

УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ПОТЕРИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Фейгин М. И.

Исследуются бифуркации периодических движений нелинейных систем, которые могут приводить к состоянию, в котором изменение знака управляющего параметра перестает изменять характер несимметричности движения системы. Приводятся результаты изучения конкретных систем (кусочно-спитой и со степенной нелинейностью), иллюстрирующие механизм возникновения аварийной ситуации.

Известно, что в симметричных системах возможны, вообще говоря, и несимметричные движения, когда симметричные оказываются неустойчивыми (например, [1]). Область значений параметров, в которой устойчивы и симметричный, и несимметричные установившиеся режимы, была обнаружена в схеме триггера [2, 3]. Анализ ряда других симметричных систем выявил многочисленные симметричные и несимметричные движения и возможность пересечения областей их существования [4—6]. В связи с этим приобретает важность изучение случаев существования устойчивого неуправляемого движения наряду с устойчивым управляемым [7]. В практическом плане такая ситуация «потенциально аварийная», так как не обнаруживается до момента потери управления. Для определения местоположения в пространстве параметров области возможной потери управления существенно предварительное выделение бифуркационных узловых точек, соответствующих зарождению несимметричных движений.

В работе исследуются случаи рождения несимметричных движений, связанные как с потерей устойчивости симметричных колебаний, так и нарушением условий их существования в кусочно-спитых системах. Показано, что соответствующие бифуркационные границы устойчивости и S -границы пространства параметров являются опасными [8] и гистерезисными. В качестве примеров рассматриваются неоднократно изучавшиеся ранее осциллятор с ограничителями перемещения и система, описываемая уравнением Дуффинга. В пространстве параметров выделены узловые точки зарождения несимметричных решений с периодом внешней силы и области возможной потери управления.

1. Рождение несимметричных движений из симметричных при потере устойчивости. Пусть в фазовом пространстве x_1, \dots, x_{n-1}, t нелинейной динамической системы существуют гладкие поверхности s_+, s_- , такие, что изучение рассматриваемых движений $x(t)$ можно свести к изучению последовательности точечных отображений этих поверхностей одна на другую

$$(1.1) \quad x_1 = f^+(t_1, x_0, t_0, a_+), \quad x_2 = f^-(t_2, x_1, t_1, a_-), \quad \dots$$

Здесь f^+, f^- — периодические по t с периодом $2T$ векторные функции, в которых $f_n^+ = 0, f_n^- = 0$ — уравнения поверхностей $s_+, s_- (x_n(t) \equiv 0)$; a_+, a_- — параметры.

Перейдем к новым параметрам a, μ

$$a_+ = a + \mu, \quad a_- = -a + \mu$$

Пусть при $\mu = 0$ выполняются соотношения

$$(1.2) \quad f^-(t_{k+1} + T, -x_k, t_k + T, -a) = -f^+(t_{k+1}, x_k, t_k, a)$$

которые естественно назвать условиями симметризуемости, так как в этом случае в системе возможны симметричные решения в смысле $x(t + T) = -x(t)$.

Для исследования неподвижной точки $x_0 = x_2 = x_*, t_0 = t_2 - 2T = t_*$ отображений (1.1), соответствующей симметричному решению, до-

статочно рассмотреть первое отображение (1.1), дополняя его условиями

$$(1.3) \quad x_0 = -x_1, \quad t_0 = t_1 - T$$

Таким образом, координаты x_* , t_* определяются уравнениями

$$(1.4) \quad -x_* = f^+(t_* + T, x_*, t_*, a)$$

а устойчивость — расположением относительно единичной окружности корней характеристического полинома

$$(1.5) \quad \det F(\lambda) = 0$$

где $F(\lambda)$ — квадратная матрица, элементы которой равны значениям в неподвижной точке соответствующих частных производных

$$(1.6) \quad \varphi_{ij} = \frac{\partial f_i^+}{\partial x_{j0}} + \delta_{ij}\lambda, \quad \varphi_{in} = \frac{\partial f_i^+}{\partial t_0} + \lambda \frac{\partial f_i^+}{\partial t_1}$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n-1$$

Решение (1.4) будем далее рассматривать в качестве опорного Γ_* и для каждой из точек x_k последовательности (1.1) введем новые переменные ξ_k, τ_k

$$(1.7) \quad x_k = (-1)^k x_* + \xi_k, \quad t_k = t_* + kT + (-1)^k \tau_k$$

Уравнения (1.1) в новых переменных с учетом (1.2) запишем в виде

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= x_* + f^+(t_* + T - \tau_1, x_* + \xi_0, t_* + \tau_0, a + \mu) \\ -\xi_2 &= x_* + f^+(t_* + T + \tau_2, x_* - \xi_1, t_* - \tau_1, a - \mu) \end{aligned}$$

Выражения (1.8) различаются лишь знаками переменных ξ, τ и μ . Таким образом, если известно Γ_* , то для отыскания координат точечной последовательности, порождаемой фазовыми траекториями несимметричной системы, достаточно первой системы уравнений (1.8), если изменять в них поочередно знаки ξ, τ, μ . Так, периодическое решение, фазовая траектория которого сшивается из двух участков, определяется системами уравнений (1.8), дополненных условиями $\xi_2 = \xi_0, \tau_2 = \tau_0$ или более простым для написания условием $\xi_2 = \xi_0$, если формально понимать под n -й координатой вектора ξ значение τ .

