

УДК 532.516

К ВОПРОСУ О ДИНАМИЧЕСКОМ КРАЕВОМ УГЛЕ

Пухначев В. В., Солонников В. А.

Рассматривается плоское движение вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной прямолинейной твердой стенкой и свободной границей неизменной формы. Свободная граница и твердая стенка имеют точку контакта, которая перемещается вдоль стенки, натекая на нее с постоянной скоростью. В предположениях стационарности движения в системе координат, связанной с движущейся свободной границей, и конечности скорости диссипации энергии вычисляется асимптотика поля скоростей в окрестности точки контакта.

К настоящему времени достаточно подробно изучены математические постановки задач о стационарном движении вязкой жидкости при наличии точек или линии контакта свободной границы и твердой стенки¹. Существенно, что точка (или линия) контакта считается неподвижной относительно покоящейся стенки. Это позволяет ставить краевое условие подхода свободной границы к точке контакта под заданным углом, определяемым условием статического равновесия трех сред в этой точке [5] (см. также обсуждение этого вопроса в [6]).

Ситуация резко усложняется в случае движущейся точки контакта. Причина возникающих трудностей будет пояснена на примере стационарного движения в системе координат, связанной с точкой контакта. Такое движение может быть реализовано, например, в задаче о заполнении капилляра [7]. Постановка плоского аналога задачи о заполнении капилляра дана в п. 2. В приведенном ниже рассуждении течение считается плоским. Это ограничение здесь не существенно, но несколько сокращает выкладки.

1. Основная гипотеза. Рассмотрим стационарное решение уравнений Навье — Стокса в области $\Omega \subset R^2$, ограниченной свободной границей Γ с уравнением $x_2 = f(x_1)$ и твердой стенкой $x_2 = 0$, движущейся вдоль оси x_1 со скоростью $-V \neq 0$ (фиг. 1). Предположим, что $f(0) = 0$, $f > 0$ для $|x_1| < a$ с некоторым $a > 0$ и что $f \in C^2[-a, a]$. Введем следующие обозначения: R_+^2 — полуплоскость $x_2 > 0$, Π_a — полукруг $x_1^2 + x_2^2 < a^2$, $x_2 > 0$, θ_m — угол между касательной к Γ в точке контакта O и отрицательным направлением оси x_1 , n — единичный вектор внешней нормали к кривой Γ . Поскольку $\Gamma \in C^2$, то n — гладкое векторное поле. При достаточно малом a существует гладкое продолжение поля n в область $\Omega \cap \Pi_a = \omega$; сохраним за ним обозначение n .

Предположим, что компоненты v_1, v_2 вектора скорости v принадлежат пространству Соболева $W_2^1(\omega)$ (это предположение гарантирует конечность скорости диссипации кинетической энергии жидкости вблизи точки O). Определим функции

$$v_n = v \cdot n, \quad w(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta(|x|)v_n(x), & x \in \omega \\ 0, & x \in \Pi_a \setminus \omega \end{cases}$$

Здесь $\zeta(s)$ — гладкая срезающая функция, равная единице при $0 \leq s \leq a/2$ и нулю при $s \geq a$. В силу кинематического условия на свобод-

¹ См. [1—4], а также Солонников В. А. «Разрешимость задачи о плоском движении вязкой несжимаемой капиллярной жидкости в незамкнутом сосуде». Препринт ЛОМИ, Л., 1977, № Р—5—77, 20 с.; Jean M. «Free surface of the stationary flow of a Newtonian fluid in a finite channel». Preprint de la Laboratoire de mécanique et d'acoustique, Centre national de la recherche Scientifique. Marseille, 1979. 24 p.

ной границе $v_n \setminus \Gamma = 0$. Отсюда и из включения $v_i \in W_2^1(\omega)$, $i = 1, 2$ следует, что $w \in W_2^1(R_+^2)$.

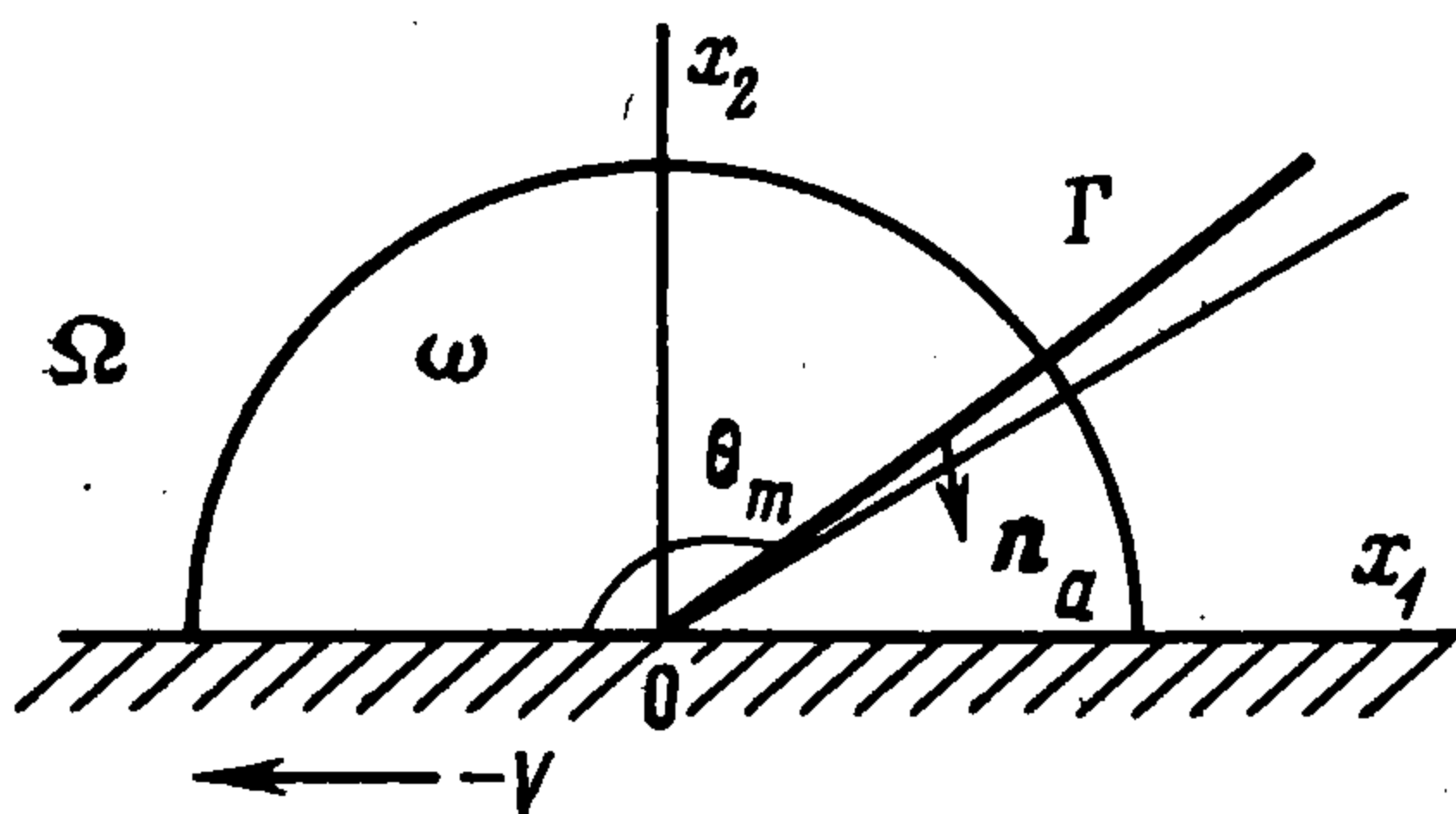
Оценим снизу интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w(x_1, 0) - w(y_1, 0)|^2}{|x_1 - y_1|^2} dx_1 dy_1$$

