Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 532.593

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Секерж-Зенькович С. Я.

Рассматривается задача Коши для уравнения внутренних волн, к которому сводятся многие задачи линейной теории волн в непрерывно стратифицированной жидкости. Доказывается теорема единственности и выводится формула для явного представления решения через интегралы, ядра которых содержат построенное в [1] фундаментальное решение оператора внутренних волн и его производную по времени. Проводится асимптотический анализ решения в «дальней зоне» и при больших значениях безразмерного времени.

Для уравнения, описывающего распространение длинных гравитационных волн во вращающейся сжимаемой баротропной жидкости, построение решения задачи Коши и его асимптотический анализ были впервые выполнены А. М. Обуховым в 1948 г. [2]. Особенность уравнения внутренних волн в том, что оно не разрешено относительно старшей производной искомой функции по времени. Впервые задачу Коши для уравнения такого типа, причем отличающегося от уравнения внутренних волн лишь заменой двумерного оператора Лапласа производной второго порядка по одной пространственной переменной, решил С. Л. Соболев [3], исследуя неустановившиеся движения вращающейся жидкости. Уравнение С. Л. Соболева и некоторые его обобщения рассматривались в ряде работ ([4—6] и др.). В [7, 8] задача Коши рассматривалась для систем дифференциальных уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производных искомых функций по времени.

Ниже использованы результаты и методы исследования указанных работ. Так, теорема единственности сформулирована в соответствии с формулировкой, данной в [8], и уточнением, сделанным в [4], а ее доказательство сведено к проверке выполнимости для уравнения внутренних волн условий теоремы единственности, наложенных в [8], правда, также с одним уточнением.

Краткое изложение некоторых результатов работы содержится в [9].

1. Постановка задачи. Оператор внутренних волн $\mathbf{N}$ введем следующим образом [1]:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 + N^2\Delta_2 \tag{1.1}$$

Здесь t — время, Δ_3 — трехмерный оператор Лапласа от пространственных координат x_1, x_2, x_3, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа от горизонтальных координат x_1, x_2, N — так называемая частота Брента — Вяйсяля, характеризующая распределение плотности неоднородной жидкости в невозмущенном состоянии. Как и в [1], принимается, что $N^2 = \mathrm{const} > 0$, что отвечает случаю, когда плотность ρ_0 покоящейся жидкости зависит лишь от направленной против ускорения силы тяжести g вертикальной координаты x_3 по закону

$$\rho_0(x_3) = \rho_0(0)\exp(-N^2 g^{-1} x_3)$$

Рассмотрим классическую задачу Коши для уравнения внутренних волн

$$\mathbf{N}u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u + N^2\Delta_2 u = f(x, t) \tag{1.2}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} = u_1(x) \tag{1.3}$$

где $f(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — заданные функции, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в трехмерном евклидовом пространстве R^3.

2. Теорема единственности решения задачи Коши. Пусть решение задачи (1.2), (1.3) с нулевыми начальными данными и равной нулю правой частью, производная по t этого решения, а также их производные по x_j первого и второго порядков растут при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем $|x|^l$, где $l \geqslant 0$. Тогда это решение — полином по x_1, x_2, x_3 степени не выше l с коэффициентами, зависящими от t и обращающимися в нуль при $t = 0$.

Доказательство. Положив в уравнении (1.2) $f = 0$ и введя функции $w_1 = u$, $w_2 = -\partial u/\partial t$, сведем это уравнение к эквивалентной системе уравнений для $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = -w_2, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta_3 w_2 = N^2 \Delta_2 w_1 \tag{2.1}$$

Система (2.1) относится к классу систем, рассмотренных в [8]. Чтобы воспользоваться результатами последней работы, положим, следуя [8]

$$w_k(x, t) = v_k(t; \xi) \exp[-i(x, \xi)], \; k = 1, 2$$
$$(x, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$$

Тогда для вектор-функции $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M(\xi)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = L(\xi)\mathbf{v}$$

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |\xi|^2 \end{Vmatrix}, \qquad L = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ N^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Применительно к этой системе условия, наложенные в теореме единственности в [8], таковы. При $t \in [0, T]$ должно быть:

1) элементы фундаментальной системы $v_{k,m}$ системы (2.2) должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} |v_{k,m}| &\leqslant A|\xi|^{-q}, \; q \geqslant 0, \quad |\xi| \leqslant 1 \\ |v_{k,m}| &\leqslant A|\xi|^{p}, \; p \geqslant 0, \quad |\xi| > 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

