Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Воротников В. И.

На основе метода векторной функции Ляпунова приводятся условия устойчивости и неустойчивости движения относительно части переменных системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с непрерывными правыми частями. Обсуждается методика решения задачи стабилизации движения относительно части переменных, позволяющая учесть заранее заданные требования к качеству переходных процессов в системе и частично решить проблему наименьшей затраты ресурсов, а также методика решения задачи минимизации функционала и игровой задачи на минимакс — максимин функционала с целью удовлетворения заданных требований к качеству переходных процессов по отношению к части переменных в исходной системе. Рассмотрены механические примеры.

1. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$(1.1)\qquad x^{\cdot} = X(t, x)\ (X(t, 0) \equiv 0)$$
$$x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (y, z),\ m > 0,\ n = m + p,\ p > 0$$

Будем заниматься вопросом об устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ по отношению к $y_1, \ldots, y_m$ (y-устойчивости) [1, 2]. Предположим, что [2] правые части системы (1.1) в области

$$(1.2)\qquad t \geqslant 0,\ \|y\| \leqslant H > 0,\quad 0 \leqslant \|z\| < +\infty$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения: решения системы (1.1) z-продолжимы, т. е. любое решение $x(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, для которых $\|y(t)\| \leqslant H$.

Обозначим через $x = x(t; t_0, x_0)$ решение системы (1.1), определенное начальными условиями $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$.

2. В ряде случаев для исследования y-устойчивости движения можно путем линейных или нелинейных преобразований исходной системы уравнений перейти к некоторой вспомогательной системе, устойчивость по Ляпунову которой достаточна (иногда и необходима) для y-устойчивости исходной системы [3, 4] [1]. Ниже обсуждается вопрос о подобных преобразованиях исходной системы уравнений с использованием дифференциальных неравенств. Для решения задачи об y-устойчивости движения это потребует двухсторонних оценок переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)$ исходной системы. Такие оценки позволяют сконструировать векторную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям В. М. Матросова [5].

Теорема 2.1. Пусть в области (1.2) существует две векторные функции $V = (V_1, \ldots, V_k)$, $W = (W_1, \ldots, W_r)$, в которых $V_i = W_i = y_i$ ($i = 1, \ldots, m$), $V_j = V_j(t, x)$, $W_s = W_s(t, x)$ ($j = m + 1, \ldots, k$; $s = m + 1, \ldots, r$) и для которых выполняются условия:

[1] Такие преобразования исходной системы рассматривались в работе: *Воротников В. И.* Один метод исследования устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1979. 156 с.

1°. $V_j(t, 0) \equiv 0$, $W_s(t, 0) \equiv 0$, $j = m+1, \ldots, k$; $s = m+1, \ldots, r$.

2°. Производные $V^{\cdot}$, $W^{\cdot}$ в силу системы (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$V_\mu^{\cdot} \leqslant \varphi_\mu(t, V_1, \ldots, V_k), \quad \mu = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

$$W_\vartheta^{\cdot} \geqslant f_\vartheta(t, W_1, \ldots, W_r), \ \vartheta = 1, \ldots, r \tag{2.2}$$

Здесь векторные функции $\varphi(t, V) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ и $f(t, W) = (f_1, \ldots, f_r)$, $\varphi(t, 0) \equiv 0$, $f(t, 0) \equiv 0$ определены и непрерывны в области $t \geqslant 0$, $\| V^* \| < R$, где $R = \infty$ или

$$R > \sup [\| V^*(t, x) \|: \ t \geqslant 0, \ \| y \| \leqslant H], \quad V^* = (V, W)$$

3°. Каждая из функций φ_μ (f_ϑ) не убывает по V_i, $i \neq \mu$ $(W_j, j \neq \vartheta)$ [5].

4°. Пусть $\alpha = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $\beta = (u_1, \ldots, u_m)$. Решение $\omega = 0$ $(u = 0)$ системы $\omega^{\cdot} = \varphi(t, \omega)$ $(u^{\cdot} = f(t, u))$ α (β)-устойчиво.

