

УДК 531.36 : 534

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С УДАРНЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ ЭНЕРГИИ

Дружиловская Т. Ю., Неймарк Ю. И.

Рассматривается нелинейный осциллятор Ван-дер-Поля с ударным поглотителем энергии. Находятся все возможные виды фазового портрета системы в зависимости от параметров. Определяются условия возникновения установившихся стохастических движений. Строится разбиение пространства параметров на области, соответствующие качественно различным фазовым портретам системы.

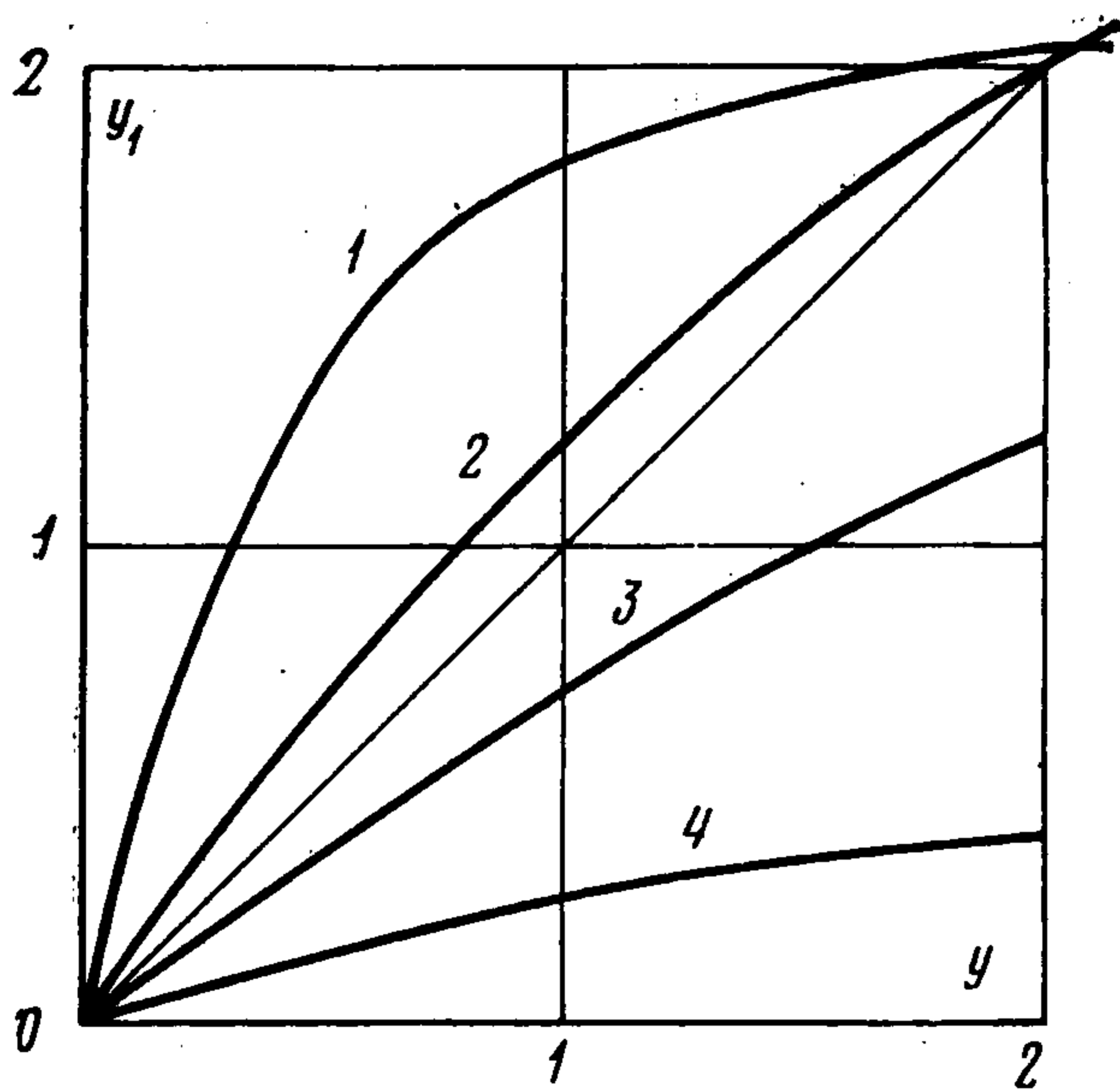
1. Исследуемая система. Нелинейный осциллятор Ван-дер-Поля

