Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 531.38

ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Клоков В. И., Холшевников К. В.

Исследуется поведение вращательных движений твердого тела с неподвижной точкой во всем фазовом пространстве (в целом). Приводится система неравенств, определяющих связь между топологией конфигурационного пространства и глобальными свойствами движений твердого тела.

Глобальное качественное исследование вращательных движений твердых тел может быть интересно по крайней мере в двух случаях: при изучении эволюции вращательных движений небесных тел и при решении задачи стабилизации твердого тела. В этих случаях важно знать поведение движений во всем фазовом пространстве (при любых начальных условиях) на бесконечно больших интервалах времени. Численные методы, например, дали бы лишь дискретное число траекторий на ограниченном интервале времени. При решении задачи стабилизации твердого тела (которую можно рассматривать как задачу нахождения момента, обеспечивающего асимптотическую устойчивость рассматриваемого движения) возникает вопрос, какова область асимптотической устойчивости этого движения. В частности, можно ли его сделать асимптотически устойчивым в целом. Ответ на эти вопросы можно получить лишь путем глобального качественного исследования [1—4] вращательных движений твердого тела.

Пусть твердое тело имеет неподвижную точку. Положение связанной с твердым телом системы координат относительно инерциальной системы удобно задавать параметрами Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ или, что то же самое, единичным кватернионом $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. При этом кватернионам λ и $-\lambda$ соответствует одно и то же угловое положение тела. Если на единичной сфере $S^3 = \{\lambda \in R^4 : \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1\}$ отождествить диаметрально противоположные точки λ и $-\lambda$, то получится вещественное проективное пространство P^3. Компоненты кватерниона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будут однородными координатами точки на P^3. Умножению кватернионов будет соответствовать сложение поворотов твердого тела, а соответствующая группа будет изоморфна группе вращения $SO(3)$, которая является конфигурационным пространством твердого тела.

Запишем уравнение движения твердого тела с неподвижной точкой в связанной системе координат

$$
\begin{gathered}
I\, d\omega/dt + \omega \times I\omega = M \\
2\lambda_0^{\cdot} = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3,\quad 2\lambda_1^{\cdot} = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3 \\
2\lambda_2^{\cdot} = \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1,\quad 2\lambda_3^{\cdot} = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2 \\
(\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),\ M = (M_1, M_2, M_3))
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где I — тензор инерции твердого тела, ω — вектор угловой скорости, λ — единичный кватернион, определяющий угловое положение связанной системы координат относительно инерциальной системы, M — момент внешних сил.

Система (1) представляет собой систему дифференциальных уравнений на цилиндре $C = R^3 \times P^3 = \{x = (\omega, \lambda) : \omega \in R^3, \lambda \in P^3\}$.

Рассмотрим движение твердого тела под действием потенциальных, диссипативных и гироскопических сил. В этом случае момент запишется в виде

(2) $$M = g + G + Q$$

где $g = g(\omega, \lambda)$ — момент определенно диссипативных сил, таких, что ωg — отрицательно определена относительно угловой скорости ω; $G = G(\omega, \lambda)$ — момент гироскопических сил, таких, что его мощность $\omega G = 0$; $Q = Q(\lambda)$ — момент потенциальных сил. Если $U : P^3 \to R$ — гладкая потенциальная функция, то Q вычисляется по формулам

(3) $$\begin{aligned} 2Q_1 &= -\lambda_0 U_1 + \lambda_1 U_0 - \lambda_3 U_2 + \lambda_2 U_3 \\ 2Q_2 &= -\lambda_0 U_2 + \lambda_2 U_0 - \lambda_1 U_3 + \lambda_3 U_1 \\ 2Q_3 &= -\lambda_0 U_3 + \lambda_3 U_0 - \lambda_2 U_1 + \lambda_1 U_2 \end{aligned}$$

где U_i — частные производные от потенциальной функции U по однородным координатам λ_i вещественного проективного пространства.

Для системы (1) — (3) имеет место следующий закон диссипации полной энергии системы:

(4) $$dV/dt = \omega g, \quad V = (\omega, I\omega)/2 + U(\lambda)$$

где V — полная механическая энергия, складывающаяся из кинетической и потенциальной.

Движение твердого тела под действием диссипативных, потенциальных и гироскопических сил изучалось в работах [5—7]. В них не рассматривались вопросы о поведении траекторий в целом и ограничениях, накладываемых топологией конфигурационного пространства на глобальную картину.

Поведение движений твердого тела во всем фазовом пространстве описывает следующая.