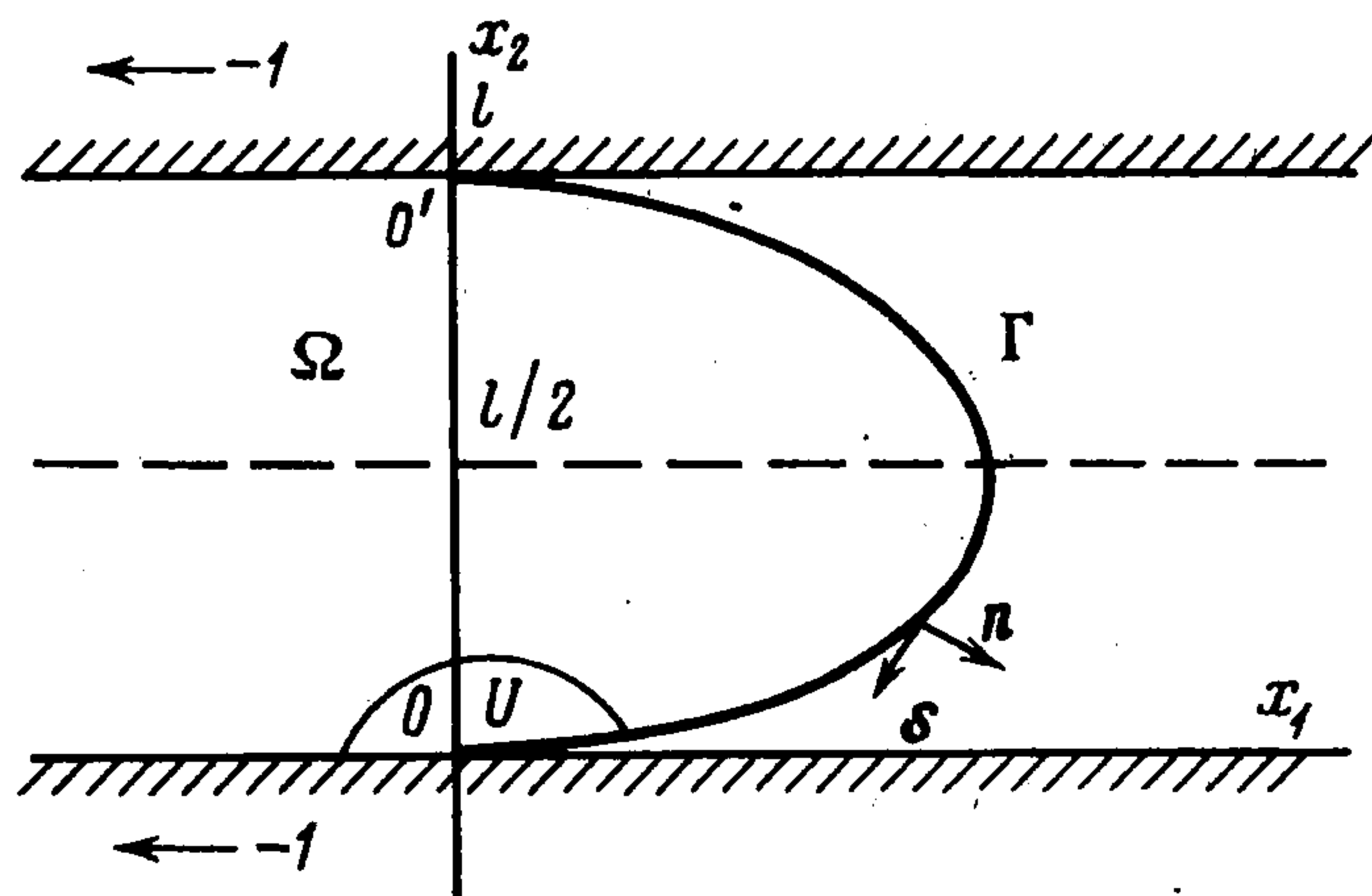
Ввиду того, что $w(x_1, 0) = 0$ при $x_1 \geq 0$, имеем

$$I \geq \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{\infty} \frac{dy_1}{|x - y_1|^2} \right) |w(x_1, 0)|^2 dx_1 = - \int_{-\infty}^0 \frac{|w(x_1, 0)|^2}{x_1} dx_1$$

Вследствие условия прилипания $w(x_1, 0) \rightarrow -V \sin \theta_m$ при $x_1 \rightarrow -0$. Если $\theta_m \neq 0$, $\theta_m \neq \pi$, то $w(-0, 0) \neq 0$ и интеграл в правой ча-



Фиг. 1



Фиг. 2

сти неравенства для I логарифмически расходится при $x_1 \rightarrow -0$. С другой стороны, по известной теореме о следах [8], для любой функции $w \in W_2^1(R_+^2)$

$$I \leq C \int_{x_2 > 0} |\nabla w|^2 dx$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Поэтому при $0 < \theta_m < \pi$ интеграл Дирихле функции w бесконечен. В свою очередь это противоречит предположению $v_i \in W_2^1(\omega)$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в данном рассуждении не использовался тот факт, что функции v_1, v_2 вместе с соответствующим давлением p удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса. Противоречие получилось из-за несовместимости условий прилипания, условий на свободной границе и предположения $\theta_m \neq 0$, $\theta_m \neq \pi$ в случае движущейся точки контакта. Впервые эта несовместимость была отмечена в работе [9] (см. также [5], примечание на стр. 350).