здесь и ниже через A обозначены произвольные постоянные;

2) $\det M(\xi)$ должен быть многочленом по ξ_j, обращающимся в нуль лишь при $|\xi| = 0$ и представимым после замены $\xi_j = \xi_j' |\xi|$ в виде

$$\det M = |\xi|^c (a_0 + a_1|\xi| + \ldots + a_G|\xi|^G), \quad a_0 a_G \neq 0 \tag{2.4}$$

3) элементы матрицы $\|\mu_{ik}\| = M^{-1}L$ должны удовлетворять неравенствам

$$|\mu_{i,k}| \leqslant A|\xi|^{-s}, \; |\xi| \leqslant 1; \quad |\mu_{i,k}| \leqslant A|\xi|^r, \; |\xi| > 1 \tag{2.5}$$

Для системы (2.2) неравенства (2.3) и (2.5) выполнены.

В самом деле, фундаментальная система решений системы (2.2) имеет вид

$$v_{1,1} = \cos \nu t, \quad v_{1,2} = -\nu^{-1}\sin \nu t$$
$$v_{2,1} = \nu \sin \nu t, \quad v_{2,2} = \cos \nu t$$
$$\nu = N|\xi|^{-1}(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

откуда следует (2.3), причем $q = p = 0$.

Матрица $\|\mu_{ik}\|$ для системы (2.2) такова:

$$\|\mu_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ \nu^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

откуда следует (2.5), причем $s = r = 0$.

Определитель матрицы M (ξ) для системы (2.2) равен $|\xi|^2$ и, следовательно, является многочленом по ξ_j, обращающимся в нуль лишь при $|\xi| = 0$. Однако он может быть представлен в виде (2.4) с $a_0 a_G \neq 0$, если уточнить формулировку условия 2), явно указав допустимость случая $G = 0$, поскольку доказательство теоремы остается в силе и в этом случае.

Таким образом, для системы (2.1) выполнены все условия, наложенные в теореме единственности из [8]; кроме того, рассматриваемые функции w_1 и w_2 принадлежат тому же классу, для которого доказана эта теорема. Поэтому утверждение теоремы единственности, данное в [8] и уточненное в [4], справедливо и для (2.1). Для системы (2.1) оно таково: решение системы (2.1) удовлетворяет двум системам уравнений:

$$\begin{cases} w_1 = P_1 \\ \Delta_3 w_2 = P_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} -w_2 = \dfrac{\partial P_1}{\partial t} \\ N^2 \Delta_2 w_1 = \dfrac{\partial P_2}{\partial t} \end{cases}$$

где $P_1(t, x)$ и $P_2(t, x)$ — многочлены по x_j степени не выше l с коэффициентами, зависящими от t, удовлетворяющие начальному условию $P_j(0, x) = 0$.

Чтобы завершить доказательство теоремы единственности для уравнения внутренних волн, заметим, что рассматриваемое решенне этого уравнения совпадает с функцией w_1 (по смыслу введения последней функции).

Следствие. Если в условии теоремы потребовать, чтобы решение стремилось к нулю при $|x| \to \infty$, а требования на производные от решения оставить прежними, то задача Коши (1.2), (1.3) с нулевыми начальными данными и равной нулю правой частью имеет лишь нулевое решение.

3. Решение задачи Коши для уравнения внутренних волн. Предположим, что правая часть уравнения (1.2) и начальные данные (1.3) обладают следующими свойствами: функция $f(x, t)$ непрерывна в R^4 при $t \geqslant 0$; произведения функций $\Delta_3 u_0(x)$, $\Delta_3 u_1(x)$ и их производных первого порядка на $1/|x|$ интегрируемы, и последним свойством обладают при каждом $t \geqslant 0$ функция $f(x, t)$ и ее производные первого порядка по x_j; при $|x| \to \infty$ имеют место соотношения

$$u_0(x) = o(1), \qquad u_1(x) = o(1), \qquad \frac{\partial u_0}{\partial |x|} = o(1), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial |x|} = o(1)$$

Получим решение задачи, воспользовавшись аппаратом теории обобщенных функций.

Согласно общей схеме [10], для этого сначала сформулируем и решим обобщенную задачу Коши для уравнения (1.2).

Предположим, что существует классическое решение $u(x, t)$ задачи (1.2), (1.3). Введем функции $u^*(x, t)$ и $f^*(x, t)$, совпадающие при $t \geqslant 0$ с $u(x, t)$ и $f(x, t)$, соответственно, и равные нулю при $t < 0$.