$$(1.1) \quad x'' + 2\delta(1 - \alpha x^2)x' + \omega^2 x = 0$$

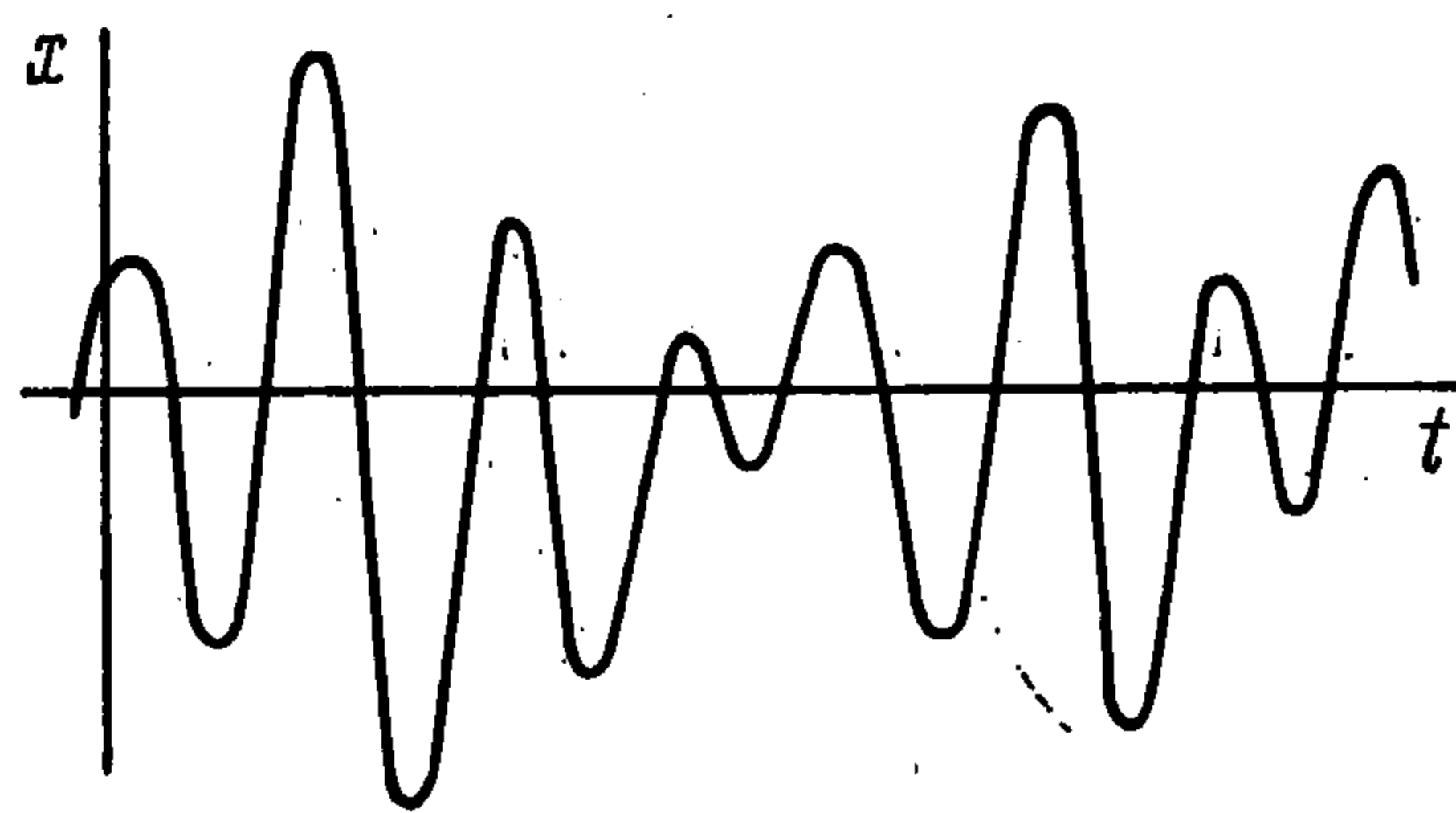
— типичная простейшая автоколебательная система [1, 2]. Возникновение автоколебаний в ней вызвано подкачкой энергии при небольших колебаниях и, наоборот, ее диссипацией при больших. Это простое физическое соображение можно уточнить рассматривая последовательные значения скорости x' при обращении координаты x в нуль, т. е. рассматривая точечное отображение полуоси $x = 0$, $x' > 0$ в себя, порождаемое фазовыми траекториями системы (1.1). Вид графиков этих точечных отображений представлен на фиг. 1. Кривые 1, 2 соответствуют значениям $\delta = -0,2$ и $\delta = -0,05$ при $\alpha = 1$, кривые 3, 4 — значениям $\delta = 0,05$ и $\delta = 0,2$ при $\alpha = -1$. Из этих графиков при $\delta < 0$ и $\alpha > 0$ следует, что при малых x последующее значение x' больше предыдущего, а при больших, наоборот, меньше. Именно благодаря такому характеру зависимости последующего значения x' от предыдущего имеется значение x' , совпадающее со своим последующим и отвечающее устойчивым периодическим автоколебаниям.

Ниже исследуется случай введения в нелинейный осциллятор (1.1) поглощения энергии за счет того, что при $x = 0$ и $x' > a$ происходит удар, в результате которого скорость x' уменьшается на некоторую величину p . Показывается, что при этом появляется возможность не только периодических, но и стохастических автоколебаний (одна из реализаций последних изображена на фиг. 2). При этом в зависимости от начальных условий и параметров могут быть как обычные периодические автоколебания, так и стохастические, либо только периодические, либо только стохастические автоколебания. При изменении параметров возможны смены периодических автоколебаний на стохастические, а также возникновение стохастических автоколебаний в результате потери устойчивости состоянием равновесия.

Таким образом, при указанном дополнительном механизме поглощения энергии нелинейный осциллятор (1.1) оказывается системой, в которой реализуются стохастические автоколебания. Эта система не только простая, но и типичная, поскольку возникновение в ней стохастических автоколебаний вызвано не специфическим видом дополнительного поглотителя энергии, а его наличием [3]. Подчеркнем, что описанный механизм удара следует рассматривать как поглотитель энергии лишь в случае, когда ско-



Фиг. 1



Фиг. 2

рость после удара x_+ меньше доударной x_- , что заведомо имеет место при $p < a$.

Исследование нелинейного осциллятора (1.1) с дополнительным поглотителем энергии для частного случая $\alpha = 0$ было проведено в [4]. Ниже рассматривается общий случай. Находятся все возможные виды точечного отображения секущей $x = 0$, $x^* > a$ в себя и выясняется зависимость их вида от параметров. Исследование опирается как на качественные и аналитические соображения, так и на результаты численного счета на ЭВМ. Предварительно рассматривается нелинейный осциллятор Ван-дер-Поля.

2. Точечное отображение, порождаемое фазовыми траекториями уравнения Ван-дер-Поля. В новых переменных

$$t_1 = t\omega^{-1}, \quad x_1 = |\alpha|^{1/2}x$$

уравнения движения рассматриваемой системы, сохраняя прежние обозначения, запишем в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x'' + 2\delta(1 - \alpha x^2)x' + x &\cong 0 \quad (x \neq 0 \text{ и } x = 0, x^* < a) \\ x_+^* &= x_-^* - p \quad (x = 0, x^* \geq a) \end{aligned}$$

где x_+ и x_- — предельные значения x^* при возрастании и убывании времени вплоть до $x = 0$ и $x^* \geq a$, $\alpha = \pm 1$ в зависимости от знака α в исходном уравнении (1.1). Преобразованная система уравнений содержит три параметра: δ , p , a . При $p = 0$ она переходит в осциллятор Ван-дер-Поля, движения которого зависят от параметра δ и значения $\alpha = \pm 1$. Точечное отображение