Для изучения бифуркационных переходов рассмотрим движения, близкие к Γ_* . Наряду с введенным параметром μ , характеризующим несимметричность системы, вводим, полагая $a = a_* + \varepsilon$, параметр ε , изменение которого не нарушает симметричность. Отметим, что при рассмотрении отличающегося от Γ_* симметричного решения ($\varepsilon \neq 0, \mu = 0$) координаты ξ_0, ξ_1 согласно (1.3), (1.7) удовлетворяют соотношению

$$(1.9) \quad \xi_0 = -\xi_1$$

Пусть правые части уравнений (1.8) допускают разложение в ряды при $|\mu|, |\varepsilon| \ll |a|$ в окрестности x_*, t_*, a_* . Перепишем эти уравнения в линеаризованном виде и преобразуем их, рассматривая в качестве неизвестных суммы $\xi_0 + \xi_1$ и разности $\xi_0 - \xi_1$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} F(-1) \times (\xi_0 + \xi_1) &= -2A\mu, \quad F(1) \times (\xi_0 - \xi_1) = -2A\varepsilon \\ (A &= \partial f^+ / \partial a) \end{aligned}$$

Здесь $F(\pm 1)$ — матрица (1.6) соответственно при значении $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Если $\det F(-1) \neq 0$, то из первой системы уравнений (1.10) следует, что при $\mu = 0$, т. е. в симметричной системе, существует лишь симметричное движение.

В невырожденном случае $\det F (\pm 1) \neq 0$ без нарушения общности рассмотрения можно полагать $\varepsilon = 0$. Тогда линейризованные уравнения (1.10) определяют единственное несимметричное решение

$$(1.11) \quad \xi_* = \xi_0 = \xi_1 = -F^{-1}(-1) A \mu$$

Отсюда следует, во-первых, что для отыскания несимметричного решения в координатах ξ , τ с погрешностью μ^2 достаточно одной первой системы уравнений (1.8), дополненной соотношением (1.11). Во-вторых, изменение характера несимметричного движения системы, т. е. знака решения (1.7), может быть вызвано двумя причинами: изменением знака параметра μ и переходом корня характеристического уравнения (1.5) через значение $\lambda = -1$, так как

$$(1.12) \quad \left(\frac{\partial \xi_*}{\partial \mu} \right)_{\lambda < -1} \times \left(\frac{\partial \xi_*}{\partial \mu} \right)_{\lambda > -1} < 0$$

Существованию при $\mu = 0$ близких к опорному несимметричных решений $\xi^\circ = \xi_0 = \xi_1 \neq 0$ соответствует вырожденный случай $\det F (-1) = 0$. Здесь для отыскания координат первой системы линейризованных уравнений (1.10) становится недостаточно. Пусть ранг якобиана первой системы (1.8) при $\mu = 0$ равен $n - 1$ и при $\mu = 0$, $a = a_* + \varepsilon$ какие-либо $n - 1$ уравнений, например первые позволяют выразить искомые координаты несимметричного решения как функции τ° и ε . Подставим $\xi^\circ(\tau^\circ, \varepsilon)$ в последнее уравнение

$$(1.13) \quad f_n^+(t_* + T - \tau^\circ, x_* + \varepsilon^\circ(\tau^\circ + \varepsilon), t_* + \tau^\circ, a_* + \varepsilon) = 0$$

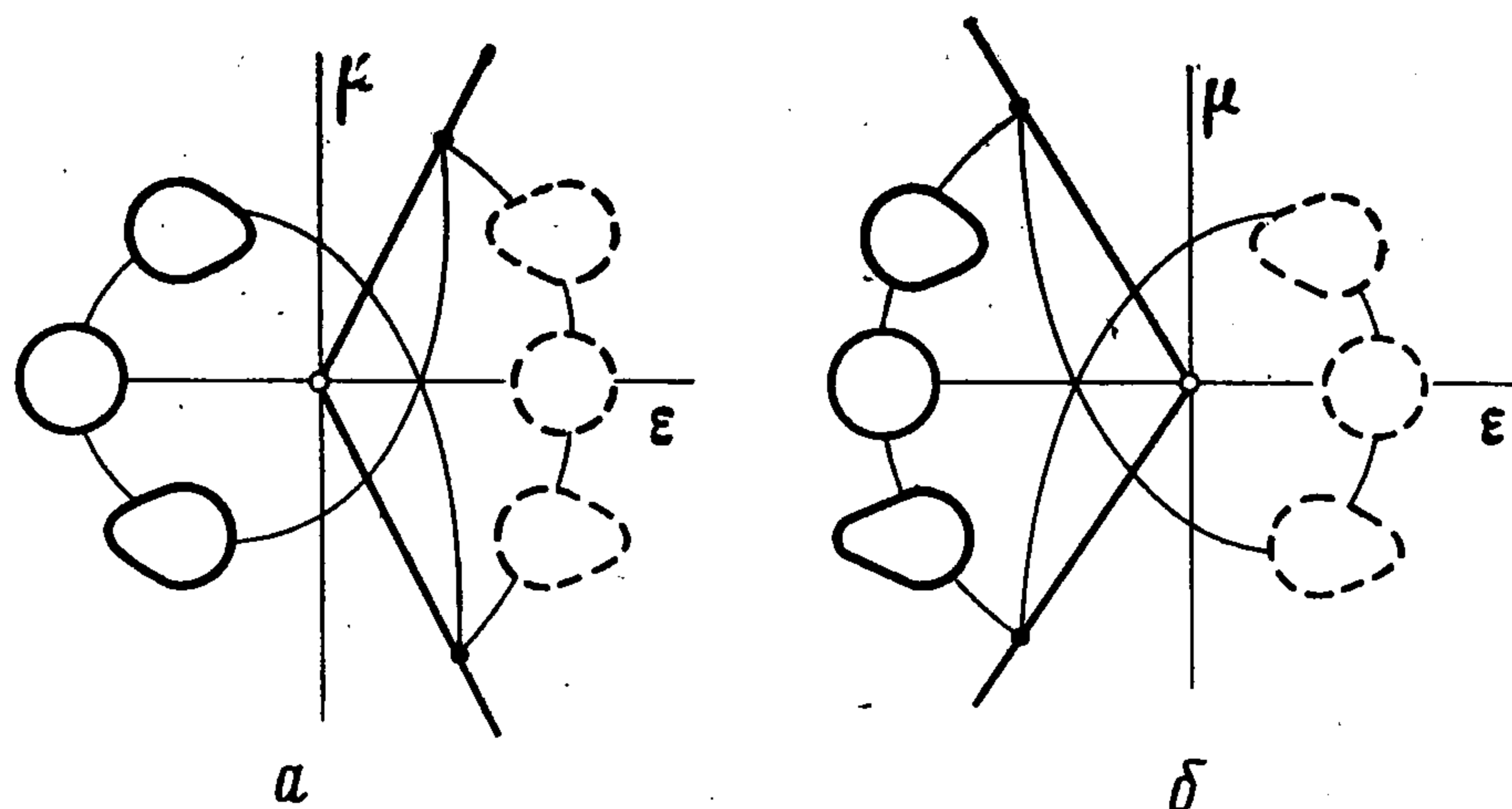
и представим его в виде ряда по τ° и ε . В общем случае рассматриваемого вырождения первыми отличными от нуля будут члены, содержащие $\tau^{\circ 2}$ и ε . Условию существования искомого решения $\tau^{\circ 2} > 0$ соответствует

