Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 532.593

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

Санников В. Ф., Черкесов Л. В.

Выводятся уравнения, описывающие в линейном приближении волновые движения в жидкости с произвольной стратификацией. Исследование сходимости волновых решений при аппроксимациях $\rho_n(z)$ среднего профиля плотности $\rho_0(z)$ показывает, что равномерная сходимость $\rho_n(z)$ к $\rho_0(z)$ является достаточным условием сходимости решений волновых уравнений. Сходимость решений при этом равномерна на множествах ограниченных сверху волновых чисел и ограниченных снизу фазовых скоростей волн. Рассматриваются примеры, показывающие, что при аппроксимации непрерывной функции $\rho_0(z)$ ступенчатыми $\rho_n(z)$ сходимость решений для внутренних волн не является равномерной на всем множестве допустимых значений волновых чисел и фазовых скоростей волн.

1. Нестационарные волновые движения безграничного в горизонтальных направлениях слоя идеальной несжимаемой жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии зависит от одной вертикальной координаты z, в линейном приближении описываются краевой задачей [1], из которой для вертикальной составляющей скорости w выводится [1, 2] уравнение с граничными условиями

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2\,\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left(\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-g\frac{d}{dz}\rho_0\right)\Delta_2 w=0 \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial^2 t\,\partial z}-g\Delta_2\right)w=0\ (z=0),\quad w=0\quad (z=-H);\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь $\rho_0=\rho_0(z)$ — плотность жидкости при равновесии, ось z направлена вертикально вверх; H — глубина жидкости; g — ускорение свободного падения.

Элементарные моды движения для малых возмущений можно найти, если положить

$$w=W(z)\exp[i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}-\sigma t)];\quad \mathbf{x}=(x,y) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{r}=(\mu,\nu)$ — горизонтальный волновой вектор, σ — частота. Подстановка этого выражения в (1.1) дает краевую задачу на собственные значения с параметром $r^2=\mu^2+\nu^2$

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0\frac{dW}{dz}\right)-\left(\rho_0+g\sigma^{-2}\frac{d}{dz}\rho_0\right)r^2W=0 \tag{1.3}$$

$$dW/dz-g\sigma^{-2}r^2W=0\ (z=0),\quad W=0\ (z=-H)$$

решения которой позволяют установить дисперсионные зависимости $c=c(r)$, $c=\sigma r^{-1}$ — фазовая скорость распространения волны (1.2).

В дальнейшем полагаем, что жидкость устойчиво стратифицирована, т. е. $\rho_0(z)$ — монотонно невозрастающая функция и $\rho_0(z)>0$. В случаях, когда $\rho_0(z)$ не всюду дифференцируема, следует считать, что уравнение (1.3) выполняется при всех $z\in(-H,0)$, для которых $\rho_0(z)$ имеет производную, и граничные условия необходимо дополнить условиями непрерывности функции $W(z)$ и полного давления [1]

$$W(z), \quad \rho_0(z)\left[\frac{d}{dz} - gc^{-2}\right] W \in C(-H, 0) \tag{1.4}$$

Заменой независимых переменных

$$s = \int_{-H}^{z} \rho_0^{-1}(\xi)\, d\xi, \qquad ds = \frac{dz}{\rho_0(z)}, \qquad z = z(s)$$

задача (1.3) с условием (1.4) приводится к виду

$$\frac{d^2W_1}{ds^2} - \left[\rho_1^2 + g\sigma^{-2}\frac{d\rho_1}{ds}\right] r^2 W_1 = 0 \tag{1.5}$$

$$dW_1/ds - gc^{-2}\rho_1 W_1 = 0 \quad (s = b), \qquad W_1 = 0 \quad (s = 0) \tag{1.6}$$

$$W_1, \quad dW_1/ds - gc^{-2}\rho_1 W \in C\ (0, b) \tag{1.7}$$

$$\left(W_1(s) = W(z(s)), \qquad \rho_1(s) = \rho_0(z(s)), \qquad b = \int_{-H}^{0} \rho_0^{-1}(\xi)\, d\xi\right)$$

