорость $\Omega \equiv V / r \not\equiv \text{const}$. Пусть $w_0(r, \varphi)$ — начальное распределение w. Тогда в рассматриваемом случае из (1.7) с $F_z = 0$ найдем, что

(5.1) $$w(r, \varphi, t) = w_0(r, \varphi - \Omega t)$$

Так как w_0 — периодическая функция второго аргумента с периодом 2π, то в силу (5.1) для среднего значения $\langle w \rangle = W$ справедлива формула

$$W(r, \varphi) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t w(r, \varphi, t^\circ)\, dt^\circ = b_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_0(r, \varphi)\, d\varphi$$

где b_0 — нулевой коэффициент разложения $w_0(r, \varphi)$ в ряд Фурье по φ. В согласии с этим и с (5.1) для нестационарной части w, т. е. для пульсации $w' \equiv w - W$, будем иметь

(5.2) $$w'(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(r) \sin n(\varphi - \Omega t) + b_n(r) \cos n(\varphi - \Omega t)\}$$

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_0(r, \varphi) \sin n\varphi\, d\varphi, \quad b_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_0(r\, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi$$

Возьмем в плоскости $r\varphi$ две точки M и M° с координатами r, φ и r°, φ° и найдем двухточечный момент (корреляционную функцию) второго порядка, зависящий еще от временного сдвига τ и по определению равный

$$B_{ww}(M, M^\circ, \tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t w'(r, \varphi, t^\circ)\, w'(r^\circ, \varphi^\circ, t+\tau)\, dt$$

Подставив сюда выражения (5.2) для пульсаций, перемножив их и вычислив интеграл, получим

(5.3)
$$2B_{ww} = \Sigma\, [(a_n a_k^\circ + b_n b_k^\circ) \cos \Phi^- + (a_n b_k^\circ - b_n a_k^\circ) \sin \Phi^-] +$$
$$+ \Sigma\, [(b_n b_k^\circ - a_n a_k^\circ) \cos \Phi^+ + (a_n b_k^\circ + b_n a_k^\circ) \sin \Phi^+]$$
$$(\Phi^\pm = n\varphi \pm k\varphi^\circ \mp k\Omega^\circ \tau)$$

Здесь a_n, b_n, Ω — те же, что и в (5.2), функции r, а a_k°, b_k°, Ω° — такие же функции r°; суммы берутся по целым положительным n и k, которые для данных r и r° удовлетворяют условиям

(5.4)
$$n\Omega(r) \mp k\Omega(r^\circ) = 0$$

где минус (плюс) отвечает первой (второй) сумме в (5.3).

Пусть точка M фиксирована. Тогда B_{ww} будет функцией только M° и τ. При этом, поскольку в (5.3) суммирование ведется не по всем целым положительным n и k, а лишь по тем из них, которые удовлетворяют (5.4), то для фиксированного r момент $B_{ww} = 0$ почти всюду в кольце $r_- \leqslant r^\circ \leqslant r_+$. Исключение составляет множество нулевой меры, представляющее совокупность окружностей, на которых отношение угловых скоростей $\Omega(r) / \Omega(r^\circ) = \pm n / k$ и, кроме того, соответствующие коэффициенты в разложении (5.2) не равны нулю. Если, например, при $r_- \leqslant r \leqslant r_+$ угловая скорость Ω знакопостоянна, а $w_0(r, \varphi) = b_0(r) + a_1(r) \sin \varphi + b_1(r) \cos \varphi$, то $B_{ww} \neq 0$ только на окружности $r^\circ = r$. Аналогичные результаты получаются для двухточечных, трехточечных и т. д. моментов не только второго, но и всех более высоких порядков.

Подчеркнем, что последнее отнюдь не свидетельствует о хаотическом (турбулентном) характере рассмотренного течения и даже полей w'. На самом деле, в данном примере первичный поток ламинарен в обычном смысле, зависимость w' от координат и времени в силу (5.1) полностью детерминирована, а траектория каждой частицы — винтовая линия. Заметим, что если первичное течение, как здесь и в п.4, стационарно, то полные и линеаризованные (относительно стационарного потока) уравнения для w, ω_x, и ω_y или ω_τ и ω_n не различаются, а w везде можно рассматривать в качестве «метки», которая подобно краске идентифицирует частицы. В этом плане отличие w от краски состоит лишь в том, что концентрация краски должна быть достаточно малой, чтобы не влиять на плотность среды, а величина w во всех исследованных течениях, удовлетворяющих полным уравнениям Эйлера, произвольна.