$$(1.14) \quad \text{sign } \varepsilon = - \text{sign} \left(\frac{\partial^2 f_n^+}{\partial \tau^2} \times \frac{\partial f_n^+}{\partial a} \right)$$

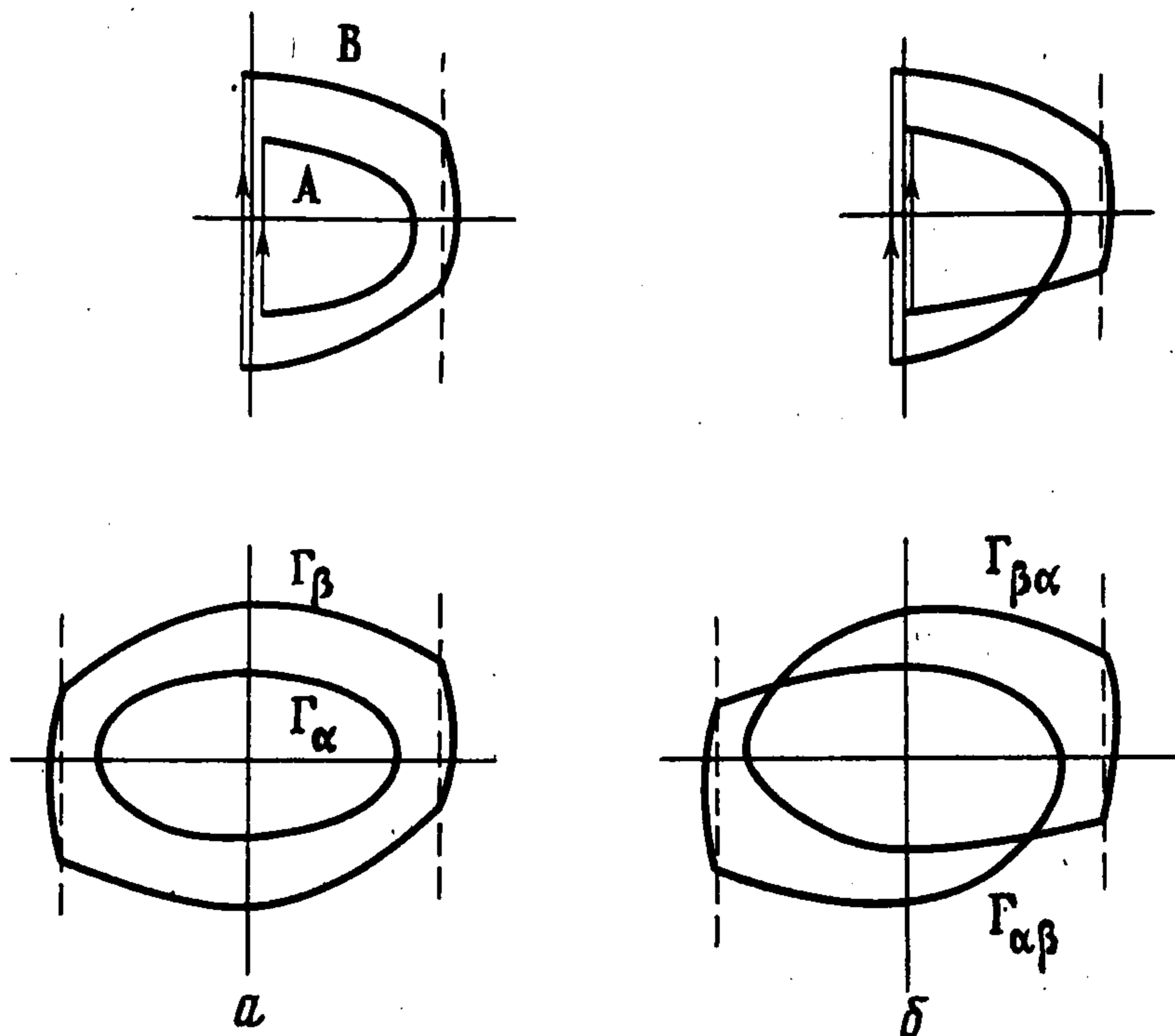
Следовательно, изменению ε с переходом через $\varepsilon = 0$ соответствует в фазовом пространстве либо рождение, либо исчезновение двух несимметричных периодических решений. Что же касается симметричного решения (1.9), то оно, согласно второй системе (1.10), существует как при $\varepsilon > 0$, так и при $\varepsilon < 0$. Таким образом, граница $\varepsilon = 0$ отделяет область существования симметричного решения от области, в которой наряду с симметричным существует еще пара несимметричных решений. Граница между этими областями в плоскости параметров ε , μ в общем случае в силу выполнения условия (1.12) должна быть необратимой (гистерезисной).