Функция $u^*(x, t)$ удовлетворяет в пространстве обобщенных функций $D'(R^4)$ уравнению

$$\mathbf{N}\, u^* = f^*(x, t) + \Delta_3 u_0(x) \times \delta'(t) + \Delta_3 u_1(x) \times \delta(t) \tag{3.1}$$

где в правой части стоят прямые произведения функций $\Delta_3 u_0(x)$ и $\Delta_3 u_1(x)$ на $\delta'(t)$ и $\delta(t)$.

В самом деле, для всех функций $\varphi(x, t)$ из пространства основных функций $D(R^4)$ имеем цепочку равенств

$$(\mathrm{N}u^*, \varphi) = (u^*, \mathrm{N}\varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0} \Big[\int_\varepsilon^\infty \int_{R^3} \varphi \mathrm{N}u\, dx\, dt - \\ - \int_{R^3} \frac{\partial\varphi(x,\varepsilon)}{\partial t} \Delta_3 u(x,\varepsilon)\, dx + \int_{R^3} \varphi(x,\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \Delta_3 u(x,\varepsilon) dx \Big]$$

В силу свойств функций $u(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ можно в квадратных скобках положить $\varepsilon = 0$, тогда

$$(\mathrm{N}u, \varphi) = (f^* + \Delta_3 u_0(x) \times \delta'(t) + \\ + \Delta_3 u_1(x) \times \delta(t),\ \varphi(x, t))$$

Обобщенной задачей Коши для оператора внутренних волн N с источником $f^* \in D'(R^4)$ и начальными возмущениями $u_0(x) \in D'(R^3)$ и $u_1(x) \in D'(R^3)$ назовем задачу о нахождении обобщенной функции $u^*(x, t) \in D'(R^4)$, обращающейся в нуль при $t < 0$ и удовлетворяющей уравнению (3.1).

Если функции $f(x, t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ таковы, что в $D'(R^4)$ существует свертка правой части уравнения (3.1) с фундаментальным решением оператора N, то решение обобщенной задачи Коши (3.1) существует в $D'(R^4)$ и дается [10] формулой

$$u^*(x,t) = f^*(x,t) * E(x,t) + [\Delta_3 u_0(x) \times \delta(t)] * \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} + \\ + [\Delta_3 u_1(x) \times \delta(t)] * E(x,t) \tag{3.2}$$

$$E(x,t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2 N |x|} \int_{|x_3|/|x|}^{1} \frac{\sin Ntu\, du}{(u^2 - x_3^2/|x|^2)^{1/2}(1-u^2)^{1/2}}$$

где символ $*$ означает свертку функций, а E — выведенное в [1] фундаментальное решение оператора внутренних волн.

Если функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x, t)$ обладают свойствами, сформулированными в начале п. 3 то единственное решение классической задачи Коши (1.2), (1.3) дается формулой

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{R^3} f(\xi,\tau) E(x-\xi, t-\tau)\, d\xi\, d\tau + \\ + \int_{R^3} \Delta_3 u_0(\xi) \frac{\partial E}{\partial t}(x-\xi, t)\, d\xi + \int_{R^3} \Delta_3 u_1(\xi) E(x-\xi, t)\, d\xi \tag{3.3}$$

Для доказательства, прежде всего, заметим, что при сделанных предположениях правая часть формулы (3.2) существует в $D'(R^4)$ [10] и выражается формулой (3.3), т. е. последняя формула дает решение обобщенной задачи Коши (3.1) (это справедливо и без требования существования производных третьего порядка у $u_0(x)$, $u_1(x)$ и первого порядка у $f(x, t)$).

Далее, функция $u(x, t)$, представляемая формулой (3.3), имеет при $t > 0$ непрерывные производные второго порядка по x_j, которые, в свою очередь, имеют производные второго порядка по t. В самом деле, в (3.3) можно один раз продифференцировать по x_j под знаками интегралов, поскольку производные от $\mathrm{E}(x - \xi, t)$ имеют интегрируемые особенности типа $|x - \xi|^{-2}$ и убывают не медленнее $A\,|\xi|^{-2}$ при $|\xi| \to \infty$. Это свойство фундаментального решения выводится из его следующего представления [1]:

$$E(x,t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^2 N |x|} \int_0^\infty \frac{\sin[Nt(v^2 + x_3^2/|x|^2)^{1/2}(v^2+1)^{-1/2}]\, dv}{(v^2 + x_3^2/|x|^2)^{1/2}(v^2+1)^{1/2}}$$

поскольку допустимо дифференцирование по x_j под знаком последнего интеграла.