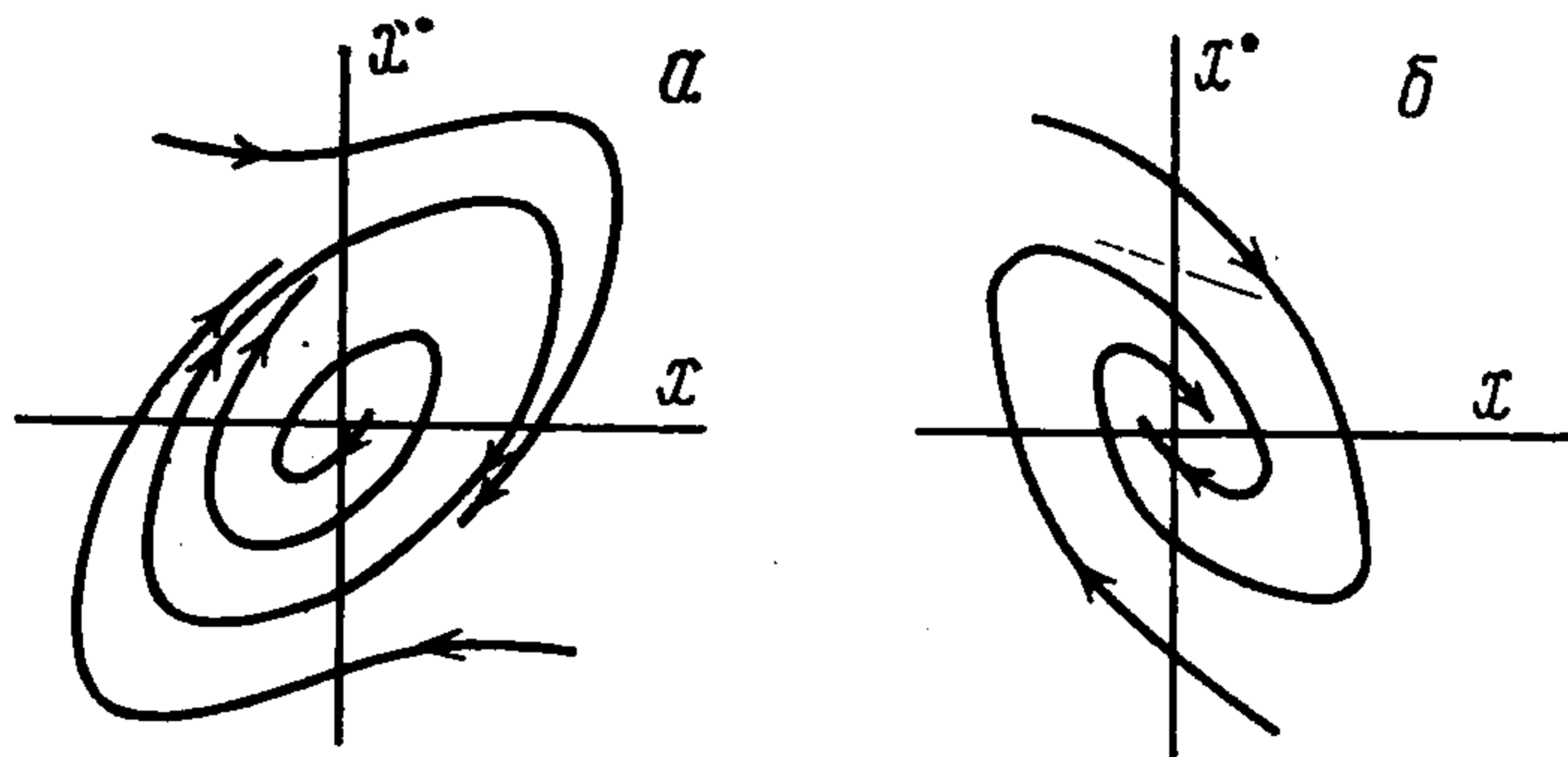
$$(2.2) \quad y_1 = f(y)$$

секущей полупрямой $x = 0$, $y = x^* > a$ находится путем численного счета на ЭВМ. Результаты приведены в виде графиков на фиг. 1 и таблицы. За-

δ	$y = 0,1$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
-0,01	0,11	0,26	1,05	1,54	2,00	2,42	2,80	3,14	3,44
-0,1	0,19	0,06	1,47	1,81	2,01	2,12	2,18	2,22	2,25
-0,3	0,68	0,01	2,00	2,05	2,06	2,07	2,07	2,07	2,08
-0,5	1,79	1,78	2,17	2,17	2,17	2,17	2,17	2,17	2,17
0,01	0,09	2,14	0,93	1,36	1,78	2,16	2,50	2,82	3,10
0,1	0,05	0,47	0,49	0,67	0,81	0,90	0,97	1,02	1,05
0,3	0,01	0,87	0,12	0,16	0,19	0,20	0,21	0,22	0,22
0,5	0,003	0,53	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04

метим, что при замене δ на $-\delta$ отображение (2.2) заменяется на обратное.

При $\alpha = +1$ и $\delta < 0$ графики точечного отображения пересекаются с биссектрисой и соответствуют фазовому портрету фиг. 3, а. При $\alpha = +1$ и $\delta > 0$ графики точечного отображения получаются из соответствующих графиков фиг. 1 переменной осей y и y_1 . На фазовом портрете им соответствует смена устойчивости состояния равновесия и предельного цикла на противоположные по сравнению с фиг. 3, а. В случае $\alpha = -1$ и $\delta > 0$ график точечного отображения целиком лежит ниже биссектрисы и соответствует фазовому портрету фиг. 3, б. Наконец, при $\alpha = -1$ и $\delta < 0$ график точечного отображения лежит выше биссектрисы и соответствует



Фиг. 3

наличию на фазовом портрете единственного неустойчивого состояния равновесия. В таблице приведены значения y_1 , причем в верхней ее части — при $\alpha = 1$ и разных значениях y и $\delta < 0$, в нижней части — при $\alpha = -1$ и разных значениях y и $\delta > 0$.