Если вырождение $\det F (-1) = 0$ связано с потерей устойчивости симметричным решением, то в узле $\varepsilon = \mu = 0$ происходит либо рождение двух устойчивых несимметричных (фиг. 1, а), либо слияние с парой неустойчивых несимметричных решений (фиг. 1, б).

2. Рождение несимметричных движений при C-бифуркациях. Пусть фазовое полупространство симметричной системы сшито из областей одинаковой размерности Φ_α , Φ_β и фазовая траектория Γ_α симметричного движения расположена в Φ_α . При изменении параметра a C-бифуркации движения Γ_α соответствует приход его траектории на границу области Φ_β и слияние с фазовой траекторией симметричного периодического движения Γ_β , включавшей участок движения в области Φ_β . Неподвижные точки, соответствующие Γ_α , Γ_β , определяются «укороченными» уравнениями ото-



Фиг. 1



Фиг. 2

бражений, порождаемых фазовыми траекториями лишь на полупериоде движений

$$(2.1) \quad x_1 = f_\alpha(t_1, x_0, t_0, a), \quad x_1 = f_\beta(t_1, x_0, t_0, a)$$

искусственно замыкаемых условиями (1.3). Устойчивость неподвижных точек определяется спектром собственных значений α_i, β_i .

Будем обозначать «полупериодические» движения A, B , если они устойчивы, и α, β , если неустойчивы, а полные движения $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ обозначим $AA, BB, \alpha\alpha, \beta\beta$ (фиг. 2). При S -бифуркации полупериодические движения совпадают, поэтому для определения структуры S -границы применимы условия [6], требующие знания суммарного числа действительных значений α_i и β_i , расположенных справа от $+1$ (σ_+) и слева от -1 (σ_-).

1°. Если σ_+ четно, то происходит переход как полупериодических, так и полных движений одного в другое. Возможны следующие структуры переходов:

$$(2.2) \quad AA \rightarrow BB, \quad AA \rightarrow \beta\beta, \quad \alpha\alpha \rightarrow \beta\beta$$

2°. Если σ_+ нечетно, то происходит слияние как полупериодических, так и полных движений с последующим их исчезновением. Возможны два случая

$$(2.3) \quad AA, \beta\beta \rightarrow \emptyset, \quad \alpha\alpha, \beta\beta \rightarrow \emptyset$$

3°. Если нечетно σ_- , то указанные простейшие бифуркации сопровождаются рождением (или исчезновением) двухполупериодического движения, траектория которого сшивается из траекторий полупериодических движе-

ний (фиг. 2, б) и соответствует несимметричному периодическому движению. В силу симметрии исходной математической модели последовательности сшивания полупериодических движений равносильны. Следовательно, в фазовом пространстве рождается (или исчезает) сразу пара несимметричных периодических движений AB , BA или $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ (фиг. 2, б). Переходы (2.2), (2.3) сопровождаются при этом изменением знака выражения (1.5) при $\lambda = -1$. Следовательно, при введении параметра управления μ зависимости от μ периодических решений, близких к AA , $\alpha\alpha$ и BB , $\beta\beta$, будут разных знаков, а соответствующие C -границы плоскости параметров a , μ будут необратимыми (гистерезисными).

Расположение области существования несимметричных режимов относительно C -границы определяется корнями λ_i их характеристического уравнения и корнями двухполупериодного движения, формально образованного из полупериодного, пусть это будут корни α_i^2 . Построенные таким образом движения при C -бифуркации совпадают, и к ним применимы сформулированные выше условия 1°—3°. Так, в зависимости от нечетности или четности суммарного числа действительных значений λ_i и α_i^2 , расположенных справа от $+1$ (σ_+ '), область существования несимметричных движений расположена соответственно одинаково с областью существования Γ_α или по другую сторону C -границы.

Описанная процедура определения структуры C -бифуркационного перехода может быть применена, в свою очередь, к периодическим режимам, сшиваемым из двух, четырех и т. д. полутраекторий. Если ограничиться рассмотрением двухполупериодных несимметричных движений, то кроме (2.2), (2.3) возможны следующие структуры C -бифуркационных переходов в симметричных системах.