[1] *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1978, № 114. 37 с.

Второй раз продифференцировать в (3.3) по x_j под знаками интегралов можно после предварительного введения новой переменной интегрирования $\eta = x - \xi$. Законность этой операции оправдывается требованиями, наложенными на $\Delta_3 u_0(x)$ и $\Delta_3 u_1(x)$. Взятие же производных по t под знаками интегралов (3.3) возможно любое число раз. Следовательно, обобщенное решение уравнения (3.1) имеет при $t > 0$ требуемое для оператора N количество классических производных; следовательно, оно является при $t > 0$ классическим решением уравнения (3.1), а значит, и уравнения (1.2). При $t \to +0$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (1.3), поскольку первый интеграл в правой части (3.3) имеет пределом нуль, а в двух других можно положить под знаком интегралов $t = 0$.

Таким образом, построенная функция $u(x, t)$ — решение задачи (1.2), (1.3).

Далее, поскольку функция (3.3) при $|x| \to \infty$ стремится к нулю, а ее производные являются, по крайней мере, ограниченными, то в силу следствия доказанной выше теоремы единственности эта функция — единственное решение задачи Коши (1.2), (1.3).

Замечание. В формулу (3.3) начальные данные входят через операторы Лапласа от начальных функций, поэтому указанное фундаментальное решение можно назвать [4] фундаментальным решением второго порядка рассматриваемой задачи Коши. По аналогии с [4] можно доказать, что такое решение, имеющее особенность лишь в налале координат, дифференцируемое нужное число раз всюду вне этой особой точки и равномерно стремящееся к нулю при неограниченном увеличении расстояния до начала координат, единственно.

4. Асимптотические представления решения задачи Коши и их гидродинамический смысл. Выведем асимптотические представления решения задачи Коши (1.2), (1.3), считая правую часть $f(x, t)$ уравнения (1.2) равной нулю. Воспользуемся формулой (3.3) и формулой (7) из [9], записанной в виде

$$u(x,t) = \int_{R^3} [Q_1(\xi)\exp(i\Phi_1) + Q_2(\xi)\exp(i\Phi_2)]\,d\xi \tag{4.1}$$

$$Q_j(\xi) = 16^{-1}\pi^{-3}\{F_x[u_0] + i(-1)^j F_x[u_1]/\nu(\xi)\}$$

$$\Phi_j = -(x, \xi) - (-1)^j \nu(\xi)\,t, \qquad F_x[u_j] = \int_{R^3} u_j(x)\exp\{i(x, \xi)\}\,dx$$

При этом естественно предполагается, что функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют условиям применимости используемых формул.

Рассмотрим три случая, причем в первом и третьем будем считать, что $u_0(x)$ и $u_1(x)$ отличны от нуля лишь в некоторой области B, имеющей диаметр d и содержащей внутри себя начало координат.

Дальняя зона. Исследуем решение в таких точках x, что $|x|/d \gg 1$, т. е. в так называемой дальней зоне. Время t будем считать заключением в диапазоне $[0, t_1]$, где $t_1 < \infty$.

Воспользуемся формулой (3.3). Можно показать, что ее можно представить в виде

$$u(x,t) = \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\int_B \Delta_3 u_0(\xi)\,d\xi + E(x,t)\int_B \Delta_3 u_1(\xi)\,d\xi + R\left(\frac{x}{d}, Nt\right) \tag{4.2}$$

$$|R| \leqslant [N|x|(|x|/d)^{1/4}]^{-1}\left[(2+Nt_1)\frac{d^{1/4}N}{|x|^{1/4}}\int_B |\Delta_3 u_0(\xi)|\,d\xi + \right.$$

$$\left. + 4Nt_1\int_B |\Delta_3 u_1(\xi)|\,d\xi\right]$$

Из оценки (4.2) получаем при сделанных выше предположениях следующую приближенную формулу для решения задачи Коши в дальней зоне:

$$u(x,t) \sim \frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\int_B \Delta_3 u_0(\xi)\,d\xi + E(x,t)\int_B \Delta_3 u_1(\xi)\,d\xi \tag{4.3}$$

Большие значения Nt, x фиксировано. Воспользуемся представлением (4.1). Введя новые переменные интегрирования τ, θ, φ по формулам