Интегрируя дважды (1.5) от 0 до s и учитывая граничное условие на дне, получаем уравнение типа Вольтерра. Первое интегрирование дает

$$\frac{dW_1(s)}{ds} = \frac{dW_1(0)}{ds} + \int_0^s W_1(\alpha)\left[r^2\rho_1^2(\alpha)\, d\alpha + gc^{-2}\, d\rho_1(\alpha)\right] \tag{1.8}$$

Интегрируя вторично, получаем

$$W_1(s) = s\frac{dW_1(0)}{ds} + \int_0^s W_1(\alpha)(s-\alpha)\left[r^2\rho_1^2(\alpha)\, d\alpha + gc^{-2}\, d\rho_1(\alpha)\right] \tag{1.9}$$

Уравнения (1.8) и (1.9) сохраняют смысл и тогда, когда функция $\rho_1(s)$ не всюду дифференцируема и имеет скачки. Можно проверить, что для непрерывной функции $W_1(s)$ второе условие (1.7) следует из выражений (1.8) и (1.9). Итак, уравнения (1.8) и (1.9) необходимо теперь рассматривать лишь с первым условием (1.6).

2. Для более общего, чем (1.9), уравнения

$$W(s) = \varphi(s) + \int_0^s (s-\alpha) W(\alpha)\, d\Phi(\alpha) \qquad (0 \leqslant s \leqslant b) \tag{2.1}$$

имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(s)$ — непрерывная, а $\Phi(s)$ — непрерывная справа функция с ограниченным изменением на отрезке $[0, b]$. Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение в классе непрерывных функций на отрезке $[0, b]$.

Доказательство. Известно доказательство такой теоремы для случая, когда $\varphi(s)$ — линейная функция (см. теорему 11.2.1 [3]). Поскольку единственность решения уравнения (2.1) для произвольной непрерывной функции $\varphi(s)$ не отличается от случая, рассмотренного в [3], остановимся на доказательстве существования решения.

Следуя [3], предположим сперва, что в уравнении (2.1) функция $\Phi(s)$ ступенчатая с конечным числом скачков в точках s_k, где $0 < s_1 < \ldots < s_n < b$. Для такой функции $\Phi(s)$ решение уравнения (2.1) имеет вид

$$W(s) = \varphi(s) + \sum_{s_i < s} W(s_i)(s - s_i)\left[\Phi(s_i) - \Phi(s_i - 0)\right] \tag{2.2}$$

Взяв в равенстве (2.2) абсолютные величины, получаем оценки

(2.3) $$| W(s) | \leqslant F_{k+1} \quad \text{при} \quad s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n; \; s_0 = 0, \; s_{n+1} = b)$$

$$F_{k+1} = N + b \sum_{i=1}^{k} | W(s_i) | \Delta_i [\Phi], \qquad F_1 = N$$

$$(N = \max | \varphi(s) |, \;\; \Delta_i [\Phi] = | \Phi(s_i) - \Phi(s_i - 0) |)$$

На основании (2.3) имеем

$$F_{k+1} = F_k + b \, | W(s_k) | \, \Delta_k [\Phi] \leqslant F_k \exp \{ b \Delta_k [\Phi] \}$$

и, следовательно

(2.4) $$F_{k+1} \leqslant N \exp \Big\{ b \sum_{i=1}^{k} \Delta_i [\Phi] \Big\}$$

Из формул (2.3) и (2.4) следует оценка для решения уравнения (2.1) на отрезке $[0, b]$

(2.5) $$| W(s) | \leqslant N \exp \{ bV [\Phi] \}$$

Здесь $V[\Phi]$ — полная вариация функции $\Phi(s)$ на отрезке $[0, b]$.