Изменение типа симметричного движения с возникновением пары несимметричных движений происходит, когда нечетно σ_- , а σ_+ и σ_+ ' четные. В этом случае возможны пять структур

$$\begin{aligned} \alpha\alpha &\rightarrow \beta\beta, AB, BA; \alpha\alpha \rightarrow \beta\beta, \alpha\beta, \beta\alpha \\ AA &\rightarrow \beta\beta, AB, BA; AA \rightarrow \beta\beta, \alpha\beta, \beta\alpha; \alpha\alpha \rightarrow BB, \alpha\beta, \beta\alpha \end{aligned}$$

Слияние с исчезновением симметричных движений двух типов и пары несимметричных движений будет иметь место, когда нечетны все три числа σ_+ , σ_- , σ_+ '. Здесь возможны три структуры переходов

$$AA, \beta\beta, \alpha\beta, \beta\alpha \rightarrow \phi; \alpha\alpha, \beta\beta, AB, BA \rightarrow \phi; \alpha\alpha, \beta\beta, \alpha\beta, \beta\alpha \rightarrow \phi$$

3. Проведенное выше рассмотрение бифуркаций периодических движений позволяет выделить несколько интересных случаев возможного поведения систем в окрестности бифуркационных границ. Первый — это высокая чувствительность движения к несимметричности системы (параметру μ). Согласно (1.11), ее следует ожидать, если $|\det F(-1)| \ll 1$. Указанное обстоятельство может не позволить экспериментально наблюдать строго симметричные движения [9]. Второй случай — это возможность обратного эффекта, а именно наблюдение «мерцающего» симметричного движения в областях значений параметров, где симметричные движения неустойчивы. Мерцающий режим можно наблюдать в узкой полосе существования пары устойчивых несимметричных решений, если она перекрывается флюктуациями параметра μ . Третий случай — это возможность потери управления движением симметричных систем, когда изменение знака параметра управления μ перестает изменять характер несимметричности движения системы.

В качестве первого примера системы, в которой может иметь место потеря управления движением, рассмотрим вынужденные колебания осциллятора с ограничителями, описываемые уравнениями в безразмерной форме

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x'' + x &= \cos \omega \tau, \quad a_- < x < a_+ \\ x'(\tau + 0) &= -R x'(\tau - 0), \quad x = a_+, \quad x = a_- \end{aligned}$$

Здесь R — коэффициент восстановления скорости ($0 < R < 1$).

Безударные периодические движения представляют собой установившиеся вынужденные колебания линейной системы

$$(3.2) \quad p(\tau) = \frac{\cos \omega \tau}{1 - \omega^2} = \kappa \cos \omega \tau, \quad a_- < \kappa < a_+$$

Перейдем к новым параметрам $a = (a_+ - a_-)/2$, $\mu = (a_+ + a_-)/2$. Введем точечные отображения Π_R , Π полуповерхности $x = 0$, $x' > 0$ на полуповерхность $x = 0$, $x' < 0$, порождаемые траекториями системы (3.1). Уравнения Π_R включают соударение в момент $\tau = \tau_1 \in (\tau_0, \tau_2)$ и записываются в виде

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x_1' &= -R(p_1' + p_0 \sin \tau_{01} + (x_0' - p_0') \cos \tau_{01}) \\ p_1 - p_0 \cos \tau_{01} + (x_0' - p_0') \sin \tau_{01} - a - \mu &= 0 \\ x_2' &= p_2' + (p_1 - a - \mu) \sin \tau_{12} + (x_1' - p_1') \cos \tau_{12} \\ p_2 - (p_1 - a - \mu) \cos \tau_{12} + (x_1' - p_1') \sin \tau_{12} &= 0 \\ \tau_{ij} &= \tau_j - \tau_i, \quad p_i = p(\tau_i) \end{aligned}$$

Уравнения Π определяются траекторией без соударения

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_2' &= p_2' + p_0 \sin \tau_{02} + (x_0' - p_0') \cos \tau_{02} \\ p_2 - p_0 \cos \tau_{02} + (x_0' - p_0') \sin \tau_{02} &= 0 \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ правые части уравнений удовлетворяют условиям симметричности (1.2). Координаты неподвижной точки симметричного решения (устойчивого VB_s или неустойчивого $\beta\beta_s$) с двумя соударениями за период $2T = 2\pi/\omega$ получим дополнив уравнения (3.3) условиями (1.3).

C -бифуркационному случаю слияния ударного и безударного периодических решений соответствует $x_1' \rightarrow 0$ при рассмотрении Π_R (3.3) или выполнение одного из условий

$$(3.5) \quad |\kappa| = a + \mu, \quad \mu \leq 0; \quad |\kappa| = a - \mu, \quad \mu \geq 0$$

при рассмотрении Π (3.4). Анализ корней характеристических уравнений при $\mu = 0$ показывает, что C -граница (3.5) соответствует простейшему переходу $\beta\beta_s \rightarrow AA$, а также либо разделяет области существования симметричного безударного движения AA и несимметричных субгармонических движений с одним соударением за период $2T = 2^k\pi/\omega$ ($k = 1, 2, \dots$) в интервалах частоты

$$(3.6) \quad 2n + 1 < 1/\omega < 2n + 1 + 2^{-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