(4.4) $$\xi_1 = \tau |x|^{-1} \sin\theta \cos(\varphi + \varphi_0), \quad \xi_2 = \tau |x|^{-1} \sin\theta \sin(\varphi + \varphi_0)$$
$$\xi_3 = \tau |x|^{-1} \cos\theta$$
$$\sin\varphi_0 = x_2/r, \quad \cos\varphi_0 = x_1/r, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

запишем (4.1) так:

(4.5) $$u(x,t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\pi [f_0(\theta, x) \sin\theta \cos(Nt\sin\theta) + \frac{1}{N} f_1(\theta, x) \sin(Nt\sin\theta)]\, d\theta$$

(4.6) $$f_j(\theta, x) = \frac{1}{|x|^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty F_x[u_j] \exp\left[-i\tau\left(\frac{x_3}{|x|}\cos\theta + \frac{r}{|x|}\sin\theta\cos\varphi\right)\right] \tau^2 d\tau$$

Применив метод стационарной фазы, получим из (4.5) для рассматриваемого случая следующую асимптотическую формулу:

(4.7) $$u(x, t) \sim (2\pi)^{-5/2} (Nt)^{-1/2} [f_0(\pi/2, x) \cos(Nt - \pi/4) + N^{-1} f_1(\pi/2, x) \sin(Nt - \pi/4)]$$

Большие Nt, $\omega = |x| / (dNt)$ фиксировано. Воспользуемся опять представлением (4.1). Введя новые переменные интегрирования β, θ, φ по формулам, отличающимся от (4.4) лишь тем, что τ заменено в них на βNt, запишем (4.1) следующим образом:

(4.8) $$u(x,t) = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \beta^2 d\beta \int_0^\pi [Q_1' \exp(iNt\Psi_1) + Q_2' \exp(iNt\Psi_2)]\, d\theta$$
$$Q_j' = 2^{-4} (\pi d\omega)^{-3} \{F_x[u_0] \sin\theta + iN^{-1} (-1)^j F_x[u_1]\}$$
$$\Psi_j = (-1)^{j+1} \sin\theta - \beta (x_3 / |x| \cos\theta + r |x|^{-1} \sin\theta \cos\varphi)$$

Применим к анализу трехкратных интегралов в (4.8) метод стационарной фазы [11] для многократных интегралов.

Решив уравнения

$$\operatorname{grad} \Psi_j = 0, \quad j = 1, 2$$

находим точки стационарности со следующими значениями переменных φ, β, θ:

(4.9) $$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_0 = 0 \text{ для } \Psi_1 \text{ и } \Psi_2$$

(4.10) $$\varphi_1 = 0, \ \theta_1 = \frac{\pi}{2}(1 + \operatorname{sgn} x_3) - \arcsin\frac{x_3}{|x|}, \quad \beta_1 = \frac{r}{|x|} \text{ для } \Psi_1$$

(4.11) $$\varphi_2 = \pi, \ \theta_2 = \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x_3) + \arcsin\frac{x_3}{|x|}, \quad \beta_2 = \frac{r}{|x|} \text{ для } \Psi_2$$

Считаем, что функции $F_x[u_0]$ и $F_x[u_1]$ не имеют особенностей при $\beta = 0$, тогда вкладом точек (4.9) в значение интеграла (4.8) можно пренебречь ввиду наличия множителя β^2 в подынтегральных функциях. Поэтому ограничимся вычислением вкладов точек (4.10) и (4.11), для которых имеем

$$\Psi_j = (-1)^{j+1} |x_3| / |x|$$
$$|\det \operatorname{Hess} \Psi_j| = |x_3| r^2 |x|^{-3}, \quad \operatorname{sgn} \|\operatorname{Hess} \Psi_j\| = (-1)^{j+1}$$

где $\operatorname{Hess} \Psi_j$ — матрица Гесса функций Ψ_j.

С учетом последних формул получаем, что при $Nt \to \infty$ и фиксированном ω главный член асимптотического разложения интеграла (4.8) имеет вид

$$
\begin{aligned}
(4.12) \qquad & u(x, t) \sim (2\pi N t)^{-3/2} (\omega d)^{-3} r (|x_3| \cdot |x|)^{-1/2} \\
& \{|x_3| \cdot |x|^{-1} (\operatorname{Re} F_x' [u_0] S_1 - \operatorname{Im} F_x' [u_0] S_2) + \\
& + N^{-1} (\operatorname{Re} F_x' [u_1] S_2 + \operatorname{Im} F_x' [u_1] S_1)\} \\
& S_1 = \cos (Nt |x_3| / |x| + \pi/4), \quad S_2 = \sin (Nt |x_3| / |x| + \\
& + \pi/4)
\end{aligned}
$$

Здесь $\operatorname{Re} F_x' [u_j]$ и $\operatorname{Im} F_x' [u_j]$ (где $j = 0, 1$) — соответственно вещественная и мнимая части значений функций $F_x [u_j]$ в точке (4.10), причем дополнительно предположено, что $x_3 \neq 0$.