К устранению возникающего противоречия имеются различные подходы. В [10—12] для получения конечных величин диссипации энергии и силы трения о стенку предполагалось заменить условие прилипания на некотором участке стенки вблизи точки контакта различными формами условия проскальзывания. В работах [7, 13] дано асимптотическое решение задачи о движении жидкости вдоль плоской стенки, содержащее один эмпирический параметр — угол наклона свободной границы α на расстоянии h от стенки. Здесь h — малая величина порядка нескольких межмолекулярных расстояний.

Отсутствие корректной математической постановки задачи о движущейся точке контакта затрудняет расчеты подобных течений. Так, при численном решении задачи о заполнении капилляра в работе [14] вычисления произвольно обрывались на некотором расстоянии от стенки. Способ расчета, предложенный в [15], вообще игнорирует наличие особенности в точке контакта.

Сформулируем основную гипотезу настоящей работы. Предположим, что в указанных выше условиях (плоское стационарное движение в системе координат, связанной с точкой контакта, плоская несмоченная твердая поверхность) при натекании жидкости угол θ_m подхода свободной границы к стенке равен π (фиг. 2). Если, сверх того, свободная граница вплоть до точки контакта является кривой Ляпунова, а поле скоростей принадлежит некоторому весовому классу Гёльдера (п. 5), то строится асимптотика течения в окрестности точки контакта. Она такова, что касательное напряжение на стенке имеет интегрируемую особенность, скорость диссипации энергии вблизи точки 0 конечна, асимптотика свободной границы при $x_1 \rightarrow +0$ есть $x_2 = O(x_1^{2-\kappa})$, где $\kappa = \pi^{-1} \operatorname{arctg} 2k$, $0 < \kappa < 1/2$ (точные формулировки содержатся в п. 6). Здесь k — безразмерный параметр (назовем его капиллярным числом), равный $\rho\nu V/\sigma$, где ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Можно ожидать, что предлагаемая гипотеза соответствует реальному течению плохо смачивающей жидкости по сухой поверхности с малой шероховатостью.

В пользу этого предположения свидетельствует тот факт, что при больших значениях статического угла смачивания θ_s и наблюдаемый динамический угол (отождествляемый с θ_m) тоже велик. Он тем ближе к π , чем больше параметр $k = \rho\nu V/\sigma$ (см. работу [16], где проанализирован большой объем экспериментальных данных, а также работу [6], в которой содержится обзор экспериментов и моделей в проблеме динамического краевого угла). Отметим еще, что приближенное решение задачи о динамическом краевом угле, данное в [7], при углах наклона свободной границы, близких к π , теряет силу, если капиллярное число $k \gg 1$. Но именно в этом случае, как следует из [16], угол θ_m близок к π .

2. Постановка задачи. Сформулируем плоскую задачу о симметричном заполнении капилляра. Требуется найти гладкую кривую Γ , проходящую через точки $x_1 = 0, x_2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = l$ и решение v, p уравнений Навье — Стокса

$$(2.1) \quad -\Delta v + (v \nabla) v + \nabla p = 0, \operatorname{div} v = 0$$

в области Ω , ограниченной полупрямыми $x_1 \leq 0, x_2 = 0$ и $x_1 < 0, x_2 = l$ и кривой Γ (фиг. 2) при следующих граничных условиях

$$(2.2) \quad v_1 = -1, v_2 = 0, x_1 < 0, x_2 = 0 \text{ и } x_2 = l$$

$$(2.3) \quad v \cdot n = 0, s S n = 0$$

$$K = k(p - 2n S n), (x_1, x_2) \in \Gamma$$

Здесь S — тензор скоростей деформаций, K — кривизна свободной границы Γ , s и n — единичные векторы касательной и нормали к Γ . Считается, что $K > 0$, если кривая Γ выпукла наружу жидкости. Векторы s, n задают правую ориентацию плоскости $x_1 x_2$.

Равенства (2.1) — (2.3) записаны в безразмерных переменных. В качестве масштабов длины, скорости и давления выбраны величины $\nu/V, V$ и ρV^2 соответственно (V — физическая скорость перемещения свободной границы вдоль оси капилляра). Считается, что на жидкость не действуют внешние силы. Функция p означает разность давления в жидкости и атмосферного давления, которое предполагается постоянным. Параметр k в условии (2.3) — капиллярное число, определенное в п. 1

Равенства (2.2) выражают условия прилипания жидкости к движущимся стенкам капилляра $x_2 = 0$ и $x_2 = l$. Первое из условий на сво-

бодной границе (2.3) означает, что кривая Γ — линия тока. Согласно второму условию, касательное напряжение на Γ равно нулю. Третье условие (2.3) выражает тот факт, что нормальное напряжение на свободной границе равно капиллярному давлению [5].

Помимо (2.2), (2.3) подчиним искомое решение условию симметрии относительно оси капилляра $x_2 = l/2$. Потребуем, чтобы кривая Γ была симметричной относительно этой прямой и чтобы после замены $x_1 - l/2 = x_1$ функции v_1 и p стали четными, а v_2 — нечетной функцией x_1 .

Поскольку область Ω не компактна, то для решения системы (2.1) требуется поставить некоторое условие при $x_1 \rightarrow -\infty$. Естественно считать, что вдали от свободной границы реализуется движение, близкое к суперпозиции течения Пуазейля и равномерного потока. Иными словами,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v_1 &\rightarrow -1 + 6l^{-2}x_1(l - x_1), \quad v_2 \rightarrow 0 \\ \partial p/\partial x_1 &\rightarrow -12l^{-2}, \quad \partial p/\partial x_2 \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Пределный градиент давления в (2.4) таков, что расход жидкости через сечение капилляра равен нулю. Это согласуется с первым из условий (2.3).

Для замыкания постановки задачи необходимо задать условие в точках контакта O и O' . В соответствии с гипотезой п. 1 будем считать, что кривая Γ касается прямых $x_2 = 0$, $x_2 = l$ в точках O и O' соответственно (фиг. 2).

Есть основания полагать, что задача (2.1) — (2.4) с дополнительными условиями симметрии и касания поставлена корректно, хотя доказать это пока не удалось. Ниже исследуется асимптотика решения указанной задачи вблизи точки контакта O в предположении, что оно существует. Отметим, что предлагаемая методика получения асимптотики полностью переносится на случай осесимметричного течения в круглом капилляре. Более того, результирующие выражения формы свободной границы (7.1) и касательного напряжения на стенке (7.2) имеют тот же вид и для круглого капилляра в локальных координатах, связанных с точкой контакта.]