Теперь предположим только, что $\Phi(s)$ — непрерывная справа функция ограниченной вариации. Аппроксимируем $\Phi(s)$ последовательностью ступенчатых функций $\Phi_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и строим соответствующие решения $W_n(s)$ в виде

(2.6) $$W_n(s) = \varphi(s) + \int_0^s (s - \alpha) W_n(\alpha) \, d\Phi_n(\alpha)$$

Функции $\Phi_n(s)$ выбираем так, чтобы каждая из них имела конечное число скачков, в точках скачков значения $\Phi_n(s)$ и $\Phi(s)$ совпадали и в каждой точке отрезка $[0, b]$ функции $\Phi_n(s)$ сходились бы к $\Phi(s)$. При этих условиях равномерно ограничены вариации функций $\Phi_n(s)$ и решения уравнений (2.6)

(2.7) $$V[\Phi_n] \leqslant V[\Phi], \qquad | W_n(s) | \leqslant N \exp \{ bV [\Phi] \}$$

Вместе с тем последовательность $W_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равностепенно непрерывна. В самом деле, из (2.6) находим, что

$$W_n(s_2) - W_n(s_1) = \varphi(s_2) - \varphi(s_1) + (s_2 - s_1) \int_0^{s_1} W_n(\alpha) \, d\Phi_n(\alpha) + \int_{s_1}^{s_2} (s_2 - \alpha) W_n(\alpha) \, d\Phi_n(\alpha)$$

Взяв в этом равенстве абсолютные величины и оценивая интегралы при помощи теоремы о среднем для интегралов Стилтьеса, получаем

(2.8) $$| W_n(s_2) - W_n(s_1) | \leqslant | \varphi(s_2) - \varphi(s_1) | + | s_2 - s_1 | \times V[\Phi] N \exp \{ bV [\Phi] \}$$

Применяя принцип компактности Арцела, заключаем, что имеется бесконечная последовательность значений n, таких, что решения уравнений (2.6) равномерно сходятся к предельной функции $W(s)$. Совершая далее в равенстве (2.6) предельный переход при $n \to \infty$, находим [3], что функция $W(s)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и неравенству (2.5). Теорема доказана.

Замечание. Если выполнены условия теоремы 1 и функция $\varphi(s)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, b]$, то и решение уравнения (2.1) имеет ограниченную вариацию на $[0, b]$. В силу равномерности оценки (2.8) имеем

$$V[W] \leqslant V[\Phi] + bV[\Phi] N \exp\{bV[\Phi]\}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, функция $\varphi(s)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, b]$ и $\Phi_n(s)$ — последовательность непрерывных справа функций ограниченной вариации на $[0, b]$, равномерно сходящихся к $\Phi(s)$. Тогда и решения уравнений (2.6) равномерно сходятся к решению уравнения (2.1).

Доказательство. Составляя разность уравнений (2.1) и (2.6), выводим

$$(2.9)\qquad W(s) - W_n(s) = \varphi_n(s) + \int_0^s (s-\alpha)[W(\alpha) - W_n(\alpha)]\, d\Phi_n(\alpha)$$

$$\varphi_n(s) = \int_0^s (s-\alpha) W(\alpha)\, d[\Phi(\alpha) - \Phi_n(\alpha)]$$

Рассматривая (2.9) как уравнение относительно функции $U_n(s) = W(s) - W_n(s)$ и используя оценку (2.5), находим, что

$$(2.10)\qquad |U_n(s)| \leqslant \max|\varphi_n(s)| \exp\{bV[\Phi_n]\}$$

Оценку $|\varphi_n(s)|$ получаем, применяя интегрирование по частям и затем теоремы о среднем. В результате имеем

$$(2.11)\qquad |\varphi_n(s)| \leqslant b\{|W(0)|\,|\Phi(0) - \Phi_n(0)| + \max|\Phi(s) - \Phi_n(s)|\,[V[W] + \max|W(s)|]\}$$

В силу равномерной сходимости функций $\Phi_n(s)$ к $\Phi(s)$ величины $V[\Phi_n]$ равномерно ограничены и $\max|\varphi_n(s)| \to 0$ при $n \to \infty$. Из неравенства (2.10) теперь следует, что решения уравнений (2.6) равномерно сходятся к решению уравнения (2.1). Теорема доказана.