Теорема. Пусть потенциальная функция $U : P^3 \to R$ имеет невырожденные критические точки. Тогда

1°. Имеется конечное четное число $n \geqslant 4$ положений равновесия $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Все положения равновесия гиперболические. Пусть $W(x_k)$ и $W^*(x_k)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия положения равновесия x_k; a_i^0 — количество положений равновесия, для которых размерность устойчивого многообразия равна i, т. е. $\dim W(x_k) = i$, $i = 3, 4, 5, 6$. Справедливы неравенства

(5) $$\begin{aligned} &a_6^0 \geqslant 1, \; a_5^0 - a_6^0 \geqslant 0, \; a_4^0 - a_5^0 + a_6^0 \geqslant 1, \\ &a_3^0 - a_4^0 + a_5^0 - a_6^0 = 0 \end{aligned}$$

2°. Пусть $U_0 < U_1 \geqslant \ldots U_{n-1}$ — критические значения потенциальной функции, соответствующие положениям равновесия x_k ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$). Рассмотрим семейство множеств $\Omega_l = \{x \in C : V(x) < l\}$, $\Omega_\infty = \lim \Omega_l = C$. Всякое движение твердого тела, начавшееся в Ω_l, остается в Ω_l и стремится к одному из положений равновесия $x_k \in \Omega_l$. В частности, каждое начавшееся в Ω_{U_1} движение стремится к x_0 (Ω_{U_1} дает оценку снизу области асимптотической устойчивости для положения равновесия x_0); каждое начавшееся в Ω_{U_2} движение стремится либо к x_0, либо к x_1 и т. д.

Очевидно, что для нахождения всех положений равновесия твердого тела необходимо и достаточно найти все критические точки потенциальной функции $U : P^3 \to R$. По теории Морса [2] можно установить связь между числом и индексами критических точек гладкой на P^3 функции и топологическими инвариантами вещественного проективного пространства. Если критические точки U невырождены, то они изолированы и в силу компактности P^3 их число конечно.

Пусть c_i — количество критических точек с индексом $i = 0, 1, 2, 3$; в частности, c_0, c_3 — количество минимумов и максимумов U. Учитывая, что все нетривиальные числа Бетти по модулю два многообразия P^3 равны единице, получим неравенства Морса

(6) $$c_0 \geqslant 1,\ c_1 - c_0 \geqslant 0,\ c_2 - c_1 + c_0 \geqslant 1,\ c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0$$

Отсюда немедленно следует, что число положений равновесия твердого тела в поле потенциальных, диссипативных и гироскопических сил всегда четно и не меньше четырех.

Характер движения твердого тела в окрестности положения равновесия x полностью определяется индексом i соответствующей критической точки. Потенциальная функция U в окрестности критической точки представляется невырожденной квадратичной формой относительно локальных координат с отрицательным индексом инерции i. Рассмотрев в окрестности положения равновесия линеаризованную систему, можно показать, что она имеет i собственных чисел с положительной вещественной частью и $6 - i$ с отрицательной. Следовательно, положение равновесия — многомерная гиперболическая точка, для которой размерность неустойчивого многообразия $W^*(x)$ равна i, а размерность устойчивого многообразия $W(x)$ равна $6 - i$. Таким образом, $c_i = a_{6-i}{}^0$ и из неравенств (6) вытекает справедливость неравенств (5).

Вторая часть утверждения теоремы следует из известного факта теории устойчивости [8]: всякое движение системы стремится к максимальному инвариантному множеству, обращающему в нуль левую часть ωg соотношения (4). В случае полной диссипации это множество исчерпывается положениями равновесия.

Теорема дает для произвольной гладкой функции нижнюю границу числа критических точек. В прикладных задачах потенциальная функция может аппроксимироваться полиномиальными функциями

(7) $$U = \sum_{i,\,j,\,s,\,t=0}^{2k} a_{i,\,j,\,s,\,t}\lambda_0^i\lambda_1^j\lambda_2^s\lambda_3^t$$

где суммирование производится по индексам, удовлетворяющим условию $i + j + s + t = 2k$.

Оценим пределы изменения числа критических точек полиномиальной функции. Согласно доказательству теоремы существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками функции и вещественными решениями системы, получающейся приравниванием нулю правых частей соотношений (3). Каждое уравнение этой однородной системы (назовем ее системой A) — четная форма порядка $2k$. Вещественное нормированное к единице ее решение соответствует критической точке функции U на P^3. По теореме Безу максимальное число изолированных комплексных решений системы однородных алгебраических уравнений равно $8k^3$. Точную оценку числа вещественных решений можно получить благодаря следующему свойству. Решения системы можно разбить на две группы: одна соответствует условию пропорциональности grad U и λ (это могут быть вещественные и комплексные решения), другая — состоит из посторонних комплексных корней, удовлетворяющих условию $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$. Важно, что посторонние комплексные корни удовлетворяют независимой от системы A системе уравнений и при непрерывном изменении коэффициентов формы не могут переходить в вещественные. Таким образом, если найдена некоторая форма порядка $2k$, для которой система A имеет максимально возможное число решений $v + u = 8k^3$, где v — число вещественных решений, u — число посторонних комплексных решений, то v будет максимальным числом вещественных решений системы A для произвольной формы порядка $2k$. Тогда, если потенциальная функция является квадратичной формой, то тело имеет четыре положения равновесия.