Доказательство. Условие (2.2) эквивалентно условию

$$-W_\vartheta \leqslant f_\vartheta^*(t, -W_1, \ldots, -W_r), \ \vartheta = 1, \ldots, r.$$

причем функции f_ϑ^* не убывают по $-W_j$ $(j \neq \vartheta)$. Построим векторную функцию $\bar{V} = (V_1, \ldots, V_k, -W_1, \ldots, -W_r)$ и положим $\bar{V}^* = \max(V_s, W_s) = \max |y_s|$, $s = 1, \ldots, m$. Так как функция $\bar{V}^*$ y-определенно положительна, то выполняются условия теоремы В. М. Матросова [5] при $l = 2m$, $M = \{y = 0\}$, $M_0 = \{x = 0\}$. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии 4° решения $\omega = 0$ $(u = 0)$ соответствующих систем асимптотически α (β)-устойчивы, то движение $x = 0$ системы (1.1) асимптотически y-устойчиво.

Утверждение 1. В случае $m = 1$, $k = r$ и $\varphi(t, V) \equiv f(t, W)$ при $V = W$ векторная функция V может быть построена в области $0 \leqslant y_1 \leqslant H$, $0 \leqslant \| z \| < +\infty$, а векторная функция W — в области $-H \leqslant y_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant \| z \| < +\infty$.

Доказательство. В силу условий 1°, 3°, 4° теоремы 2.1 найдется число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что из $\| x_0 \| < \delta$ $(y_{10} \geqslant 0)$ следует [6]

$$y_1(t; t_0, x_0) \leqslant \alpha_1^+(t; t_0, \xi_0) < \varepsilon, \quad \xi_0 = V(t_0; t_0, x_0), \ \xi_{10} \geqslant 0$$

если $y_1(t; t_0, x_0) \geqslant 0$, а из $\| x_0 \| < \delta$ $(y_{10} \leqslant 0)$ следует

$$y_1(t; t_0, x_0) \geqslant \alpha_1^-(t; t_0, \xi_0) > -\varepsilon, \ \xi_0 = W(t_0; t_0, x_0), \ \xi_{10} \leqslant 0$$

если $y_1(t; t_0, x_0) \leqslant 0$. Здесь α_1^+ и α_1^- — первые компоненты соответственно верхнего $\alpha^+(t; t_0, \xi_0)$, $\alpha^+(t_0; t_0, \xi_0) = \xi_0$ и нижнего $\alpha^-(t; t_0, \xi_0)$, $\alpha^-(t_0; t_0, \xi_0) = \xi_0$ решений системы

$$\xi^{\cdot} = \varphi(t, \xi) = f(t, \xi). \tag{2.3}$$

Пусть $t = t^*$ — первый момент времени, при котором $y_1(t^*, t_0, x_0) < 0$, $y_{10} \geqslant 0$. В силу условий 1°, 3°, 4°

$$y_1(t; t^*, x(t^*)) \geqslant \alpha_1^-(t; t^*, \xi^*), \ \xi^* = W(t^*; t^*, x(t^*))$$

при всех $t \geqslant t^*$, при которых $y_1(t; t_0, x_0) < 0$. Но решение $\alpha_1^-(t; t^*, \xi^*)$ системы (2.3) можно рассматривать как продолжение решения $\alpha_1^-(t; t_0, \xi_0)$, $\| \xi_0 \| > \delta$, $\xi_{10} \geqslant 0$ этой же системы, определенного при $t \in [t_0, t^*]$, на промежутке времени $t \geqslant t^*$, при котором $y_1(t; t_0, x_0) < 0$. Следовательно, при всех $t \geqslant t_0$ имеем $\| y(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$, если $\| x_0 \| < \delta$, $y_{10} \geqslant 0$. Случай $\| x_0 \| < \delta$, $y_{10} \leqslant 0$ рассматривается аналогично. Утверждение доказано.