Для дальнейшего удобно записать соотношения (2.1) — (2.3) в терминах функции тока ψ , связанной с компонентами скорости равенствами $v_1 = \partial\psi/\partial x_2$, $v_2 = -\partial\psi/\partial x_1$. Вследствие (2.2), (2.3) функция тока сохраняет постоянное значение вдоль всей границы области Ω ; без потери общности можно считать это значение равным нулю. Уравнение для функции тока и граничные условия (2.2) имеют вид

$$(2.5) \quad \Delta\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega$$

$$(2.6) \quad \psi = 0, \quad \partial\psi/\partial x_2 = -1, \quad x_1 < 0, \quad x_2 = 0 \text{ и } x_2 = l$$

Условия на свободной границе (2.3) принимают вид [17]

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \psi = 0, \quad \Delta\psi - 2K \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} \right)^2 - k^{-1} \frac{\partial K}{\partial s} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \end{aligned}$$

Предположим, что поле v непрерывно в точке O , в которой происходит смена краевых условий. Так как $v_1 = -1$ в начале координат, то при достаточно малых $|x|$ выполнено неравенство $v_1 < 0$. Тогда существует подобласть U области Ω , такая, что $O \in \bar{U}$ и $\partial\psi/\partial x_2 \leq -1/2$ в \bar{U} . Это делает возможным переход к переменным Мизеса.

3. Переменные Мизеса. Перейдем в соотношениях (2.5) — (2.7) к новым независимым переменным $x = x_1$, ψ и новой искомой функции $x_2 = y(x, \psi)$.

Вместо (2.5) получается уравнение

$$(3.1) \quad y_\psi M M y - M y (M y)_\psi - y_\psi^{-1} (M y)_x = 0$$

$$M \left(y_x, y_\psi, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{y_\psi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2y_x}{y_\psi^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \psi} + \frac{1 + y_x^2}{y_\psi^3} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

В то время как в исходных переменных линия Γ неизвестна, в переменных Мизеса x, ψ ее образом будет отрезок прямой $\psi = 0$. Не теряя общности, можно предположить, что образ области U — полукруг $\Pi_\varepsilon = \{x, \psi : x^2 + \psi^2 < \varepsilon^2, \psi < 0\}$. При этом $-2 \leq y_\psi \leq -1/2$ в Π_ε , если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Отображение $(x_1, x_2) \rightarrow (x, \psi)$ однолистно в Π_ε .

Условия на стенке (2.6) и на свободной границе (2.7) в переменных Мизеса записываются так [17]:

$$(3.2) \quad y = 0, \quad y_\psi = -1, \quad x < 0, \quad \psi = 0$$

$$(3.3) \quad y_\psi M y - \frac{2y_{xx}}{1 + y_x^2} = 0, \quad - \frac{1 + y_x^2}{y_\psi} (M y)_\psi +$$

$$+ y_x (M y)_x + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}} \left(\frac{\sqrt{1 + y_x^2}}{y_\psi} \right)_x \right] +$$

$$+ k^{-1} \left(\frac{y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}} \right)_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + y_x^2}{y_\psi} \right)_x = 0, \quad x > 0, \quad \psi = 0$$

Представляют интерес решения уравнения (3.1) с условиями (3.2), (3.3), близкие к $y = -\psi$. Заметим, что сама функция $-\psi$ удовлетворяет (3.1) — (3.3); соответствующее ей течение на плоскости $x_1 x_2$ есть равномерный поток. Положим

$$(3.4) \quad y = -\psi + z(x, \psi)$$

и подставим (3.4) в соотношения (3.1) — (3.3). После выделения в каждом из полученных равенств членов с производными высшего порядка, линейных относительно новой искомой функции z , имеем

$$(3.5) \quad \Delta \Delta z = \varphi_0(z_x, z_\psi, \dots, z_{\psi\psi\psi\psi}), \quad (x, \psi) \in \Pi_\varepsilon$$

$$z = 0, \quad z_\psi = 0, \quad -\varepsilon < x < 0, \quad \psi = 0$$

$$z_{\psi\psi} - z_{xx} = \varphi_2(z_x, z_\psi, \dots, z_{\psi\psi}), \quad z_{\psi\psi\psi} + 3z_{xx\psi} -$$

$$- k^{-1} z_{xxx} = \varphi_1(z_x, z_\psi, \dots, z_{\psi\psi\psi}), \quad 0 < x < \varepsilon, \quad \psi = 0$$

$$(3.6) \quad \varphi_0 = (\Delta L + L \Delta - L^2) z + z_\psi (\Delta - L)^2 z - (\Delta - L) z [(\Delta - L) z]_\psi -$$

$$- (1 - z_\psi)^{-1} [(\Delta - L) z]_x$$

$$\varphi_2 = z_\psi \Delta z + (1 - z_\psi) L z - 2(1 + z_x^2)^{-1} z_x^2 z_{xx}$$

$$\varphi_1 = (L z)_\psi - \frac{z_\psi + z_x^2}{1 - z_\psi} [(\Delta - L) z]_\psi - z_x [(\Delta - L) z]_x -$$

$$- \left[\frac{z_x z_{xx}}{(1 - z_\psi)(1 + z_x^2)} \right]_x - 2 \left[\frac{(2z_\psi - z_\psi^2) z_{x\psi}}{(1 - z_\psi)^2} \right]_x +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1 + z_x^2}{1 - z_\psi} \right)_x + k^{-1} \left(z_x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2}} - 1 \right) \right)_{xx},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \quad L \left(z_x, z_\psi, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = - \frac{z_\psi}{1 - z_\psi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{2z_x}{(1 - z_\psi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \psi} + \frac{-3z_\psi + z_x^2 + 3z_\psi^2 - z_\psi^3}{(1 - z_\psi)^3} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

Правые части равенств (3.5) имеют второй порядок малости относительно производных z при их стремлении к нулю. Выделив в этих равенствах главные (при малых z) члены, можно надеяться, что именно они определяют ведущий член асимптотики течения вблизи точки контакта $x =$

$= \psi = 0$. Отметим, что ввиду (3.4) и определения y уравнение свободной границы на плоскости течения есть $x_2 = z(x_1, 0)$.

Если считать $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ известными функциями x, ψ , определенными во всей полуплоскости $\psi < 0$ и на всей оси x соответственно, то задача (3.5) (в условиях которой следует положить $\varepsilon = \infty$) решается явно при помощи преобразования Меллина. Ее решению посвящен п. 4.