либо является границей их слияния с последующим исчезновением в интервалах

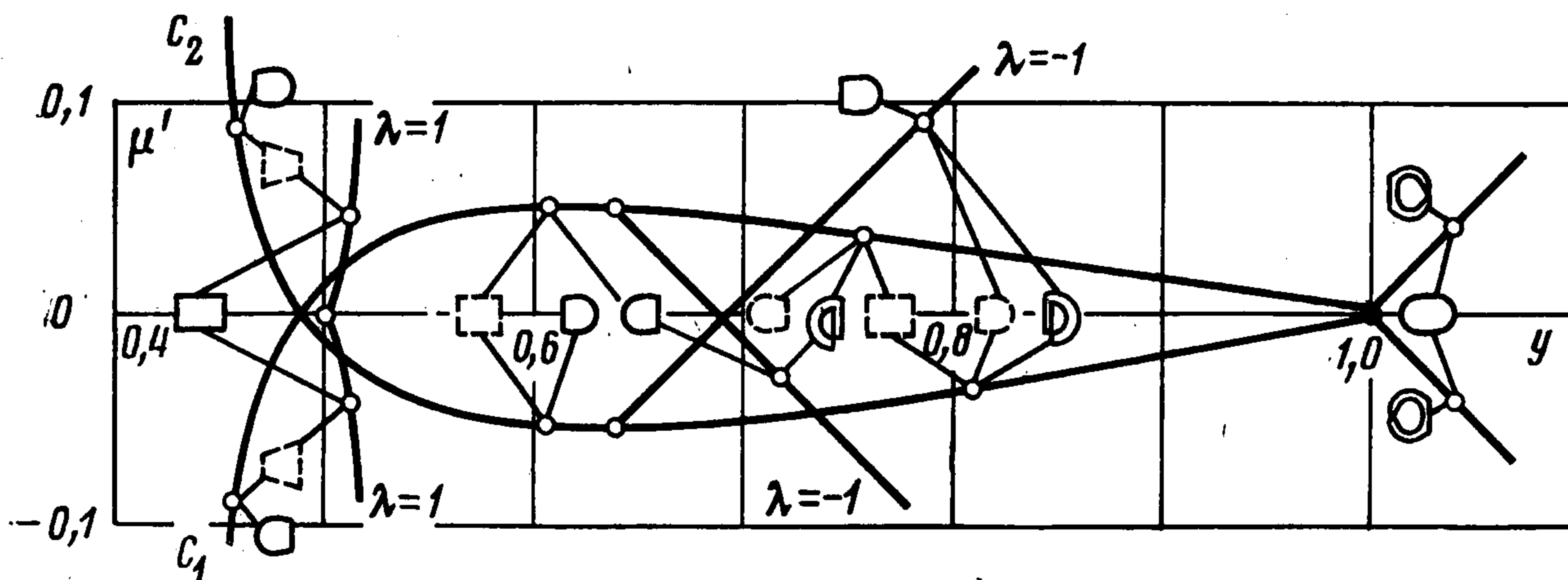
$$(3.7) \quad 2n + 1 + 2^{-k} < 1/\omega < 2n + 1 + 2^{-k+1}$$

Бифуркационная картина с учетом несимметричности системы рассмотрена для $\omega = 0,8$, $R = 0,5$. Структура C -границы (3.5) определяется условием (3.6) для $n = 0$, $k = 1$ и корнями характеристического уравнения одноударного субгармонического решения порядка $1/2$. При $\mu = 0$ в рамках рассматриваемых движений она опи-

связывается переходом

$$BAAA, AAAB, \beta\alpha, \alpha\beta, \beta\beta_s \rightarrow AA$$

Симметричное двухударное движение $\beta\beta_s$ сохраняет неустойчивость в интервале $y = a/\kappa \in (0,5; 1,0)$. При $y = 0,5$ оно становится устойчивым с переходом корня через значение $\lambda = -1$. Для уточнения в соответствии с условием (1.14) структуры такого бифуркационного перехода полагаем $y = 0,5 + \varepsilon$. Случаю $\lambda = -1$ соответствует решение $x_* = -0,381$, $\text{tg } \omega\tau_* = -0,105$ и значения соответствующих производных $x_a = -0,546$, $x_\tau = 0,307$, $x_{\tau\tau} = 1,38$, $f_a = 0,68$, $f_{\tau\tau} = 0,341$. В соответствии с (1.14) пара несимметричных решений $\beta\beta_n$ существует при $\varepsilon < 0$. Следовательно, в окрестности $y = 0,5$, $\mu = 0$ вдоль оси a имеет место переход $\beta\beta_n, \beta\beta_n, BV_s \rightarrow \beta\beta_s$ (фиг. 1, б). Выделенный бифуркационный узел является истоком границ устойчивости, соответствующих корню $\lambda = 1$ для одного из движений $\beta\beta_n$ при $\mu < 0$, а для другого — при $\mu > 0$.



Фиг. 3

Анализ несимметричных движений типа $\beta\alpha$, $\alpha\beta$ приводит к следующим уравнениям границ устойчивости ($\lambda = -1$): $a + \mu = 0,691$, если $-a + \mu < x(\tau)_{\min}$ $-a + \mu = 0,691$, если $a + \mu > x(\tau)_{\max}$.

Указанные границы простираются до пересечения с C -границами C_1 или C_2 возникновения дополнительного контакта траектории движения со вторым ограничителем $x = -a + \mu$ или $x = a + \mu$. Границы C_1, C_2 начинаются в узле $y = 1, \mu = 0$ и пересекаются между собой и с осью a в узле $y = 0,495$. Структура границ в пространстве параметров определяется корнями характеристических уравнений решений типа $\beta\beta_n, AV, \alpha\beta$. Если одноударное движение устойчиво, имеет место переход $\beta\beta_n, AV \rightarrow \mathcal{Q}$, если неустойчиво — переход $\beta\beta_n, \alpha\beta \rightarrow \alpha\beta\beta\beta$.