Замечание. Пусть система (1.1) имеет вид

$$y^{\cdot} = Ay + Y(y, z), \quad z^{\cdot} = Cy + Dz + Z(y, z),$$

где A, B, C — постоянные матрицы, Y, Z — нелинейные возмущения. Допустим, что в области (1.2) $Y(y, z) \geqslant 0$, $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j)$. В этом случае векторная функция Ляпунова может быть построена в виде $\bar{V} = (y, -W)$, а для построения векторной функции W применены процедуры сведения к системе μ-вида [3, 4] с использованием дифференциальных неравенств.

3. Получим условия y-неустойчивости движения $x = 0$ системы (1.1). Предварительно введем следующее

Определение. Движение $x = 0$ системы (1.1) называется y-неустойчивым сверху (снизу), если найдутся числа $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, такие, что для любого сколь угодно малого $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ система (1.1) имеет решения $x(t; t_0, x_0)$ с начальными условиями $\|x_0\| < \delta$, удовлетворяющие с течением времени неравенству $y_i(t; t_0, x_0) > \varepsilon$ $(y_i(t; t_0, x_0) < -\varepsilon)$ хотя бы при одном $i = 1, \ldots, m$.

Введем в рассмотрение две скалярные непрерывные функции $U_1(t, x)$ и $U_2(t, x)$. Множество точек (t, x) из области

$$t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y_l \leqslant H, \quad 0 \leqslant \|x^*\| < +\infty, \tag{3.1}$$
$$x^* = (x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

для которых хотя бы при одном $l = 1, \ldots, m$ выполняется неравенство $U_1(t, x) > 0$, называется областью $U_1(l) > 0$.

Теорема 3.1. Пусть для системы (3.1) можно найти функцию $U_1(t, x)$, удовлетворяющую условиям:

1) при любом $t \geqslant 0$ и сколь угодно малых $\|x\|$ существует область $U_1(l) > 0$;

2) функция $U_1(t, x)$ ограничена в области $U_1(l) > 0$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всякой точки (t, x) из области (3.1), удовлетворяющей условию $U_1(t, x) \geqslant \varepsilon$, будет $U_2(t, x) \geqslant \delta$, где $U_2 = U_1^{\cdot}$ — производная в силу системы (1.1);

4) поверхность $U_1(l) = 0$ не содержит точек (t, x), для которых $y_l < 0$.

Тогда движение $x = 0$ системы (1.1) y-неустойчиво сверху.

Замечания. 1°. Условия 1) — 3) теоремы 3.1 совпадают с условиями теоремы Н. Г. Четаева [7] о неустойчивости (в том числе и с замечаниями В. В. Румянцева [8]); отличие лишь в том, что в [7] рассматривалась область $t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant H$, в [8] — область (1.2), а в теореме 3.1 — область (3.1). Условие 4) является новым в сравнении с [7, 8]. Условия 1) — 3) обеспечивают выход соответствующих решений системы (1.1) из области (3.1) за конечное время [7]. Ввиду z-продолжимости решений системы (1.1) и условия 4) эти решения выходят на поверхность $y_l = H$.

2°. Если движение $x = 0$ линейной стационарной системы y-неустойчиво, то это движение y-неустойчиво сверху (снизу).

3°. Если вместо области (3.1) рассматривать область

$$t \geqslant 0, \ -H \leqslant y_l \leqslant 0, \ 0 \leqslant \|x^*\| < +\infty$$

то, при условиях 1) — 3) движение $x = 0$ системы (1.1) y-неустойчиво снизу, если поверхность $U_1(l) = 0$ не содержит точек (t, x), для которых $y_l > 0$.

Теорема 3.2. Пусть хотя бы при одном l $(1 \leqslant l \leqslant m)$ в области (1.2) существует одна из двух векторных функций $V = (V_1, \ldots, V_k)$, $W = (W_1, \ldots, W_r)$, в которых $V_1 = W_1 = y_l$, $V_j = V_j(t, x)$, $W_s = W_s(t, x)$ и для которых выполняются условия

1°. $V_j(t, 0) \equiv 0$, $W_s(t, 0) \equiv 0$, $j \neq 1$, $s \neq 1$.