4. Формальная асимптотика. Рассмотрим линейную задачу

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta z &= \zeta_0(x, \psi), \quad -\infty < x < \infty, \quad \psi < 0 \\ z &= 0, \quad z_\psi = 0, \quad x < 0, \quad \psi = 0 \\ z_{\psi\psi} - z_{xx} &= \zeta_2(x), \quad z_{\psi\psi\psi} + 3z_{xx\psi} - k^{-1}z_{xxx} = \zeta_1(x), \quad x > 0, \quad \psi = 0 \end{aligned}$$

Здесь $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ — известные функции своих аргументов. Будем считать их достаточно гладкими и такими, что $\zeta_0 = 0$ при $x^2 + \psi^2 \geq 1$, $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0$ при $x \geq 1$.

Перейдем на плоскости $x\psi$ к полярным координатам $\rho = (x^2 + \psi^2)^{1/2}$, $\varphi = \text{arctg}(\psi/x)$. Решение задачи (4.1), записанной в новых переменных, находится при помощи преобразования Меллина

$$(4.2) \quad g^*(\lambda) = \int_0^\infty g(\rho) \rho^{i\lambda-1} d\rho$$

Обозначая $z^* = w(\varphi, \lambda)$, $g_j^* = G_j(\varphi, \lambda)$ ($g_j = \rho^{4-j}\zeta_j$ ($\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi$), $j = 0, 1, 2$) и полагая $i\lambda = \alpha$, приходим к следующей краевой задаче относительно функции w :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (\alpha + 2)^2 \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 \right) w &= G_0 \quad -\pi < \varphi < 0 \\ w &= 0, \quad w_\varphi = 0, \quad \varphi = -\pi \\ w_{\varphi\varphi} - \alpha(\alpha + 2)w &= G_2, \quad w_{\varphi\varphi\varphi} + (3\alpha^2 + 6\alpha + 4)w_\varphi + \\ + k^{-1}\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)w &= G_1, \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

Выясним, при каких значениях α однородная задача (4.3) имеет нетривиальные решения. Если $\alpha \neq 0, \alpha \neq -1, \alpha \neq -2$, решение однородного уравнения для w имеет вид

$$w = C_1 \cos \alpha\varphi + C_2 \sin \alpha\varphi + C_3 \cos(\alpha + 2)\varphi + C_4 \sin(\alpha + 2)\varphi$$

где C_1, \dots, C_4 — произвольные постоянные. Подстановка w в краевые условия (4.3) приводит к линейной системе относительно C_1, \dots, C_4 с определителем

$$A(\alpha) = 8\alpha(\alpha + 1)^2(\alpha + 2) \cos \alpha\pi (2 \cos \alpha\pi - k^{-1} \sin \alpha\pi)$$

Нулями определителя $A(\alpha)$, помимо $\alpha = 0, -1, -2$ являются следующие значения α (m — произвольное целое число):

$$\alpha = i\lambda = m + 1/2, \quad \alpha = i\lambda = m + \kappa; \quad \kappa = \pi^{-1} \text{arctg} 2k$$

Дополнительные вычисления показывают, что при $\alpha = 0, \alpha = -1, \alpha = -2$ однородная задача (4.3) не имеет нетривиальных решений. Выпишем ее нетривиальные решения (собственные функции), соответствующие значениям $\alpha = -3/2$ и $\alpha = \kappa - 2$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} w &= w_0 \equiv \sin \varphi/2 + \sin 3\varphi/2, \quad \alpha = -3/2 \\ w &= w_1 \equiv (\kappa - 2) \sin \kappa\varphi - \kappa \sin(\kappa - 2)\varphi - \\ &- 2k(\kappa - 2) \cos \kappa\varphi + 2k\kappa \cos(\kappa - 2)\varphi, \quad \alpha = \kappa - 2 \end{aligned}$$

Данным решениям задачи (4.3) отвечают следующие решения однородной задачи (4.1):

$$z_0 = \rho^{3/2} w_0(\varphi), \quad z_1 = \rho^{2-\kappa} w_1(\varphi)$$

Определитель $A(\alpha)$ имеет в точках $\alpha = m + 1/2$, $\alpha = m + \kappa$ простые нули, поэтому присоединенных функций задача (4.3) не имеет. Показатель $\alpha = -3/2$ — наименьший из возможных значений α , при котором решение $z = \rho^{-\alpha} w(\varphi, -i\alpha)$ однородной задачи (4.1) и функции z_ρ , $\rho^{-1} z_\varphi$ стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0$.

Есть основания ожидать, что асимптотика решения z нелинейной задачи (3.5), удовлетворяющего условиям $z \rightarrow 0$, $\nabla z \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, имеет вид

$$(4.5) \quad z = a_0 \rho^{3/2} w_0(\varphi) + a_1 \rho^{2-\kappa} w_1(\varphi) + \eta(\rho, \varphi)$$

где a_0, a_1 — некоторые постоянные, w_0, w_1 — функции, определенные в (4.4), а η — остаточный член. Действительно, подстановка вместо z первых двух членов (4.5) в соотношения (3.5) показывает, что порядок каждого слагаемого получающихся левых частей при $\rho \rightarrow 0$ меньше порядка правых частей.

Оставшаяся часть работы посвящена обоснованию представления (4.5), т. е. доказательству того, что $\eta = O(\rho^{2-\gamma})$, $|\nabla \eta| = O(\rho^{1-\gamma})$ при $\rho \rightarrow 0$ и т. д.; здесь γ — некоторое положительное число, меньшее κ (напомним, что $0 < \kappa < 1/2$ и $\kappa \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 1/2$ при $k \rightarrow \infty$).

Формулы вида (4.5) для решения задач Дирихле и Неймана и решения линейных задач теории упругости хорошо известны (см., например, [18]). Для общих линейных эллиптических краевых задач они установлены в работах [19, 20]. Была получена [21] асимптотика в окрестности угловой точки решения первой краевой задачи для квазилинейного уравнения (2.5), эквивалентного системе Навье — Стокса.