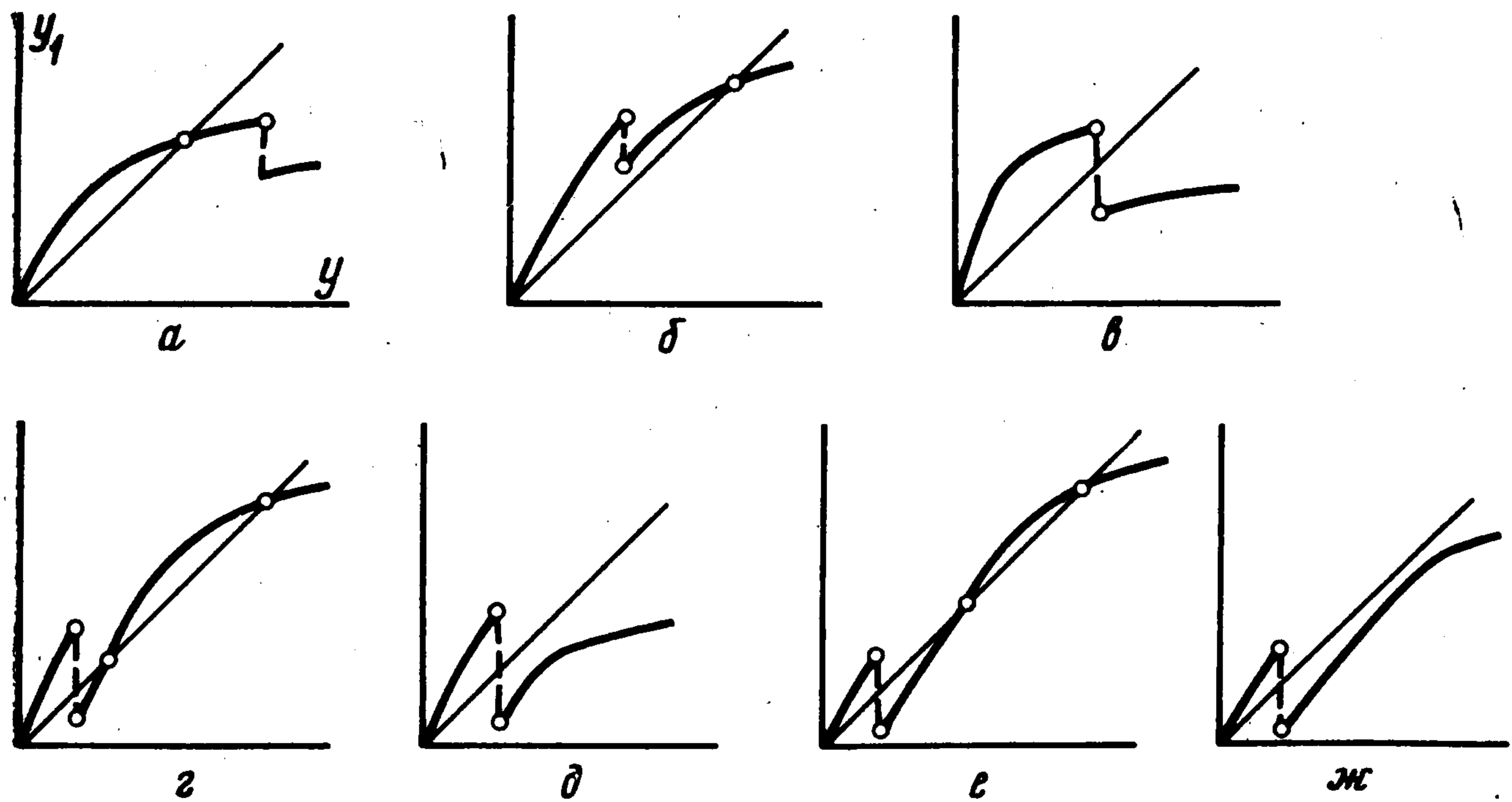
3. Исследование точечного отображения при $p \neq 0$. При $p \neq 0$ точечное отображение отрезка $x = 0, x^* \geq a$ в себя может быть записано в виде

$$(3.1) \quad y_1 = \begin{cases} f(y) & , \quad f(y) < a \\ f(y) - p & , \quad f(y) \geq a \end{cases}$$

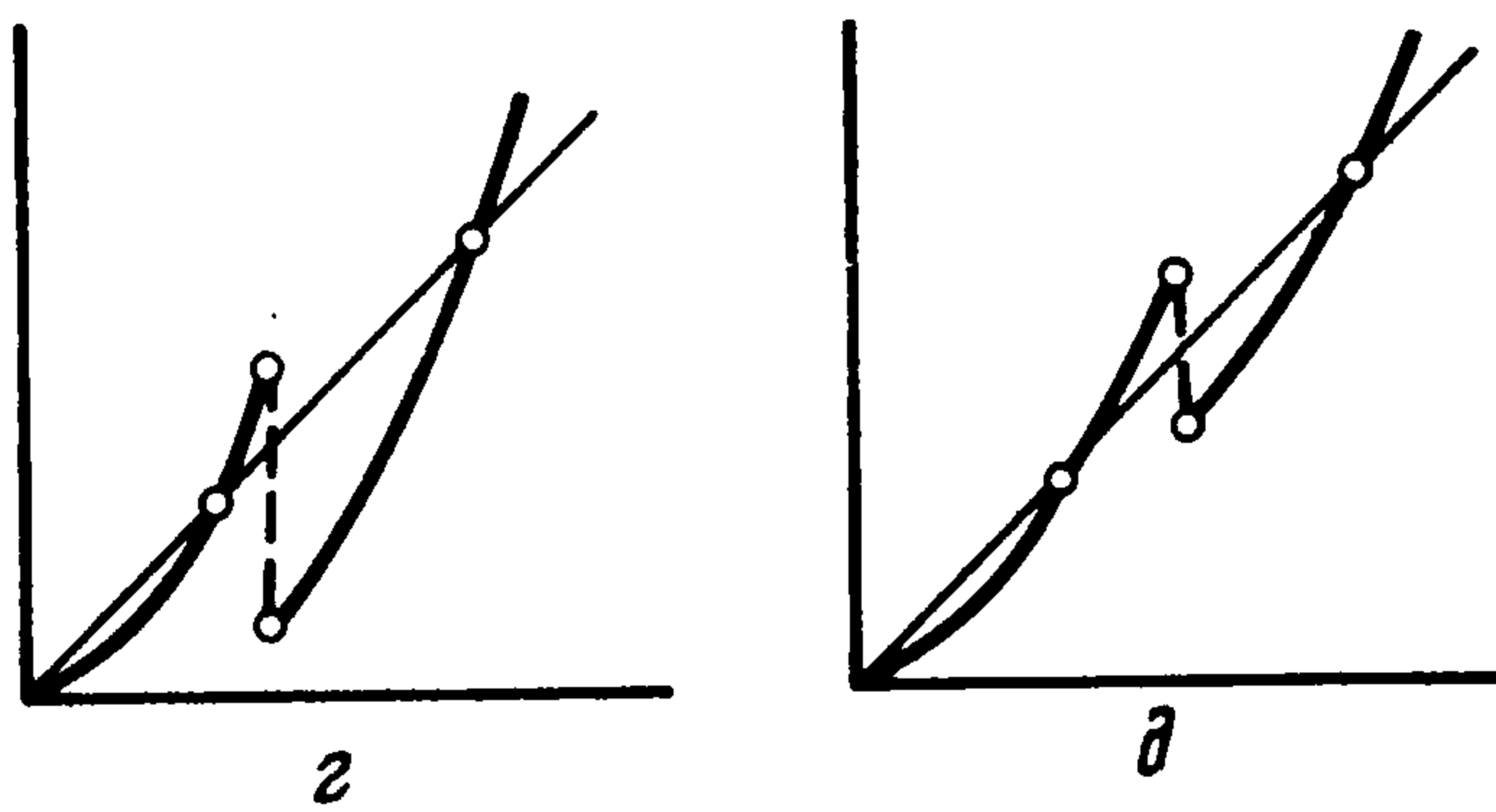
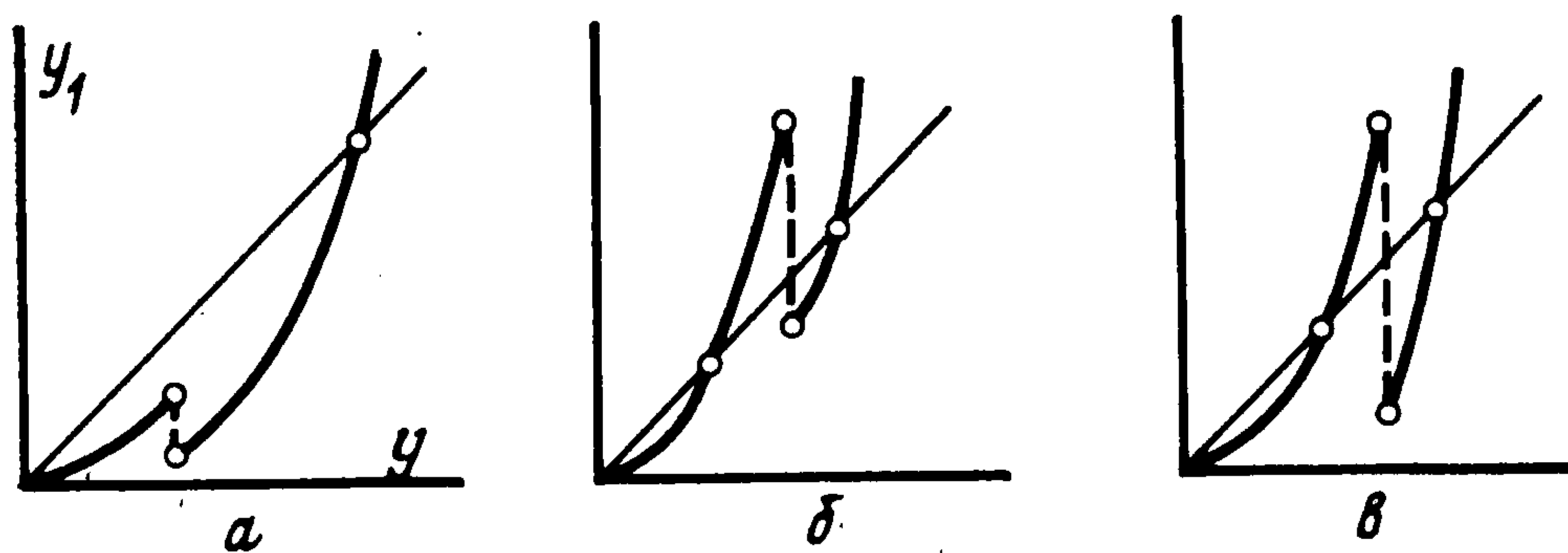
где $f(y)$ — функция, определяющая точечное отображение (2.2), порождаемое фазовыми траекториями осциллятора Ван-дер-Поля при тех же значениях параметров δ и α . Вид этого точечного отображения был выяснен в п. 2. Различные возможные виды графика точечного отображения (3.1) зависят от четырех параметров: $\delta, \alpha = \pm 1, p \geq 0$ и $a > 0$ и представлены на фиг. 4—7. Они последовательно отвечают случаям: 1) $\alpha = 1$ и $\delta < 0$, 2) $\alpha = 1$ и $\delta > 0$, 3) $\alpha = -1$ и $\delta < 0$, 4) $\alpha = -1$ и $\delta > 0$. Кратко опишем каждый из этих случаев.