2°. Производная $V^{\cdot}$ $(W^{\cdot})$ в силу системы (1.1) в области $t \geqslant 0$, $-H \leqslant y_l \leqslant V_1 \leqslant 0$ $(0 \leqslant y_l = W_1 \leqslant H)$, $0 \leqslant \|x^*\| < +\infty$ удовлетворяет неравенству (2.1) (неравенству (2.2)), где векторная функция $\varphi(t, V)$ $(f(t, W))$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \ \|V\| < R, \ R = \infty \ \text{ или } \ R > \sup [\|V(t, x)\|: \ t > 0, \ -H \leqslant y_l \leqslant 0$$

$$(t \geqslant 0, \ \|W\| < \bar{R}, \ \bar{R} = \infty \ \text{или} \ \bar{R} > \sup [\|W(t, x)\|: \ t \geqslant 0, \ 0 \leqslant y_l \leqslant H)$$

3°. Выполняются условия 2°, 3° теоремы 2.1.

4°. Решение $\omega = 0$ $(u = 0)$ системы $\omega^{\cdot} = \varphi(t, \omega)$ $(u^{\cdot} = f(t, u))$, α_1 (β_1)-неустойчиво снизу (сверху).

Тогда движение $x = 0$ системы (1.1) y-неустойчиво.

Доказательство. В силу α_1-неустойчивости снизу решения $\omega = 0$ системы $\omega^{\cdot} = \varphi(t, \omega)$ для любого $\delta > 0$ существуют решения $\omega(t; t_0, \omega_0) = \omega(t; t_0, V(t_0; t_0, x_0))$ с начальными условиями $\|x_0\| < \delta$ $(y_{l_0} \leqslant 0)$, удовлетворяющие с течением времени неравенству $\omega_1(t; t_0, \omega_0) < -\varepsilon$. Ввиду условия 3°, согласно [6], $y_l(t; t_0, x_0) < \omega_1^+(t; t_0, \omega_0)$, $\omega^+(t_0; t_0, \omega_0) = \omega_0$, $\omega_0 = V(t_0; t_0, x_0)$. Поэтому с течением времени $y_l(t; t_0, x_0) < < -\varepsilon$. Теорема доказана.

4. *Пример* 1. Рассмотрим вызванное начальными возмущениями движение твердого тела, которое происходит под действием диссипативных и ускоряющих сил. Уравнения возмущенного движения в этом случае имеют вид

$$y_1^{\cdot} = \gamma_1 y_1 + \frac{B-C}{A}, \quad z_1^{\cdot} = \gamma_2 z_1 + \frac{C-A}{B} y_1 z_2, \quad z_2^{\cdot} = \gamma_3 z_2 + \frac{A-B}{C} y_1 z_1 \tag{4.1}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — постоянные числа, причем $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 + \gamma_3 < 0$.

Введем две векторные функции $V = (V_1, V_2)$, $W = (W_1, W_2)$, в которых $V_1 = W_1 = y_1$, $V_2 = W_2 = z_1 z_2$. При условии $C < A < B$ имеют место оценки:

1) $V_1^{\cdot} = \gamma_1 V_1 + \dfrac{B-C}{A} V_2$

$$V_2^{\cdot} = (\gamma_2 + \gamma_3) V_2 + y_1 \left[\frac{C-A}{B} z_2^2 + \frac{A-B}{C} z_1^2\right] \leqslant (\gamma_2 + \gamma_3) V_2$$

в области $0 \leqslant y \leqslant H$, $0 \leqslant \|z\| < +\infty$;

2) $W_1^{\cdot} = \gamma_1 W_1 + \dfrac{B-C}{A} W_2, \quad W_2^{\cdot} \geqslant (\gamma_2 + \gamma_3) W_2$

в области $-H \leqslant y_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant \|z\| < +\infty$.