Несмотря на последние оговорки, полученные результаты и прежде всего — почти тождественное равенство нулю корреляционных функций, безусловно демонстрируют запутанность относительно движения жидких частиц. Еще большая запутанность будет наблюдаться, если в качестве первичного взять плоскопараллельное нестационарное завихренное течение, например индуцируемое несколькими вихревыми нитями (последнее само носит весьма запутанный характер [1, 2]), хотя и здесь отсутствует влияние вторичного потока на первичный. Поэтому даже трудно вообразить, насколько больший хаос может в аналогичных ситуациях возникать в общем пространственном случае, когда начинают проявляться нелинейные эффекты взаимного закручивания вихревых трубок [8]. Еще одним источником хаоса в любом случае будет неустойчивость получающихся течений по отношению к неконтролируемым малым возмущениям. Роль этого фактора хаоса по мере эволюции течения, как правило, возрастает. Действительно, даже в последнем примере при любом исходном профиле w_0 по r в нем с ростом t образуется сколь угодно много точек перегиба.

Вязкость, как бы мала она ни была, оказывает сглаживающее влияние [9, 10], мешая неограниченному росту производных. Покажем, как это происходит в зазоре высоты $h = r_+ - r_-$ между вращающимися цилиндрами при $\mathrm{Re}_1 \equiv \Omega_+ r_+^2/\nu \gg 1$ и $\mathrm{Re}_2 \equiv \Omega_+ h^2 / \nu \gg 1$, где ν — кинематическая вязкость. Анализ развития такого течения в рамках уравнений Навье — Стокса показывает, что сначала влияние вязкости практически отсутствует. Позднее ее эффекты проявляются в два этапа.

На первом из них распределение w становится осесимметричным с $w \simeq W(r)$ всюду вне тонких пристеночных слоев, т. е. с сохранением z-компоненты количества движения каждого цилиндрического слоя $r = \mathrm{const}$. Для этого этапа определяющим явля ется время эволюции первой гармоники разложения (5.2)

$$t_1 = (3 / \nu)^{1/3}(d\Omega / dr)_+^{-2/3}$$

Окружная неравномерность полностью исчезает при $(t / t_1)^3 \gg 1$, хотя более высокие гармоники затухают быстрее — при $(t / t_1)^3 \gg n^{-2}$. При $(t / t_1)^3 \ll n^{-2}$ вязкость вне пристеночных слоев не влияет на гармоники до n-й включительно.

На осесимметричный поток с $w \simeq W(r) \neq 0$ вязкость начинает оказывать сильное воздействие при временах, сравнимых с $t_2 = h^2 / (\nu\lambda^2)$, где λ — постоянная порядка единицы ($\lambda \simeq 2{,}4$ для $h / r_+ = 1$ и $\lambda = \pi$ для $h / r_+ = 0$). При $t / t_2 \gg 1$ компонента скорости $w \ll W(r)$. Так как

$$t_2 / t_1 = h^2 (d\Omega / dr)_+^{2/3}\nu^{-2/3}\lambda^{-2}3^{-1/3} \sim (\mathrm{Re}_2)^{2/3}$$

то при $\mathrm{Re}_2 \gg 1$ поток почти во всем зазоре после выравнивания окружной неравномерности весьма долго практически не испытывает влияния вязкости.

Описанный механизм затухания w предполагает устойчивость течения. Если же еще при $t < t_1$ решение (5.1) окажется неустойчивым (что вполне возможно), то его эволюция будет иной.

Автор благодарит В. Р. Кузнецова за обсуждение и советы и В. И. Юдовича за оценку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастические свойства системы четырех вихрей.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 3, с. 868—876.
2. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастизация вихрей.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, вып. 12, с. 737—740.
3. *Лоренц Э. Н.* Детерминированное непериодическое течение.— В кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981, с. 88—116.
4. *Арнольд В. И.* Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 255—262.
5. *Столяров Е. П.* Решение линеаризованного неоднородного уравнения Гельмгольца, описывающего распространение малых вихревых возмущений в потенциальных течениях идеального сжимаемого газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 1, с. 1—11.
6. *Столяров Е. П.* Распространение слабых вихревых и энтропийных волн в потенциальных течениях сжимаемого идеального газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 3, с. 1—13.
7. *Юдович В. И.* О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем.— В сб.: Динамика сплошной среды. (Нестационарные проблемы гидродинамики). Вып. 16. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1974, с. 71—78.
8. Турбулентность (принципы и применения). / Под ред. Т. Моулдена и др. М.: Мир, 1981. 536 с.
9. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
10. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1981