1. $\alpha = 1, \delta < 0$. Пусть y_* и y_0 — точки, в которых $f(y_*) = y_*$ и $f_y'(y_0) = 1$ ($y_0 < y_*$). При а) $a > y_*$ отображение (3.1) имеет глобально устойчивую неподвижную точку y_* (все точки, за исключением точки $y = 0$, при последовательных преобразованиях к ней асимптотически приближаются) (фиг. 4, а). При б) $a < y_*$ и $p < a - (f_y'(a))^{-1}$ отображение (3.1) также имеет глобально устойчивую точку y_{**} , отличную от точки y_* (фиг. 4, б). При $a < y_*$, и $p > a - (f_y'(a))^{-1}$ возможно несколько разных случаев, представленных на фиг. 4, в — ж. Они отвечают выполнению неравенств:

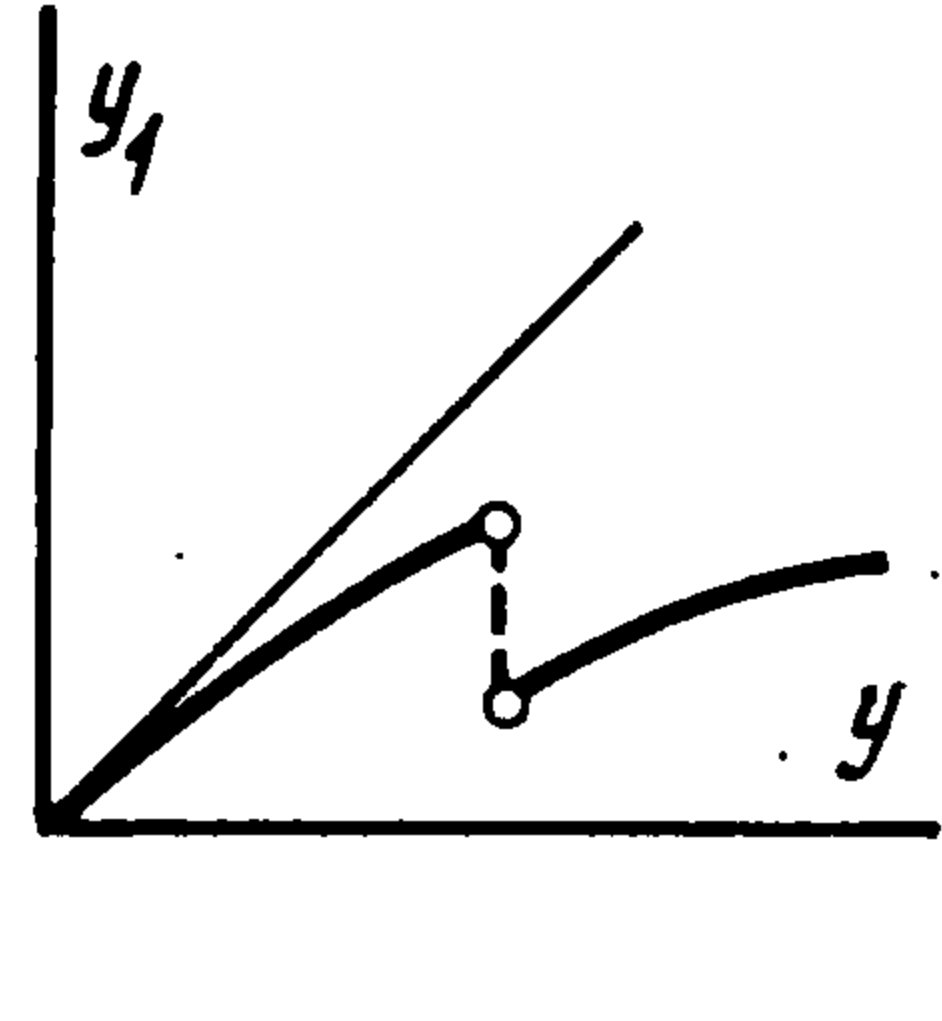
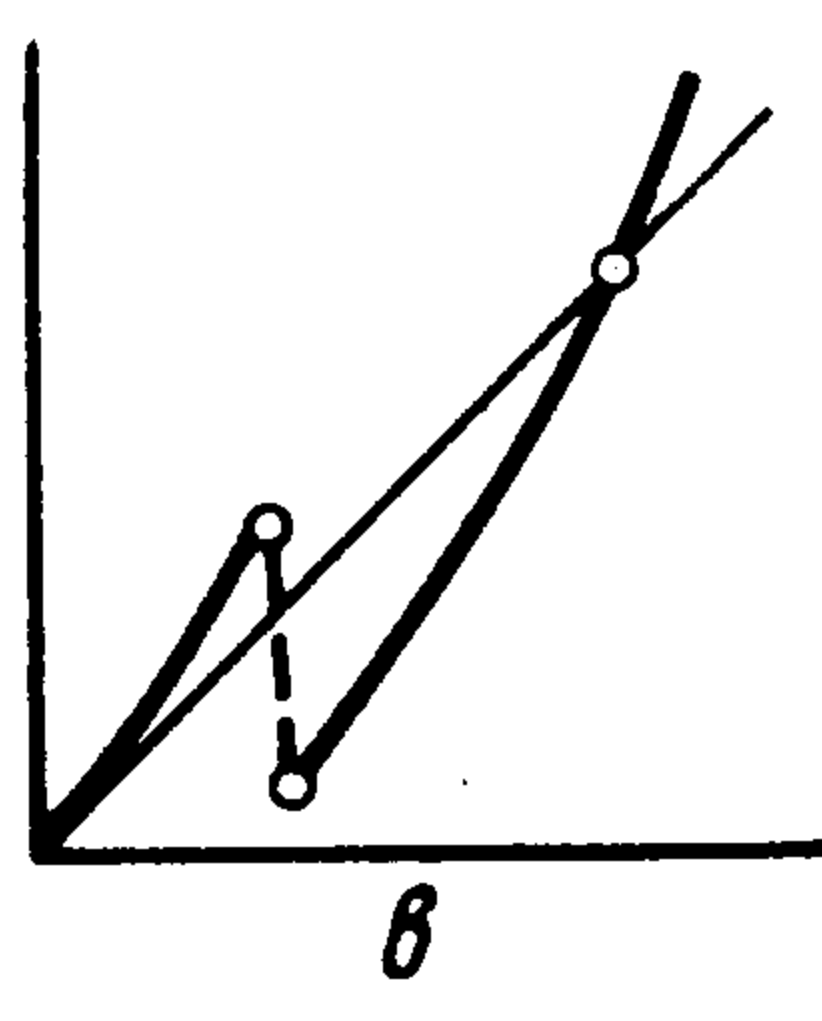
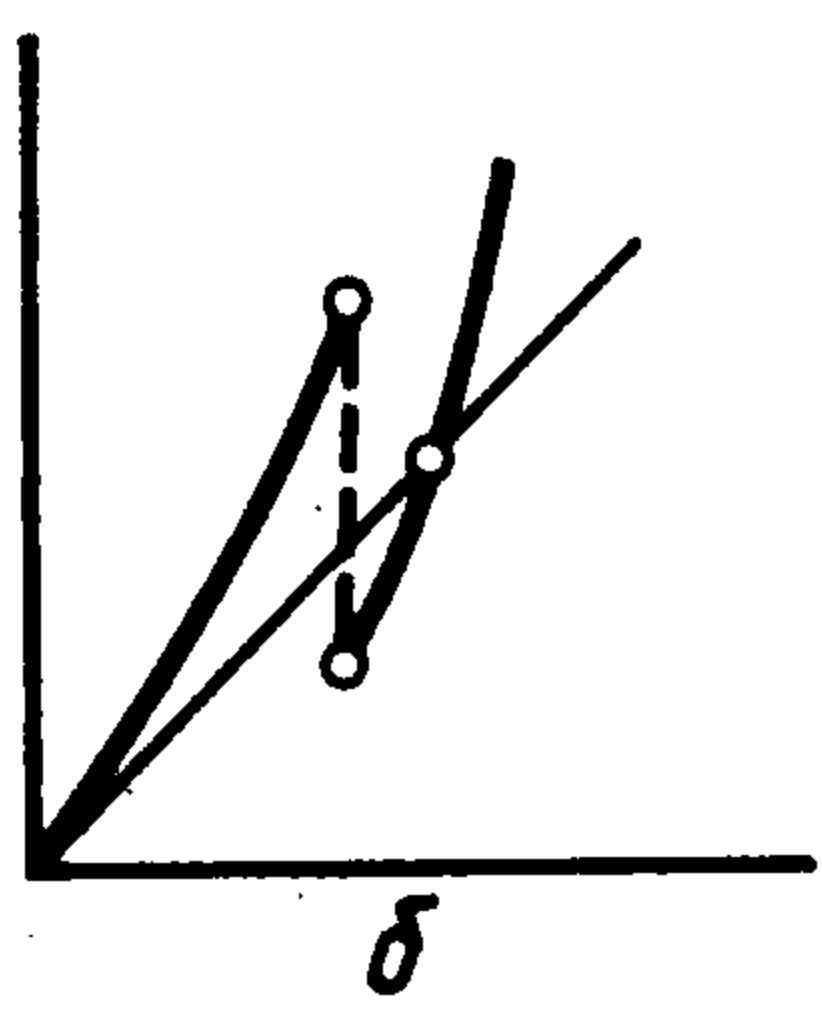
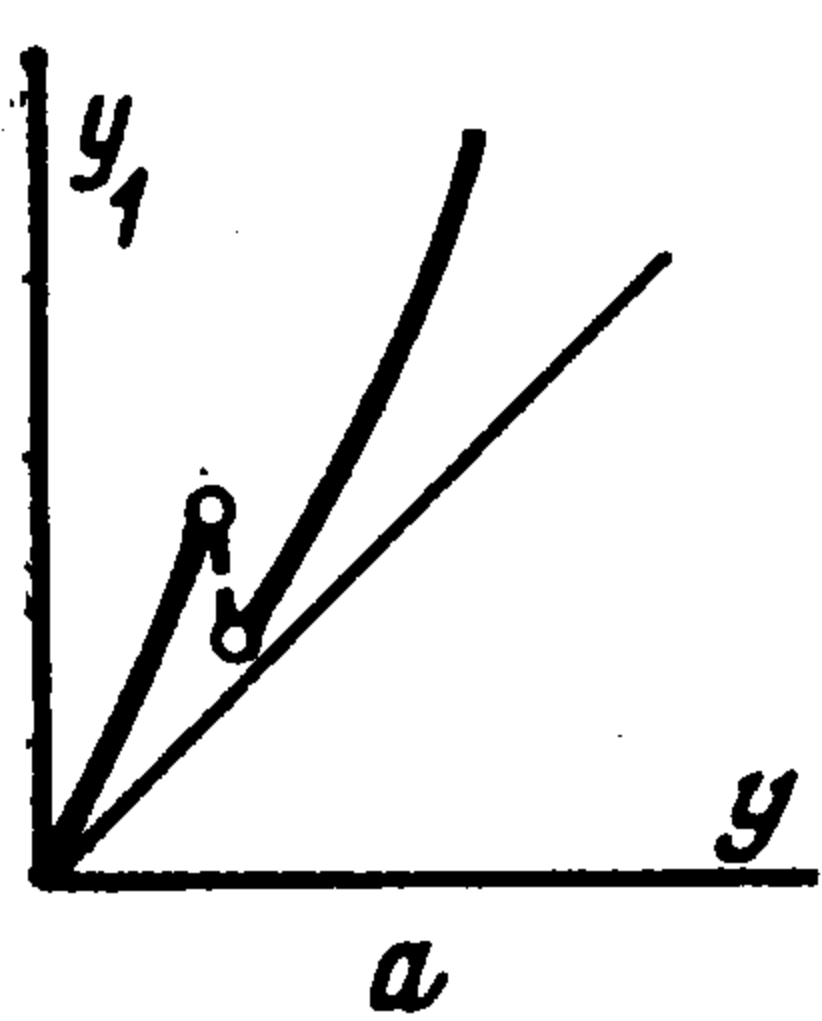
- в) $f(y_0) < a < y_0, a - (f_y'(a))^{-1} < p < a;$
- г) $y_0 < a < f(y_0), a - (f_y'(a))^{-1} < p < f(y_0) - y_0;$
- д) $y_0 < a < f(y_0), f(y_0) - y_0 < p < a;$
- е) $0 < a < y_0, a - (f_y'(a))^{-1} < p < f(y_0) - y_0;$
- ж) $0 < a < y_0, f(y_0) - y_0 < p < a;$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 7