Поскольку движение $\xi = 0$ системы

$$\xi_1^{\cdot} = \gamma_1 \xi_1 + \frac{B-C}{A} \xi_2, \quad \xi_2^{\cdot} = (\gamma_2 + \gamma_3) \gamma_2$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову, то, согласно утверждению 1, движение $x = 0$ системы (4.1) асимптотически y_1-устойчиво.

Пример 2. Рассмотрим движение маятника, состоящего из материальной точки, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольному заданному закону $l = l(t)$, $l(t) \geqslant l_0 \geqslant 0$. Обозначим через θ угол, образуемый нитью маятника с вертикалью. В данном случае уравнение Лагранжа в переменных $\theta = y_1$, $\theta^{\cdot} = z_1$ имеет вид

$$y_1^{\cdot} = z_1, \quad z_1^{\cdot} = -\frac{g}{l(t)} \sin y_1 - 2\frac{l^{\cdot}(t)}{l(t)} z_1 \tag{4.2}$$

Проведем двухстороннюю оценку переменных системы (4.2). Выполняются следующие неравенства:

1) $y_1^{\cdot} = z_1, \quad z_1^{\cdot} \leqslant -2\dfrac{l^{\cdot}(t)}{l(t)} z_1$

в области $0 \leqslant y_1 \leqslant H$, $-\infty < z_1 < +\infty$;

2) $y_1^{\cdot} = z_1, \quad z_1^{\cdot} \geqslant -2\dfrac{l^{\cdot}(t)}{l(t)} z_1$

в области $-H \leqslant y_1 \leqslant 0$, $-\infty < z_1 < +\infty$.

При выполнении условия

$$\int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{t} -2\frac{l^{\cdot}(\tau)}{l(\tau)}\,d\tau\right) dt = A\int_{t_0}^{t} l(t)\,dt < \infty$$

$$A = \exp(-2)/l_0 = \mathrm{const}$$

движение $\xi = 0$ системы

$$\xi_1^{\cdot} = \xi_2, \quad \xi_2^{\cdot} = -2\frac{l^{\cdot}(t)}{l(t)}\xi_2(t)$$

ξ_1-устойчиво, поэтому движение $x = 0$ системы (4.2) y_1-устойчиво.

Пример 3. Рассмотрим вопрос о неустойчивости перманентного вращения твердого тела в случае Эйлера — Пуансо. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$y_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A} z_1 z_2, \quad z_1^{\cdot} = \frac{C-A}{B} z_2 (y_1 + p_0), \quad z_2^{\cdot} = \frac{A-B}{C} z_1 (y_1 + p_0)$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, $p_0 = \mathrm{const} > 0$.

Введем векторную функцию $V = (V_1, V_2)$, в которой $V_1 = y_1$, $V_2 = z_1 z_2$. При условии $C < A < B$ или $C > A > B$ в области

$$y_1 \leqslant 0,\ y_1 + p_0 > 0,\ 0 \leqslant \|z\| < +\infty$$

имеет место оценка

$$V_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A} V_2, \quad V_2^{\cdot} = (p_0 + y_1)\left[\frac{C-A}{B} z_2^2 + \frac{A-B}{C} z_1^2\right] \leqslant 0$$

Движение $\omega = 0$ системы

$$\omega_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A}\omega_2, \quad \omega_2^{\cdot} = 0$$

ω_1-неустойчиво снизу, поэтому, согласно теореме 3.2, перманентное вращение y_1-неустойчиво при $C < A < B$ или $C > A > B$. Следовательно, перманентное вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции тела неустойчиво по отношению к проекции угловой скорости на ось вращения.

5. Пусть имеем управляемую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = A^* x + B^* u \tag{5.1}$$

$$x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (y, z),\ m > 0,\ n = m + p,\ p > 0$$

Здесь x — n-мерный вектор, характеризующий состояние системы, $u = (u_1, \ldots, u_2)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий, A^*, B^* — постоянные матрицы размерами $n \times n$, $u \times z$ соответственно.