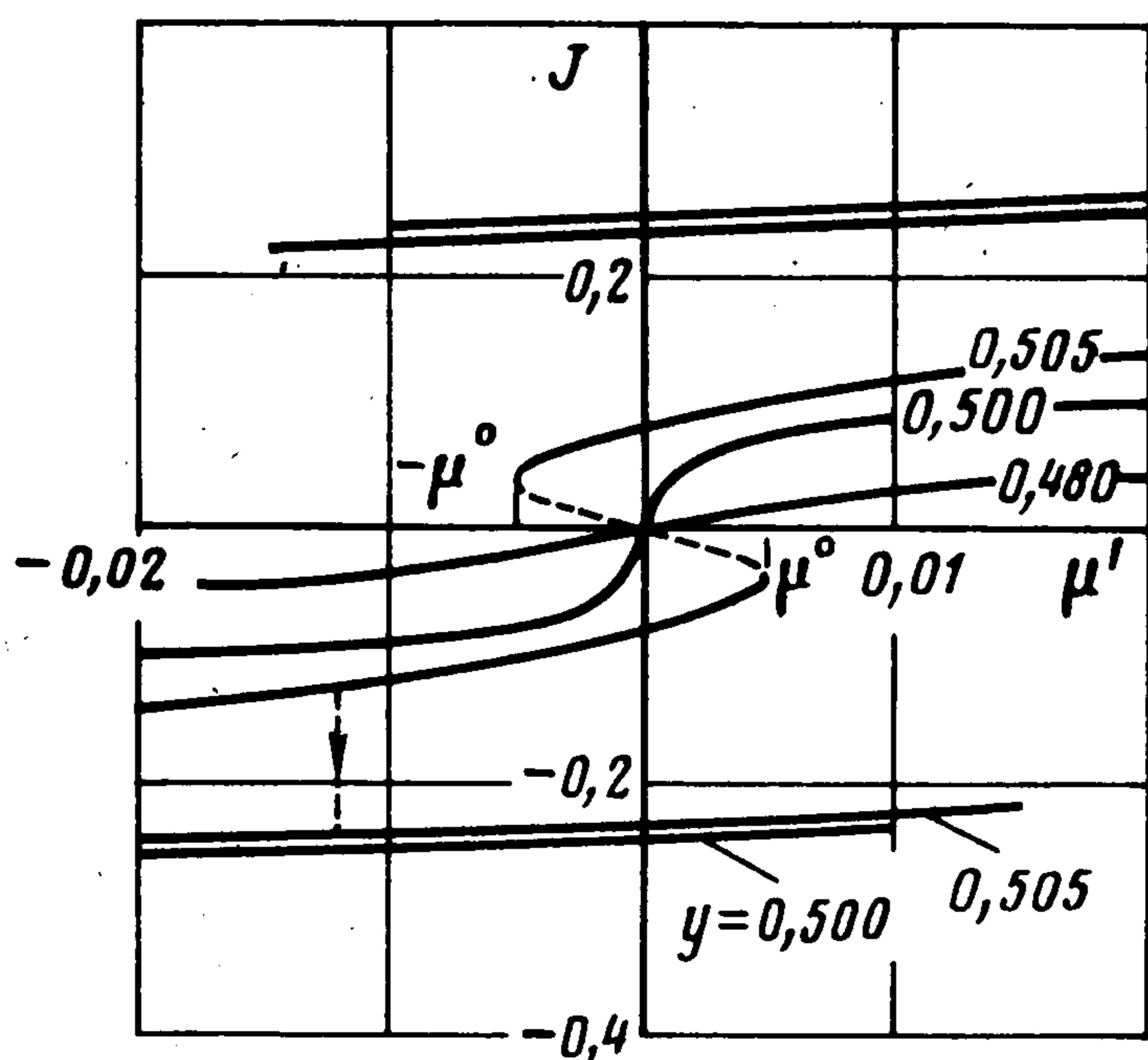
На фиг. 3 изображено разбиение плоскости параметров $y, \mu' = \mu/\kappa$ на области различных периодических движений и указаны структуры выделенных бифуркационных границ в рамках рассмотренных периодических решений. В интервале $0,8 < y < 1,0$ симметричные решения неустойчивы, а границы C_1, C_2 , выделяющие область существования двух устойчивых несимметричных решений, расположены в узкой полосе $|\mu'| < 0,03$. Если флуктуации μ' перекрывают указанную полосу, можно ожидать мерцающее симметричное движение. При моделировании поведения системы на АВМ такое движение действительно наблюдалось.

Потеря управления движением возможна в интервале $0,48 < y < 0,52$. На фиг. 4 приведены зависимости