В случае *е* имеется устойчивая неподвижная точка y_{**} и отрезок $J = (a - p, a)$ стохастических движений; в случае *ж* — только отрезок стохастических движений J . Таким образом, в случае *ж* имеет место глобально устойчивое стохастическое автоколебание, а в случае *е* наряду с устойчивым стохастическим автоколебанием имеет место и обычное периодическое устойчивое автоколебание.

Поясним, что собой представляют стохастические автоколебания. Как видно из диаграмм фиг. 4, *е* и *ж*, все точки отрезка $(0, y_{**})$ в случае *е* или всей полуоси $(0, \infty)$ в случае *ж*, после того или иного числа преобразований приходят на отрезок $J = (a - p, a)$ и на нем остаются. На всем этом отрезке производная $dy_1/dy > 1$, поэто-

му никаких устойчивых периодических движений на отрезке J быть не может. Как известно [5], в этом случае на отрезке J имеют место неустойчивые по Ляпунову стохастические движения — стохастические автоколебания. Они экспоненциально неустойчивы и всюду плотно пересекают отрезок J (за исключением отдельных движений общей меры нуль, среди которых есть различные неустойчивые периодические движения).

2. $\alpha = 1, \delta > 0$. Этот случай допускает пять различных видов точечного отображения. Они представлены на фиг. 5, $a—d$ и отвечают следующим областям значений параметров:

- а) $a < y_*, 0 < p < a$;
- б) $a < y_*, p < \min (f(a) - a, a - y_*)$;
- в) $a > y_*, a - y_* < p < f(a) - a$;
- г) $a > y_*, p > \max (f(a) - a, a - y_*)$;
- д) $a > y_*, f(a) - a < p < a - y_*$

Как видно из приведенных графиков, во всех случаях имеется устойчивое состояние равновесия с ограниченной областью притяжения и в некоторых случаях возможны стохастические автоколебания также с ограниченной областью притяжения.

3. $\alpha = -1, \delta < 0$. Возможные виды точечного отображения представлены на фиг. 6, $a—e$. Они отвечают значениям параметров, удовлетворяющим условиям:

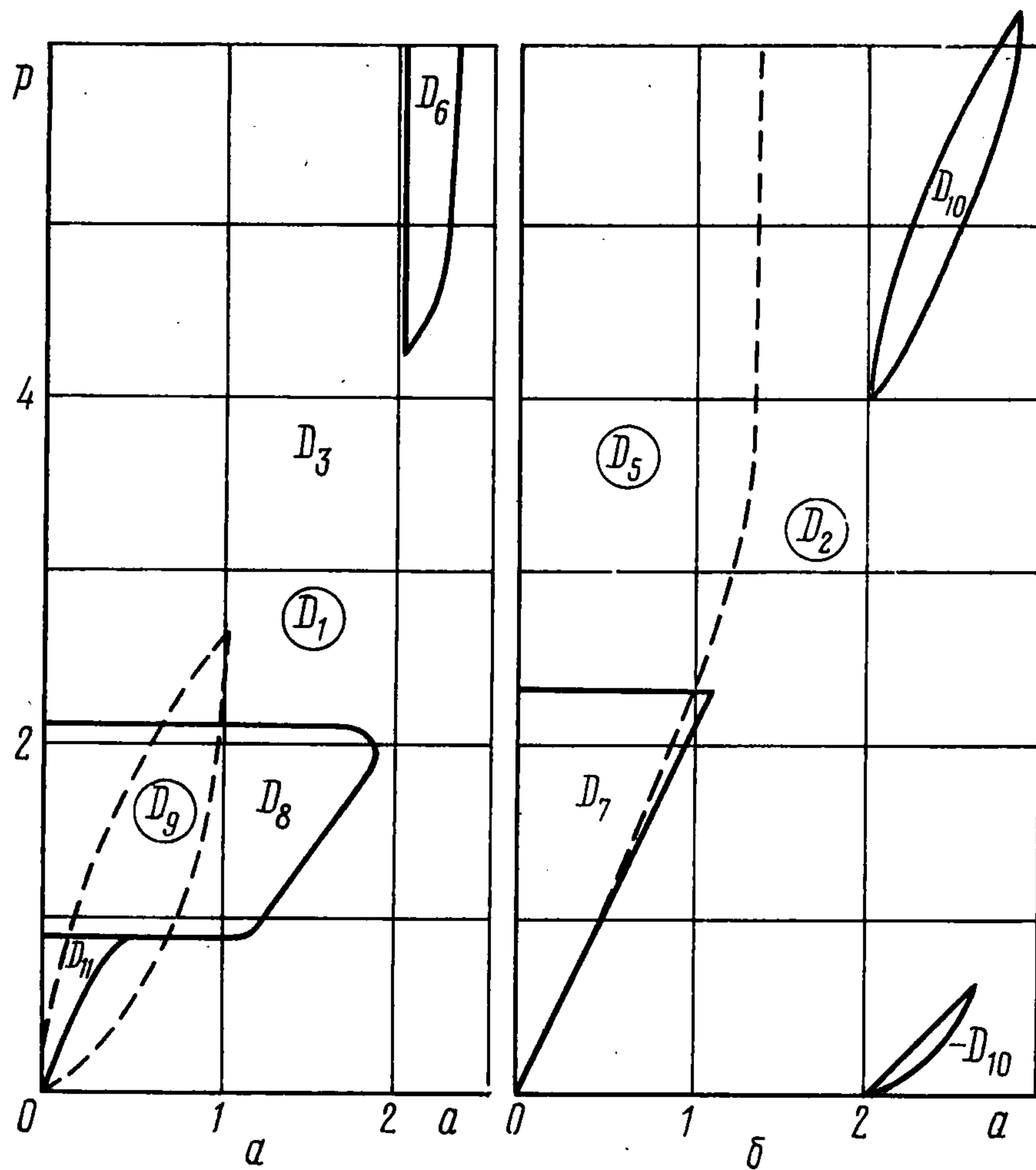
- а) $0 < p < a - (f_y'(a))^{-1}$;
- б) $a - (f_y'(a))^{-1} < p < f(a) - a$;
- в) $f(a) - a < p < a$