3. Исходное уравнение (1.9) — частный случай рассмотренного выше уравнения (2.1) с функциями

$$(3.1)\qquad \varphi(s) = \frac{s\,dW_1(0)}{ds}, \qquad \Phi(s) = r^2 \int_0^s \rho_1^2(\alpha)\, d\alpha + gc^{-2}\rho_1(s)$$

удовлетворяющими условиям доказанных теорем 1 и 2.

Таким образом установлено, что интегральное уравнение (1.9) имеет единственное непрерывное решение, для которого справедлива оценка (2.5). Кроме того, решения уравнений вида (2.6) равномерно сходятся к решению уравнения (1.9), когда аппроксимации плотности $\rho_n(s)$ ($n \geqslant 2$) равномерно сходятся к функции $\rho_1(s)$.

Применяя далее результаты работы [3], приходим к следующему утверждению. Решение уравнения (1.9) имеет при $0 \leqslant s \leqslant b$ правую производную (для непрерывной справа функции $\rho_1(s)$), задаваемую равенством (1.8). Функция $dW_1(s)/ds$ — двухсторонняя производная $W_1(s)$ в точках, где функция $\rho_1(s)$ непрерывна или $W_1(s) = 0$.

Если при $n \to \infty$ функции $\rho_n(s)$ равномерно сходятся к $\rho_1(s)$ на отрезке $[0, b]$, то и производные $dW_n(s)/ds$, задаваемые равенствами

$$(3.2)\qquad \frac{dW_n(s)}{ds} = \frac{dW_1(0)}{ds} + \int_0^s W_n(s)\, d\Phi_n(s),$$

$$\Phi_n(s) = r^2 \int_0^s \rho_n^2(\alpha)\, d\alpha + gc^{-2}\rho_n(s)$$

и (2.6), равномерно сходятся к производной решения уравнения (1.9).

В самом деле, составляя разность равенств (1.8) и (3.2), выводим

$$\frac{dW_1(s)}{ds} - \frac{dW_n(s)}{ds} = \int_0^s [W_1(\alpha) - W_n(\alpha)]\, d\Phi_n(\alpha) - \int_0^s W_1(\alpha)\, d[\Phi_n(\alpha) - \Phi(\alpha)] \tag{3.3}$$

Применяя интегрирование по частям ко второму интегралу в правой части выражения (3.3) и затем теорему о среднем, находим, что

$$\left|\frac{dW_1(s)}{ds} - \frac{dW_n(s)}{ds}\right| \leqslant \max|W_1(s) - W_n(s)|\, V[\Phi_n] + \max|\Phi(s) - \Phi_n(s)|\,\{\max|W_1(s)| + V[W_1]\} \tag{3.4}$$

При $n \to \infty$ правая часть этого неравенства стремится к нулю.

В дисперсионное уравнение

$$dW_1/ds - gc^{-2}\rho_1 W_1 = 0 \qquad (s = b)$$

и в уравнения (1.8) и (1.9) входят два параметра r и c. Оценки (2.10) и (3.4) не являются равномерными в диапазоне возможных изменений параметров r и c. Эти оценки будут равномерными лишь при ограниченных сверху значениях r и ограниченных снизу значениях фазовой скорости c. Анализ асимптотического поведения зависимости $c = c(r)$ при $r \to \infty$ показывает, что в жидкости со ступенчатой стратификацией $c = O(r^{-1/2})$ [4], в то время как для жидкости с непрерывным профилем средней плотности $c = O(r^{-1})$.