5. Функциональные пространства. Определим основные функциональные пространства, используемые при изучении эллиптических краевых задач в областях с нерегулярными границами и задач с разными краевыми условиями на разных частях границы (см. [19, 22]). Пусть, как и в п. 4, $\Pi_\varepsilon \subset R^2$ — полукруг $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < \varepsilon$, $x_2 < 0$ и пусть T_ε — отрезок $(0, \varepsilon)$ вещественной оси. Пусть n, μ — неотрицательные числа, причем число n целое. Под $H_\mu^n(\Pi_\varepsilon)$ будем понимать пространство функций, имеющих в Π_ε обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные до порядка n включительно и конечную норму

$$(5.1) \quad \|u\|_{H_\mu^n(\Pi_\varepsilon)} = \left(\sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq n} \int_{\Pi_\varepsilon} \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right|^2 |x|^{2\mu - 2n + 2(j_1 + j_2)} dx \right)^{1/2}$$

Под $H_\mu^{n+1/2}(T_\varepsilon)$ будем понимать пространство функций, заданных на T_ε , имеющих производные до n -го порядка включительно и конечную норму

$$(5.2) \quad \|u\|_{H_\mu^{n+1/2}(T_\varepsilon)} = \left(\sum_{j=0}^n \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right|^2 |x|^{2\mu - 2n - 1 + 2j} dx + \int_0^\varepsilon |x|^{2\mu} dx \int_{x/2}^x \left| \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n u(y)}{\partial y^n} \right|^2 \frac{dy}{|x-y|^2} \right)^{1/2}$$

Наконец, при нецелом $l > 0$ и при $s < l$ определим пространство $C_s^{0,l}(\Pi_\varepsilon)$ как множество $[l]$ раз непрерывно дифференцируемых функций

с конечной нормой ($[l]$ — целая часть l)

$$\begin{aligned} |u|_{C_s^{0,l}(\Pi_\varepsilon)} &= \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq [l]} \sup |x|^{j_1 + j_2 - s} \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right| + \\ &+ \sum_{j_1 + j_2 = [l]} \sup_{x \in \Pi_\varepsilon} |x|^{l-s} \sup_{y \in \Pi_\varepsilon: |x-y| \leq |x|/2} |x-y|^{[l]-l} \left| \frac{\partial^{j_1 + j_2} u(x)}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^{j_1 + j_2} u(y)}{\partial y_1^{j_1} \partial y_2^{j_2}} \right| \end{aligned}$$

Точно так же определяется пространство $C_s^{0,l}(T_\varepsilon)$; норма в нем задается формулой

$$\begin{aligned} |u|_{C_s^{0,l}(T_\varepsilon)} &= \sum_{j=0}^{[l]} \sup_{T_\varepsilon} |x|^{j-s} \left| \frac{d^j u}{dx^j} \right| + \\ &+ \sup_{x \in T_\varepsilon} |x|^{l-s} \sup_{y \in T_\varepsilon: |x-y| \leq |x|/2} |x-y|^{[l]-l} \left| \frac{d^{[l]} u(x)}{dx^{[l]}} - \frac{d^{[l]} u(y)}{dy^{[l]}} \right| \end{aligned}$$

Лемма 1. Для того чтобы $u \in H_\mu^n(\Pi_\varepsilon)$, достаточно, чтобы

$$\left| \frac{\partial^{j_1 + j_2} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right| \leq C |x|^{s-j_1-j_2}, \quad s > n-1-\mu, \quad j_1 + j_2 \leq n+1$$

Для того чтобы $u \in H_\mu^{n+1/2}(T_\varepsilon)$, достаточно, чтобы

$$\left| \frac{d^j u}{dx^j} \right| \leq C |x|^{s-j}, \quad s > n-\mu, \quad j=0, \dots, n+1$$

Действительно, при условиях леммы сходятся все интегралы в нормах (5.1) и (5.2), что легко проверяется.

Лемма 2. Если $u \in H_\mu^n(\Pi_\varepsilon)$ и $n > 1$, то

$$(5.3) \quad \sup_{\Pi_\varepsilon} |x|^{1+\mu-n} |u(x)| \leq C \|u\|_{H_\mu^n(\Pi_\varepsilon)}$$

причем постоянная $C > 0$ не зависит от u, ε при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Доказательство. Пусть $x \in \Pi_\varepsilon$ и $K_x = \{y \in \Pi_\varepsilon: |x|/2 < |y| < |x|\}$. Воспользуемся известной мультипликативной оценкой [23]

$$|u(x)| \leq C_1 \left\{ \left(\sum_{j_1 + j_2 = n} \left\| \frac{\partial^{j_1 + j_2} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}} \right\|_{L_2(K_x)}^2 \right)^{1/2n} \|u\|_{L_2(K_x)}^{(n-1)/n} + |x|^{-1} \|u\|_{L_2(K_x)} \right\}$$

Умножим обе части неравенства на $|x|^{1+\mu-n}$. Так как

$$|x|^a \|v\|_{L_2(K_x)} \leq C_2(a) \left(\int_{\Pi_\varepsilon} |v|^2 |y|^{2a} dy \right)^{1/2}$$

при любом вещественном a , то из этого неравенства следует (5.3).

6. Обоснование асимптотического разложения. Рассмотрим прежде всего линейную задачу (4.1).

Лемма 3. Пусть функция $z(x, \psi) \in H_\mu^4(\Pi_\varepsilon)$ имеет конечную норму $\sup (x^2 + \psi^2)^{-(s+1)/2} |z(x, \psi)|$ ($x, \psi \in \Pi_\varepsilon$) и удовлетворяет соотношениям (4.1), в которых $\zeta_0 \in C_{s-3}^{0,\alpha}(\Pi_\varepsilon)$, $\zeta_1 \in C_{s-2}^{0,1+\alpha}(T_\varepsilon)$, $\zeta_2 \in C_{s-1}^{0,2+\alpha}(T_\varepsilon)$, причем $\alpha, s \in (0, 1)$. Тогда $z \in C_{1+s}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon'})$, $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$, и

$$\begin{aligned} |z|_{C_{s-1}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon'})} &\leq C (|\zeta_0|_{C_{s-3}^{0,\alpha}(\Pi_\varepsilon)} + |\zeta_1|_{C_{s-2}^{0,\alpha+1}(T_\varepsilon)} + \\ &+ |\zeta_2|_{C_{s-1}^{0,\alpha+2}(T_\varepsilon)} + \sup_{\Pi_\varepsilon} (x^2 + \psi^2)^{-(s+1)/2} |z(x, \psi)|) \end{aligned}$$

Эта лемма хорошо известна; она вытекает из теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач вплоть до границы и из локальных шаудеровских оценок.

Следующее предложение, вытекающее из результатов работ [19, 20], касается поведения решения задачи (4.1) в окрестности начала координат — точки смены краевых условий.