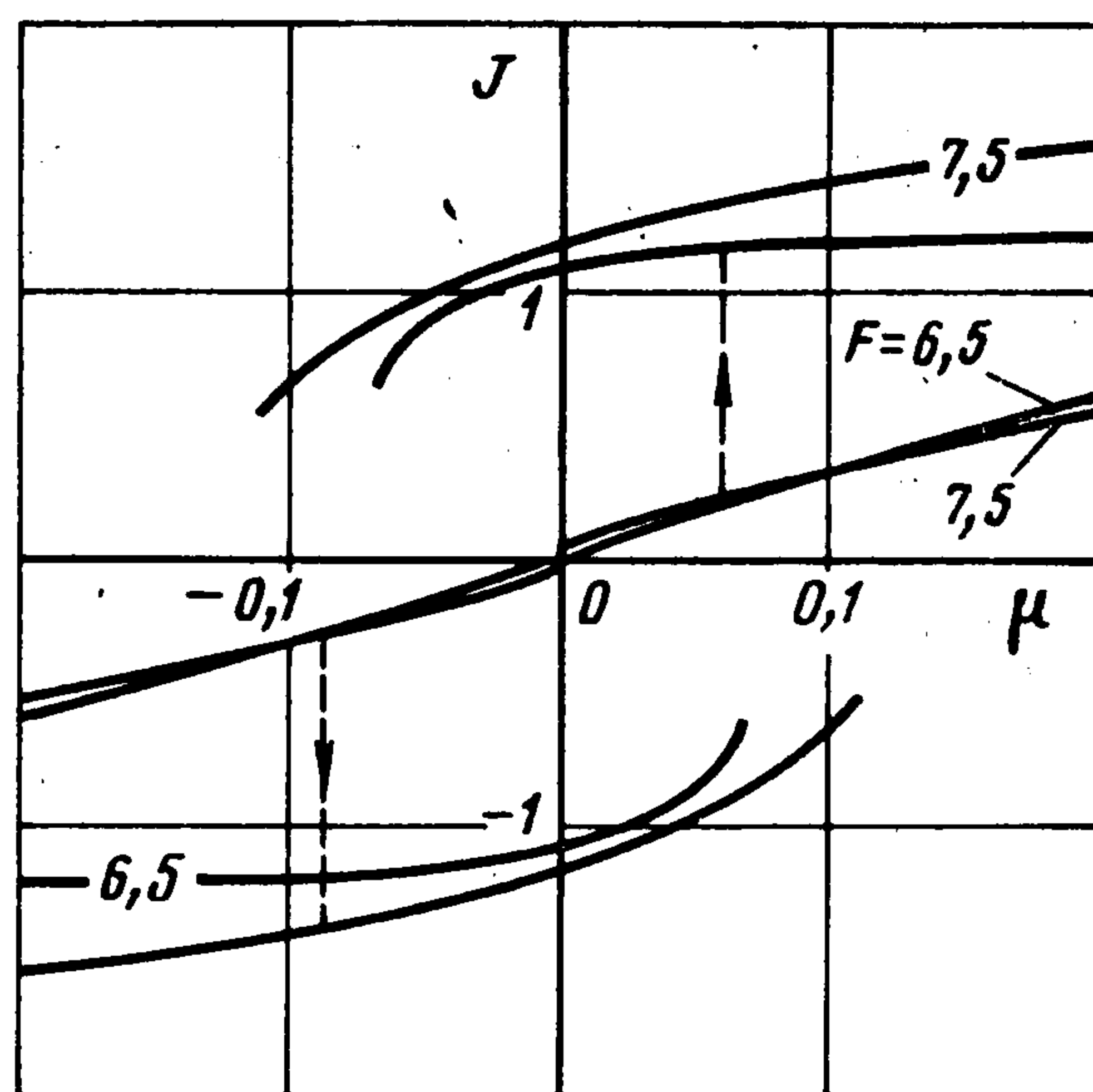
$$J(\mu') = \frac{1}{4\kappa} \int_0^{2T} x(\tau, \mu') d\tau$$

для некоторых значений параметра y , полученные аналитически и моделированием на ЦВМ.

Случай $y = 0,505$ следует выделить в связи с тем, что при $\mu' = 0$ здесь существуют несколько устойчивых несимметричных решений, а симметричное оказывается неустойчивым. Последнее легко обнаруживается, и проблема управления представляется разрешимой за счет выбора интервала изменения $|\mu'| > 0,05$. (Аналогичные случаи встречаются, например, при исследовании управляемости судов.) Однако в интервале $|\mu'| < 0,15$ сохраняется возможность аварийной ситуации в случае перехода системы на неуправляемый режим движения (помечен стрелкой).



Фиг. 4



Фиг. 5

В качестве второго примера рассмотрим систему со степенной нелинейностью, описываемую уравнением Дуффинга

$$x'' + 0,2x' + x + 5x^3 = F \cos \omega t + \mu$$

Для выделения области возможной потери управления движением отыскивались сначала узловые точки рождения несимметричных решений на основной частоте. Воспользуемся полученной в предыдущем примере качественной картиной структуры пространства параметров: на частоте $\omega = 0,8$ несимметричные решения появлялись при сближении ограничителей перемещений осциллятора. В уравнении Дуффинга «сближению ограничителей» будет соответствовать увеличение F .

Интегрирование уравнения при $\omega = 0,8$, $\mu = 0$ методом Рунге — Кутты на ЭВМ позволило выделить интервал возможной потери управления $5,5 < F < 8,0$, в котором существуют несимметричные решения. Симметричное решение устойчиво при $F < 6,7$. С увеличением $F > 6,7$ оно становится неустойчивым и порождает еще пару устойчивых несимметричных решений, в том числе субгармонических, но достаточно близких к симметричным.

Следует подчеркнуть, что с практической точки зрения часто достаточно изучить поведение системы при определенных значениях параметров, не вникая в конкретные типы происходящих при этом движений.

На фиг. 5 приведены зависимости

$$J(\mu) = \int_0^{2T} x(t, \mu) dt$$

Для случая $F = 6,5$ потеря управления возможна в интервале $|\mu| < 0,07$, для случая $F = 7,5$ — в интервале $|\mu| < 0,11$. Аварийной ситуации соответствует непредвиденный переход системы на неуправляемый режим движения (помечен стрелками).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. Одна из главных причин гибели дирижаблей: R.38, R.101 и некоторых других.— Докл. АН СССР, 1931, сер. А, № 4, с. 111—114.
2. Фейгин М. И. К теории триггера.— В кн.: Памяти Александра Александровича Андропова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 300 с.
3. Фейгин М. И. Жесткий режим автоколебаний триггера.— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, т. 7, № 4, с. 780—786.

4. Фейгин М. И. О вынужденных колебаниях двух масс, сочлененных с зазором.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр., 1960, № 5, с. 122—130.
5. Фейгин М. И. О несимметричных периодических режимах в симметричной системе с ударными взаимодействиями.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т. 10, № 3, с. 389—392.
6. Фейгин М. И. О структуре C -бифуркационных границ кусочно-непрерывных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 820—829.
7. Фейгин М. И. О потере управления движением симметричных систем.— В кн.: Анн. докл. V Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 343.
8. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.— М.: Гостехиздат, 1949. 164 с.
9. Sadek M. M., Mills B. On the stability of the impact damper.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 1, p. 253. — Рус. перев.: Прикл. механ., 1967, № 1, с. 143—144.

Горький

Поступила в редакцию
22.1.1982