Пример 1. Пусть плотность жидкости в невозмущенном состоянии изменяется по закону $\rho_0(z) = \rho_1 \exp(-kz)$, где $k > 0$. Для этой модели известны [1] аналитические решения дисперсионного уравнения, полученные с использованием приближения «твердой крышки»

$$\sigma_j^2 = gkr^2[r^2 + k^2/4 + \pi^2 H^{-2}(j-1)^2]^{-1} \tag{3.5}$$

где σ_j — частота j-й моды при волновом числе r. Разделим слой жидкости $-H \leqslant z \leqslant 0$ на n слоев равной толщины $h_n = H/n$, в каждом из которых считаем плотность постоянной и равной значению $\rho_0(z)$ в середине слоя. В этом случае дисперсионное уравнение для многослойной жидкости с привлечением условия «твердой крышки» имеет вид

$$R_1(\sigma^2) = 0 \tag{3.6}$$

где R_1 определено рекуррентной формулой [4]

$$R_{n+1} = 0, \quad R_n = 1, \quad R_m = R_{m+1}[\lambda b_n(1+\gamma_n) - \varepsilon_n] - \gamma_n\lambda^2(b_n^2 - \mathrm{th}^2 r)R_{m+2} \tag{3.7}$$

$$\lambda = (gr\,\mathrm{th}\,r)^{-1}\sigma^2, \quad \gamma_n = \exp(-kh_n), \quad \varepsilon_n = 1 - \gamma_n, \quad b_n = \mathrm{th}\,r\,\mathrm{cth}\,rh_n$$

По индукции при помощи (3.7) доказывается справедливость формулы

$$R_m = [\lambda^2\gamma_n(b_n^2 - \mathrm{th}^2 r)]^{(n-m)/2}\,\frac{\sin[(n+1-m)(\pi/2 - \theta)]}{\cos\theta} \tag{3.8}$$

$$(m = n+1, n, \ldots, 1)$$

$$\theta = \arcsin\left[\frac{\lambda b_n(1+\gamma_n) - \varepsilon_n}{2\lambda\sqrt{\gamma_n(b_n^2 - \mathrm{th}^2 r)}}\right]$$

Нули $R_1(\theta)$ находятся аналитически, имеем

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}(j-1) \qquad (j = 2, 3, \ldots, n)$$

Зная θ_j, получаем точные формулы для дисперсионных зависимостей многослойной модели, приближающей непрерывную с экспоненциальной стратификацией

$$\sigma_{nj}^2 = gr\,\mathrm{sh}\,rh_n\,\mathrm{sh}\,\frac{kn_n}{2}\left[\mathrm{ch}\,rh_n\,\mathrm{ch}\,\frac{kh_n}{2} - \cos\frac{\pi}{n}(j-1)\right]^{-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n) \tag{3.9}$$

Раскладывая в ряд по параметру n^{-1} зависимости σ_{nj}^2, находим

$$\sigma_{nj}^2 = gkr^2\left\{\frac{1}{r^2+\frac{k^2}{4}+\pi^2H^{-2}(j-1)^2} - \right. \tag{3.10}$$

$$\left. - \frac{H^2}{12n^2}\left[1 - \frac{r^2k^2}{r^2+\frac{k^2}{4}+\pi^2H^{-2}(j-1)^2}\right] + O(n^{-4})\right\}$$

Первый член этого разложения совпадает с (3.5), следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{nj}^2 = \sigma_j^2$$

Второй член в разложении (3.10) равномерно по r и j стремится к нулю при $n \to \infty$, в то время как асимптотическое поведение σ_{nj}^2 и σ_j^2 различно при $r \to \infty$.