Теорема 1. Пусть функция $z \in H_\mu^4(\Pi_\varepsilon)$ удовлетворяет в области Π_ε соотношениям (4.1), причем $\zeta_0 \in H_{\mu_1}^0(\Pi_\varepsilon)$, $\zeta_1 \in H_{\mu_1}^{1/2}(T_\varepsilon)$, $\zeta_2 \in H_{\mu_1}^{3/2}(T_\varepsilon)$ где $\mu \in (3/2, 2)$, а $\mu_1 < \mu$. Если $\mu_1 > 3/2$, то $z \in H_{\mu_1}^4(\Pi_{\varepsilon_1})$ при любом $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. Если же $\mu_1 \in (1, 1 + \kappa)$, то для z справедлива формула (4.5), в которой функция $\eta \in H_{\mu_1}^4(\Pi_{\varepsilon_1})$ также удовлетворяет соотношениям (4.1).

Теорема 1 позволяет обосновать формулу (4.5) и для нелинейной задачи (3.5).

Теорема 2. Пусть функция $z \in C_{1+\delta}^{0,4+\alpha}(\Pi_\varepsilon)$, где α и δ — сколь угодно малые положительные числа, удовлетворяет соотношениям (3.5) в Π_ε . Тогда для нее справедлива формула (4.5), в которой $\eta \in C_{2-\gamma}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon_1})$ с произвольными $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, $\gamma \in (0, \kappa)$.

Доказательство. Можно проверить, что функции

$$\begin{aligned} \Phi_0(z_x, \dots, z_{\psi\psi\psi}) &= \Phi_0(x, \psi), & \Phi_1(z_x, \dots, z_{\psi\psi\psi})|_{\psi=0} &= \Phi_1(x) \\ \Phi_2(z_x, \dots, z_{\psi\psi})|_{\psi=0} &= \Phi_2'(x) \end{aligned}$$

определенные формулами (3.6), обладают следующими свойствами: если $z \in C_{1+s}^{0,4+\alpha}(\Pi_\varepsilon)$, $s \in (0, 1)$, то

$$\Phi_0 \in C_{2s-3}^{0,\alpha}(\Pi_\varepsilon), \quad \Phi_1 \in C_{2s-2}^{0,1+\alpha}(T_\varepsilon), \quad \Phi_2 \in C_{2s-1}^{0,2+\alpha}(T_\varepsilon)$$

а значит, в силу леммы 1

$$(6.1) \quad \Phi_0 \in H_\mu^0(\Pi_\varepsilon), \quad \Phi_1 \in H_\mu^{1/2}(T_\varepsilon), \quad \Phi_2 \in H_\mu^{3/2}(T_\varepsilon),$$

при любом $\mu \in (2 - 2s, 2)$. Поэтому при условиях теоремы включения (6.1) имеют место при любом $\mu = \mu_0$ из промежутка $(\max(3/2, 2 - 2\delta), 2)$. Следовательно, по теореме 1 $z \in H_{\mu_0}^4(\Pi_{\varepsilon_2})$, $\forall \varepsilon_2 < \varepsilon$. В силу леммы 2 величина $\sup \rho^{-(s_1+1)} |z(x, \psi)|$, $(x, \psi) \in \Pi_{\varepsilon_2}$, где $\rho = (x^2 + \psi^2)^{1/2}$, ограничена при всех s_1 вида $s_1 = 2 - \mu_0 \in (0, \min(1/2, 2\delta))$, и теперь из леммы 3 можно заключить, что $z \in C_{1+s_1}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon_2})$. Число s_1 может быть взято большим δ . Повторяя это рассуждение, если нужно, можно в конце концов показать, что $z \in C_{1+s}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon_3})$ с любым $\varepsilon_3 < \varepsilon$, $s < 1/2$. Возьмем число s достаточно близким к $1/2$: $s \in ((1 - \kappa)/2, 1/2)$. Тогда

$$\begin{aligned} z &\in H_\mu^4(\Pi_{\varepsilon_3}), & \Phi_0 &\in C_{2s-3}^{0,\alpha}(\Pi_{\varepsilon_3}) \subset H_{\mu_1}^0(\Pi_{\varepsilon_3}) \\ \Phi_1 &\in C_{2s-2}^{0,\alpha+1}(T_{\varepsilon_3}) \subset H_{\mu_1}^{1/2}(T_{\varepsilon_3}), & \Phi_2 &\in C_{2s-1}^{0,\alpha+2}(T_{\varepsilon_3}) \in H_{\mu_1}^{3/2}(T_{\varepsilon_3}) \end{aligned}$$

при всех $\mu \in (2 - s, 2) \subset (3/2, 2)$ и при μ_1 , достаточно близком к $2 - 2s$, так что можно считать, что $\mu_1 \in (1, 1 + \kappa)$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 1, из которой следует справедливость формулы (4.5) с $\eta \in H_{\mu_1}^4(\Pi_{\varepsilon_1})$, $\forall \varepsilon_1 > \varepsilon_3 > \varepsilon$. Из леммы 2 теперь следует, что функция η имеет ограниченную норму $\sup \rho^{\gamma-2} |\eta(x, \psi)|$, $(x, \psi) \in \Pi_{\varepsilon_1}$, где $\gamma = \mu_1 - 1 \in (0, \kappa)$ — число, сколь угодно близкое к κ . А так как $\eta(x, \psi)$ удовлетворяет соотношениям (4.1) с $\zeta_i = \Phi_i$, то $\eta \in C_{2-\gamma}^{0,4+\alpha}(\Pi_{\varepsilon_1})$. Теорема доказана.

7. Заключительные замечания. 1°. В п. 1 отмечалась несовместимость условий прилипания, условий на свободной границе и предположения $0 < \theta_m < \pi$ для плоского стационарного течения в системе координат, связанной с движущейся точкой контакта. Без существенных изменений проведенное там рассуждение переносится на слу-

чай нестационарного движения. Сформулируем получающийся результат. Пусть конечна величина

$$E = \frac{\rho v}{2} \int_0^T \left[\int_{\Omega(t)} \sum_{i, k=1}^2 \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \right] dt \right.$$

диссипировавшей за время T кинетической энергии жидкости в области течения $\Omega(t)$, содержащей на границе движущуюся точку контакта. Тогда динамический краевой угол θ_m может принимать одно из двух значений: 0 или π для всех $t \in [0, T]$.