Отметим случай e , отвечающий наличию стохастических автоколебаний с областью притяжения $(0, y_*)$, где y_* (как и точка $y = 0$) — неустойчивая неподвижная точка.

4. $\alpha = -1, \delta > 0$. В этом случае вне зависимости от a и $p < a$ имеет место один и тот же вид точечного отображения, изображенный на фиг. 7. Он соответствует глобально устойчивому состоянию равновесия.

4. Возможные виды движений и соответствующие им области значений параметров. Выше были описаны все возможные виды преобразования прямой в себя, порождаемые фазовыми траекториями нелинейного осциллятора Ван-дер-Поля с ударами, передающими встречный импульс $p < a$ в момент прохождения осциллятором состояния равновесия со скоростью, большей a . При этом выяснилось, что возможно довольно много разных случаев, соответствующих различным числам и различным видам установившихся движений: устойчивых равновесий, периодических и стохастических автоколебаний.

Для полного исследования рассматриваемой математической модели далее на величину импульса p не накладывается ограничение $p < a$. Это означает, что вследствие удара энергия осциллятора может не только убывать, но и возрастать. Такое расширение возможных значений величин импульса p приводит к тому, что к восьми возможным согласно фиг. 4—7 видам фазового портрета добавляются еще три. Каждый из фазовых портретов характеризуется своими установившимися движениями, непосредственно видными из графиков фиг. 4—7, за исключением случаев, когда есть области, «подозрительные» на стохастические движения, но в них не выполняется достаточное условие стохастичности $dy_1/dy > 1$. Это относится к случаю, изображенному на фиг. 4, d . Здесь вообще возможны как стохастические автоколебания, так и устойчивые периодические многообо-



Фиг. 8

ротные движения, т. е. движения, за период которых фазовая точка обегает состояние равновесия несколько раз. Выяснение этого вопроса требует значительных численных расчетов и ввиду возможной тонкой структуры разбиения пространства параметров оно далеко не всегда может быть исчерпывающим. Для остальных случаев выяснение вида фазового портрета и его зависимости от параметров значительно проще, хотя также опирается на численно найденную функцию $f(y)$.

На фиг. 8 приведены разбиения плоскостей параметров a, p на области различных фазовых портретов: для $\alpha = -1$ и $\delta = -0,1$ (а); $\alpha = -1$ и $\delta = 0,1$ (б) — штриховыми линиями, причем области обозначены кружками: для $\alpha = 1$ и $\delta = -0,2$ (а); $\alpha = 1$ и $\delta = 0,03$ (б) — сплошными линиями.

Указанные на этих плоскостях параметров a, p области D_1, D_2, \dots, D_{11} соответствуют различным фазовым портретам. Для простоты их описания пусть O^+ и O^- — устойчивое и неустойчивое состояния равновесия, ∞^+ и ∞^- — устойчивость и неустойчивость бесконечности, Γ^+ и Γ^- — устойчивое и неустойчивое периодические движения, I — стохастическое автоколебание. Тогда каждая из областей D_i может быть охарактеризована соответствующим набором перечисленных обозначений, а именно:

$$\begin{aligned}
 &D_1 (O^-, \infty^+), D_2 (O^+, \infty^-), D_3 (O^-, \Gamma^+, \infty^-) \\
 &D_4 (O^+, \Gamma^-, \infty^+), D_5 (O^+, \Gamma^-, \Gamma^+, \infty^-), D_6 (O^-, \Gamma_1^+, \Gamma^-, \Gamma_2^+, \infty^-) \\
 &D_7 (O^+, \Gamma_1^-, \Gamma_2^+, \infty^+), D_8 (O^-, I, \infty^-), D_9 (O^-, I, \Gamma^-, \infty^+) \\
 &D_{10} (O^+, \Gamma_1^-, I, \Gamma_2^-, \infty^+), D_{11} (O^-, I, \Gamma^-, \Gamma^+, \infty^-)
 \end{aligned}$$

Так, область D_1 соответствует случаю неограниченно нарастающих колебаний, D_2 — глобальной устойчивости состояния равновесия, D_8 — глобально устойчивым стохастическим движениям, D_3 — глобально устойчивым периодическим автоколебаниям, D_{11} — возможности в зависимости от начальных условий как периодических, так и стохастических авто-

колебаний и т. д. При переходе через границы областей D_i происходят смены установившихся движений и изменения фазовых портретов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
3. *Неймарк Ю. И.* Физические механизмы самогенерации стохастических колебаний.— В кн.: Динамика систем. Устойчивость динамических систем и процессов управления. Изд-е Горьк. ун-та, 1979, с. 115—131.
4. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. *Бутенин Ю. В., Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

Горький

Поступила в редакцию
23.XII.81