Из (3.5) и (3.9) вытекает, что

$$\sigma_j^2 \approx gk, \qquad \sigma_{nj}^2 \approx gr\,\mathrm{th}\,\frac{kh_n}{2} \qquad (r \gg 1)$$

Значения вертикальной составляющей скорости j-й моды в точках $z_m = -(m/n)H$ для многослойной модели определяются по формуле

$$W_{nj}(z_m) = \frac{\mathrm{sh}\,rh_n}{r}\,\mathrm{cosec}\left[\pi\,\frac{(j-1)}{n}\right] W_z(-H)\exp\left[kH\,\frac{(n-m)}{2n}\right] \times$$

$$\times \sin\left[\pi(j-1)\,\frac{(n-m)}{n}\right]$$

а для непрерывной стратификации

$$W_j(z_m) = \frac{H}{\pi(j-1)}\,W_z(-H)\exp\left[kH\,\frac{(n-m)}{2n}\right]\sin\left[\pi(j-1)\,\frac{(n-m)}{n}\right]$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} W_{nj}(z_m) = W_j(z_m)$$

и этот предельный переход не является равномерным по r и j.

Пример 2. В работе [4] для непрерывного распределения плотности со слоем скачка

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho_1 & (-H_1 \leqslant z \leqslant 0) \\ \rho_1\exp[-k(z+H_1)] & (-H_2 \leqslant z \leqslant -H_1) \\ \rho_1\exp[k(H_2-H_1)] & (-H_3 \leqslant z \leqslant -H_2) \end{cases} \tag{3.11}$$

$$H_1 = 20, \quad H_2 = 70, \quad H_3 = 2070\ \text{м}, \quad k(H_2 - H_1) = 0{,}002$$

и для ступенчатых распределений $\rho_n(z)$, аппроксимирующих $\rho_0(z)$, приведены результаты расчетов фазовых скоростей распространения длинных внутренних волн. Численные расчеты [4] показали, что при приближении $\rho_n(z)$ к $\rho_0(z)$ фазовые скорости, полученные по многослойной модели, сходятся к фазовым скоростям непрерывной. При этом скорость сходимости убывает с ростом номера моды.

r	$n = 12$	52	102	202	c
0,0	5,0	3,54	3,51	3,494	3,492
0,5	3,1	2,61	2,57	2,556	2,552
1,0	2,2	1,78	1,72	1,699	1,693
1,5	1,8	1,35	1,26	1,230	1,222
2,0	1,6	1,10	0,99	0,957	0,946

Здесь для того же распределения плотности (соответствующий столбец в таблице помечен буквой c) и ряда значений n многослойного приближения $\rho_n(z)$ приведены дисперсионные зависимости фазовой скорости десятой внутренней моды от волнового числа r. Многослойные приближения строились следующим способом: слой скачка ($-H_2 \leqslant z \leqslant -H_1$) разбивался на ($n-2$) слоя равной толщины, значение плотности $\rho_n(z)$ в каждом из которых бралось равным значению $\rho_0(z)$ в середине слоя. Величины, приведенные в таблице, размерные; размерность волнового числа $м^{-1}$, фазовых скоростей $см \cdot с^{-1}$. Многослойная аппроксимация в этом примере дает завышенные значения фазовой скорости, монотонно убывающие с ростом числа слоев. Скорость сходимости убывает с ростом волнового числа r. В то же время многослойная аппроксимация $\rho_0(z)$ позволяет с точностью 5% вычислять значения фазовой скорости первых десяти внутренних мод в достаточно широком диапазоне длин волн от 3 м до бесконечности при $n = 102$.

Заметим также, что использование многослойных аппроксимаций распределения плотности позволяет получать выражения для характеристик волнового поля в виде удобных для их численной реализации рекуррентных формул типа (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.
2. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 320 с.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 750 с.
4. *Санников В. Ф.*, *Черкесов Л. В.* О развитии пространственных внутренних волн, генерируемых движущимися возмущениями.— В кн: Морские гидрофизические исследования. № 3. Севастополь, 1977, с. 5—18.

Севастополь

Поступила в редакцию
26.III.1982