2°. Теорема 2, дающая оценку остаточного члена в формуле (4.5), предъявляет довольно жесткие исходные требования к гладкости поля течения. Эти требования можно ослабить, если рассматривать задачу в физических переменных $v(x_1, x_2)$, $p(x_1, x_2)$ (при этом, правда, становится более громоздкой процедура построения асимптотики). Именно достаточно потребовать, чтобы Γ была кривой Ляпунова с показателем δ вплоть до точки O , принадлежащей всюду, кроме O , классу $C^{3+\alpha}$, а вектор-функция v имела бы конечный интеграл Дирихле. Вследствие леммы 3 из работы [24] \dot{v} тогда удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta_1 \leq \delta$ вплоть до точки O , а значит (см. [24], теорема 5), принадлежит классу $C_\delta^{0, 2+\delta}$. Дальнейшее повышение гладкости поля v проводится по схеме, аналогичной изложенной при доказательстве теоремы 2 этой работы.

3°. Приведем асимптотические выражения касательного напряжения на стенке и формы свободной границы вблизи точки контакта. Уравнение свободной границы есть $x_2 = z(x_1, 0) \equiv f(x_1)$, $x_1 > 0$, поскольку образ этой линии на плоскости $x\psi$ — отрезок прямой $\psi = 0$. Из (4.4), (4.5) получаем

$$(7.1) \quad f(x_1) = 4ka_1 x_1^{2-\kappa} + O(x_1^{2-\gamma}), \quad x_1 \rightarrow +0$$

Видно, что свободная граница тем более гладкая, чем меньше параметр $\kappa = \pi^{-1} \operatorname{arctg} 2k$ (или, при прочих фиксированных параметрах, чем больше коэффициент поверхностного натяжения σ , входящий в определение капиллярного числа $k = \rho v V / \sigma$). Так как $\gamma > 0$ (хотя и может быть взято сколь угодно малым), то при $a_1 \neq 0$ кривизна свободной границы в точке контакта бесконечна.

Безразмерное касательное напряжение на стенке, равное $2S_{12}(x_1, 0)$, $x_1 < 0$ (S — тензор скоростей деформаций), в переменных Мизеса выражается по формуле

$$2S_{12}|_{x_1 < 0, x_2 = 0} = [z_\psi \psi / (1 - z_\psi)^3]_{|x < 0, \psi = 0}$$

Согласно (4.4), (4.5)

$$(7.2) \quad 2S_{12}(x_1, 0) = 2a_0 |x_1|^{-1/2} + O(|x_1|^{-\gamma}), \quad x_1 \rightarrow -0$$

Интересно отметить, что, ввиду равенства $w_0(0) = 0$, главный член представления (4.5) не дает вклада в асимптотику свободной границы (7.1). Наоборот, в асимптотику касательного напряжения (7.2) не входит второй член представления (4.5), поскольку $w_1(\pi) = 0$.

4°. Кратко обсудим ситуацию, возникающую при изучении асимптотики вблизи точки контакта при оттекании жидкости от стенки (задача об осушении капилляра). Формальное принятие гипотезы $\theta_m = \pi$ в этом случае приводит к тому, что параметр κ становится отрицательным, $-1/2 < \kappa < 0$; при этом в формуле (4.5) главный и второй член асимптотики (в последнем нужно заменить $2 - \kappa$ на $1 - \kappa$) меняются местами. Доказательство теоремы 2 требуется несколько изменить.

Представляется, однако, физически неестественным предполагать, что в режиме стационарного оттекания $\theta_m = \pi$. Можно было бы, по аналогии с предыдущим, постулировать в этом случае условие $\theta_m = 0$. Вычисления показывают, что тогда степенная асимптотика свободной границы типа (7.1) с показателем, большим единицы, и степенная асимптотика непрерывного вблизи точки контакта поля скоростей невозможна (может ли эта асимптотика быть сверхстепенной — неясно). Более реалистична в стационарной задаче об осушении капилляра, по-видимому, схема, в которой точки контакта вообще отсутствуют, а на поверхности капилляра остается жидкая пленка, толщина которой асимптотически стремится к постоянной, быть может, равной нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sattinger D. H. On the free surface of a viscous fluid motion. — Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1976, v. 349, No. 1657, p. 183—204.
2. Солонников В. А. Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье — Стокса. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 84, с. 252—285.

3. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., Ступялис Л. И. Трехмерная задача об установившемся движении жидкости со свободной поверхностью. — В кн.: Дифференц. уравнения и их применение. Вып. 23. Вильнюс, 1979, с. 9—154.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Задача о движении жидкости со свободной поверхностью в граненом сосуде. — Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 6, с. 1315—1317.
5. Гидромеханика невесомости. / Под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Наука, 1975. 504 с.
6. Dussan V. E. B. On the spreading of liquids on solid surfaces: Static and dynamic contact lines. — In: Annual Rev. Fluid Mech. v. 11, Palo Alto, Calif.: Annual Revs Inc., 1979, p. 371—400.
7. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5, с. 76—84.
8. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
9. Dussan V. E. B., Davis S. H. On the motion fluid-fluid interface along a solid surface. — J. Fluid Mech., 1974, v. 65, pt 1, p. 71—95.
10. Hocking L. M. A moving fluid interface. Pt 2. The removal of the singularity by a slip flow. — J. Fluid Mech., 1977, v. 79, pt 2, p. 209—229.
11. Dussan V. E. B. The moving contact line: the slip boundary condition. — J. Fluid Mech., 1976, v. 77, pt 4, p. 665—684.
12. Huh C., Mason S. G. Effects of surface roughness on wetting (theoretical). — J. Colloid Interface Sci., 1977, v. 60, No. 1, p. 209—229.
13. Воинов О. В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости. — Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 6, с. 1422—1425.
14. Hansen R. J., Toong I. Y. Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin. — J. Colloid Interface Sci., 1971, v. 37, No 1, p. 196—207.
15. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью. — Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 295—298.
16. Hoffman R. A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas systems. — J. Colloid Interface Sci., 1975, v. 50, No. 2, p. 228—241.
17. Пухначев В. В. О гладкости стационарных решений уравнений Навье — Стокса вблизи свободной границы. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 15. Новосибирск; Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973, с. 133—144.
18. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
19. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
20. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1975, т. 52, с. 110—127.
21. Кондратьев В. А. Асимптотика решения уравнений Навье — Стокса в окрестности угловой точки границы. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 119—123.
22. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. — Math. Nachrichten, 1978, V. 81, S. 25—82.
23. Ильин В. П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, с. 64—127.
24. Солонников В. А. Разрешимость задачи о плоском движении тяжелой вязкой несжимаемой капиллярной жидкости, частично заполняющей некоторый сосуд. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, т. 43, № 1, с. 203—236.

Новосибирск, Ленинград

Поступила в редакцию
1.VI.1981