Среди форм четвертой степени указанным свойством обладает форма $U = \lambda_0^4 + \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4$. Система A в этом случае имеет максимальное число корней 64, в том числе 40 вещественных и 24 посторонних комплексных. Таким образом, если потенциальная функция — форма четвертого порядка относительно параметров Родрига — Гамильтона, то число положений равновесия может доходить до сорока. Для гравитационного потенциала, являющегося формой четвертого порядка, оно равно 24. В общем случае построение требуемой формы сложно.

Таким образом, твердое тело, находящееся в поле потенциальных, диссипативных и гироскопических сил, имеет асимптотически устойчивое положение равновесия. Это позволяет решать задачу стабилизации твердого тела [5—7]. Однако сделать данное положение равновесия асимптотически устойчивым в целом при помощи указанных сил невозможно,— всегда найдутся еще по крайней мере три седловых положения равновесия различных типов.

Покажем, что в общем случае, когда на тело действует достаточно произвольный момент, имеют место неравенства, аналогичные (5).

Динамическая система, описывающая движение твердого тела и заданная на цилиндре $C = R^3 \times P^3$, может иметь ряд особенностей, затрудняющих ее исследование и мало интересных для настоящего рассмотрения. Во первых, из-за некомпактности C могут быть траектории, уходящие на бесконечность. Например, под действием постоянного момента твердое тело может достигать сколь угодно больших угловых скоростей. Реализовать такое движение на практике невозможно из-за ограниченности бортовых энергетических ресурсов. Во-вторых, картина поведения шестимерной динамической системы может быть весьма сложной, могут возникать, например, гетероклинические и гомоклинические структуры. Чтобы исключить из рассмотрения указанные типы поведения, наложим на динамическую систему ряд ограничений.

Пусть на твердое тело действует момент $M(\omega, \lambda)$, гладкий на $R^3 \times P^3$ и такой, что:

А) для достаточно больших угловых скоростей ω величина ωM отрицательна, т. е. если рассмотреть динамическую систему на многообразии с краем $e^3 \times P^3 = \{\omega \in e^3, \lambda \in P^3\}$, где e^3 — шар достаточно большого радиуса, то векторное поле на границе этого многообразия $\partial(e^3 \times P^3) = S^2 \times P^3$ считается направленным трансверсально внутрь многообразия;

Б) динамическая система является обобщенной системой Морса — Смейла, т. е. обладает свойствами:

Б1) множество неблуждающих траекторий состоит из конечного числа i-мерных периодических поверхностей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (периодической i-мерной поверхностью называется инвариантное подмногообразие, гомеоморфное i-мерному тору T^i, в частности, нуль-мерная периодическая поверхность — неподвижная точка или положение равновесия, одномерная периодическая поверхность — замкнутая траектория, двумерная периодическая поверхность — двумерный тор, представляющий объединение траекторий);

Б2) все β гиперболические;

Б3) не существует замкнутых циклов траекторий между β_i; точнее говоря, не существует последовательности индексов $i = i_1, i_2, \ldots, i_k = i$, таких, что $W^*(\beta_{i_j}) \cap W(\beta_{i_{j+1}}) \neq \varnothing$ для $1 \leqslant j \leqslant k$, где $W(\beta_i)$, $W^*(\beta_i)$ — устойчивое и неустойчивое многообразие для β_i.

Описанная динамическая система задана на многообразии $e^3 \times P^3$ с краем $S^2 \times P^3$. Чтобы воспользоваться неравенствами Морса — Смейла, нужно избавиться от края. Склеим $e^3 \times P^3$ со вторым экземпляром $e^3 \times \times P^3$ по краю $S^2 \times P^3$. Получим компактное многообразие D без края. Стандартными приемами дифференциальной топологии [9] можно, во-первых, сделать D гладким, во-вторых, подсчитать группы гомологий D и найти числа Бетти по модулю два

$$R_{0,1,2} = 1, \; R_3 = 2, \; R_{4,5,6} = 1 \tag{8}$$

Теперь нужно доопределить векторное поле на втором экземпляре $e^3 \times P^3$. Будем считать, что на нем задано векторное поле с четырьмя критическими точками x_i, так что $\dim W(x_i) = i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Можно полагать, например, что векторное поле направлено противоположно приведенному в первой части работы векторному полю диссипативной динамической системы с наименьшим количеством неподвижных точек. Гладкость склейки векторных полей на первом и втором экземпляре $e^3 \times P^3$ может быть достигнута обычным способом — малым шевелением векторного поля в окрестности границы склейки $S^2 \times P^3$, при этом используется трансверсальность векторных полей на границе.