Выведенные формулы (4.3), (4.7) и (4.12) допускают достаточно ясную гидродинамическую интерпретацию, что позволяет сделать ряд выводов относительно процесса распространения начальных возмущений в идеальной несжимаемой непрерывно стратифицированной жидкости с постоянной частотой Брента — Вяйсяля.

Из формулы (4.3) следует, что в дальней зоне поле внутренних волн, образованных начальными возмущениями, имевшими место в некоторой области B, обладает той же структурой, что и поле, описываемое фундаментальным решением $E(x, t)$ оператора внутренних волн. Различие касается лишь амплитуд волн, что проявляется в наличии в (4.3) амплитудных множителей, равных интегралам по области B от функций $\Delta_3 u_0(x)$ и $\Delta_3 u_1(x)$.

Данный вывод справедлив, как это видно из оценки (4.2), лишь начиная с достаточно больших значений отношения $|x|/d$, причем с увеличением величины промежутка времени, прошедшего от момента воздействия начальных возмущений до момента наблюдения, должно увеличиваться и отношение $|x|/d$.

Формулы (4.7) и (4.12) позволяют вывести заключения о характере процесса при больших значениях безразмерного времени Nt.

Из (4.12) следует, что при больших значениях безразмерного времени для точек наблюдения, отстоящих от начала координат на расстояниях $|x| = \omega d N t$, где ω фиксировано и отлично от нуля, в достаточно удаленных областях пространства, в жидкости распространяются прогрессивные волны, схожие с описанными в [1]. Особенность этих волн в том, что они как бы излучаются с частотой N вертикальными полуосями $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$, а затем поглощаются горизонтальной плоскостью $x_3 = 0$; поверхности равных фаз этих волн совпадают с коническими поверхностями $|x_3| / |x| = \mathrm{const}$. Угловая скорость этих поверхностей равна $x_3 t^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$.

Подобные волны наблюдались в лабораторных экспериментах [12] при возбуждении внутренних волн в линейно-стратифицированной жидкости начальным возмущением, сосредоточенным в весьма малой области, причем интересно отметить, что, как следует из фотографий b и c, приведенных в [12] на фиг. 2, правильные системы волн с увеличением времени все больше удаляются от области первоначального возмущения.

Из (4.7) следует, что на поздних стадиях развития процесса в фиксированном районе наблюдения движения жидкости имеют характер стоячих внутренних волн с частотой, равной частоте Брента — Вяйсяля. Изменение в пространстве амплитуды этих волн описывается формулой

(4.6), из которой затруднительно вывести какие-либо следствия без конкретизации начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$.

С увеличением времени амплитуда стоячих волн уменьшается, как $(Nt)^{-1/2}$, в то время как решение задачи Коши для уравнения С. Л. Соболева убывает с течением времени [5], как t^{-1}.

Естественно, к выводам, полученным из формулы (4.7), следует относиться с осторожностью, поскольку на поздних стадиях развития реального процесса существенно возрастает значение сил вязкости, не учитываемых в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович С. Я.* Фундаментальное решение оператора внутренних волн.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 2, с. 286—289.
2. *Обухов А. М.* К вопросу о геострофическом ветре.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 4, с. 281—306.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18, № 1, с. 3—50.
4. *Гальперн С. А.* Задача Коши для уравнения С. Л. Соболева.— Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 4, с. 758—774.
5. *Масленникова В. Н.* Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1968, т. 103, с. 117—141.
6. *Масленникова В. Н.* Явное представление и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для линеаризованной системы вращающейся сжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 5, с. 989—992.
7. *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.— Матем. сб., 1956, т. 39, № 1, с. 51—148.
8. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1960, т. 9, с. 401—423.
9. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнений внутренних волн.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 2, с. 320—323.
10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
11. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
12. *Stevenson T. N.* The phase configuration of internal waves around a body moving in a density stratified fluid — J. Fluid Mech., 1973, v. 60, pt 4, p. 759—767.

Москва

Поступила в редакцию
23.II.81