Воспользуемся обобщенными неравенствами Морса — Смейла [10] для динамических систем, которые в общем случае имеют вид

$$M_0 \geqslant R_0, \qquad M_1 - M_0 \geqslant R_1 - R_0, \ldots$$

$$\ldots, \qquad \sum_{k=0}^{6} (-1)^k M_k = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k R_k = \varkappa(D)$$

$$\left(M_s = \sum_{k=0}^{5} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{s+i}^k, \; \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\right)$$

Здесь R_i — i-е число Бетти по модулю два многообразия D, $\varkappa(D)$ — эйлерова характеристика D, a_j^0 — количество неподвижных точек β, таких, что $\dim W(\beta) = j$, a_j^1 — количество замкнутых траекторий β, таких, что $\dim W(\beta) = j$, a_j^i — количество i-мерных периодических поверхностей β, таких, что $\dim W(\beta) = j$, причем $a_j^i = 0$ при $j < i$.

Учитывая, что динамическая система на D уже имеет четыре неподвижные точки x_i, получаем

$$\begin{aligned}
&a_6^0 + a_6^1 + a_6^2 + a_6^3 + a_6^4 + a_6^5 \geqslant 1 \\
&a_5^0 - a_6^0 + a_5^1 + (a_5^2 + a_6^2) + (a_5^3 + 2a_6^3) + (a_5^4 + 3a_6^4) + \\
&+ (a_5^5 + 4a_6^5) \geqslant 0 \\
&a_4^0 - a_5^0 + a_6^0 + a_4^1 + (a_4^2 + a_5^2) + (a_4^3 + 2a_5^3 + a_6^3) + \\
&+ (a_4^4 + 3a_5^4 + 3a_6^4) + (4a_5^5 + 6a_6^5) \geqslant 1 \\
&a_3^0 - a_4^0 + a_5^0 - a_6^0 + a_3^1 + (a_3^2 + a_4^2) + (a_3^3 + 2a_4^3 + \\
&+ a_5^3) + (3a_4^4 + 3a_5^4 + a_6^4) + \\
&+ (6a_5^6 + 4a_6^5) \geqslant 0 \\
&a_2^0 - a_3^0 + a_4^0 - a_5^0 + a_6^0 + a_2^1 + (a_2^2 + a_3^2) + (2a_3^3 + \\
&+ a_4^3) + (3a_4^4 + a_5^4) + (4a_5^5 + a_6^5) \geqslant 0 \\
&a_1^0 - a_2^0 + a_3^0 - a_4^0 + a_5^0 - a_6^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \\
&+ a_4^4 + a_5^5 \geqslant 0 \\
&a_0^0 - a_1^0 + a_2^0 - a_3^0 + a_4^0 - a_5^0 + a_6^0 = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Из неравенств (9) вытекают, в частности, следующие утверждения. Если твердое тело имеет только положения равновесия, то их число не меньше четырех: $a_k^0 \geqslant 1$, $k = 6, 5, 4, 3$; если имеются только замкнутые траектории, то их не меньше двух: $a_6^1 \geqslant 1$, $a_4^1 \geqslant 1$; если имеются только двумерные инвариантные торы, то их не меньше двух: $a_6^2 \geqslant 1$, $a_4^2 + a_5^2 \geqslant 1$; если имеются только инвариантные i-мерные торы ($i = 3, 4, 5$), то всегда найдется по крайней мере один устойчивый тор: $a_6^i \geqslant 1$.

Таким образом, для гладкого момента система неравенств (9) определяет естественные топологические ограничения на динамику вращения твердого тела. Для часто встречающихся в прикладной механике релейных систем, вероятно, можно найти аналогичные соотношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
2. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
3. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы.— Усп. матем. наук, 1970, т. 25. № 1, 113—185.
4. *Алексеев В. М.* Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики.— В кн.: Девятая летняя матем. школа. К.: Ин-т матем. АН УССР, 1972, с. 212—341.
5. *Румянцев В. В.* Две задачи о стабилизации движения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 5—12.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
7. *Клоков В. И.* О стабилизации вращательного движения космического аппарата.— Вестн. ЛГУ. Матем., механ., астрон., 1976, вып. 4, № 19, 145—148.

   Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
9. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976. 463 с.
10. *Rosenberg H.* A generalization of Morse-Smale inequalities.— Bull. Amer. Math. Soc., 1964, v. 70, No. 3, p. 422—427.

Ленинград

Поступила в редакцию 19.X.1981