В переменных y, z система (5.1) имеет вид

$$y^{\cdot} = Ay + Bz + Pu,\ z^{\cdot} = Cy + Dz + Qu \tag{5.2}$$

где A, B, C, D, P, Q — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Рассмотрим задачу о стабилизации движения $x = 0$ системы (5.2) относительно $y_1, \ldots, y_m$ (y-стабилизация) [9, 10]. Управляющие воздействия будем считать допустимыми, если $U = \{u\colon u = \Gamma_1 y + \Gamma_2 z\}$, где Γ_1, Γ_2 — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Известно [11, 12], что вектор управлений, решающих задачу y-стабилизации для системы (5.2), всегда может быть построен в виде

$$u(y, z) = \Gamma z + u^*(y, z) \tag{5.3}$$

Постоянная матрица Γ определяется преобразованием, приводящим систему (5.2) к определенному виду, а управление $u^*(y, z)$ решает задачу о стабилизации по всем переменным для некоторой вспомогательной линейной стационарной системы (назовем ее системой μ-вида), размерность которой может быть меньше размерности исходной системы.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — переменные, характеризующие состояние системы μ-вида. Введем в рассмотрение функционал

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \omega(\xi[t], u^*[t])\,dt \tag{5.4}$$

где $\omega(\xi, u^*)$ — определенно-положительная квадратичная форма переменных ξ, u^*, $\xi[t]$ — решения системы μ-вида при $u = u^*(\xi)$, $u^*[t] = u^*(\xi[t])$.

Выбирая управляющие усилия u_j^*, $j = 1, \ldots, r$ таким образом, чтобы на траекториях системы μ-вида минимизировался интеграл (5.4), можно достичь следующих двух целей.

1°. Условие минимума интеграла (5.4) должно обеспечить достаточно быстрое затухание движений $y_1, \ldots, y_m$ системы (5.2) при $u = \Gamma z + u^*$, так как поведение переменных $\xi_1, \ldots, \xi_N$ системы μ-вида, согласно [11, 12], полностью определяет поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (5.2) при $u = \Gamma z + u^*$.

2°. Величина интеграла (5.4) удовлетворительно оценивает ресурсы, затрачиваемые на формирование управления $u_j^*[t]$, и, следовательно, частично решает проблему наименьшей затраты ресурсов при построении управлений в виде (5.3).

Задача о полуоптимальной y-стабилизации. Найти управляющее воздействие $u \in U$ так, чтобы невозмущенное движение $x = 0$ замкнутой системы (5.2), (5.3) было асимптотически y-устойчиво и, кроме того, на траекториях системы (5.2) минимизировался функционал (5.4).

Рассмотрим матрицы

$$K = \{(B + P\Gamma)^T,\ (D + Q\Gamma)^T(B + P\Gamma)^T, \ldots, (D + Q\Gamma)^{Tp-1} \times (B + P\Gamma)^T\}$$

$$K_1 = \{L_1B^*,\ A_1L_1B^*, \ldots, A_1^{m+N-1}L_1B^*\}$$

$$L = \begin{Vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Vmatrix}, \quad L_1 \begin{Vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \begin{matrix} l_{11} \ldots l_{1p} \\ l_{N1} \ldots l_{Np} \end{matrix} \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} LA^*L^{-1} = \{g_{ij}\}, \quad i, j = 1, \ldots, n \\ A_1 = \{g_{ij}\}, \quad i, j = 1, \ldots, m + N \end{matrix}$$

где E_m — единичная матрица размера $m \times m$; $(l_{i1}, \ldots, l_{ip})^T$, $i = 1, \ldots, N$ — линейно-независимые векторы-столбцы матрицы K, L_2 — произвольная постоянная матрица размера $(n - m - p) \times p$, такая, что матрица L невырожденная; $N = \operatorname{rank} K$, T — знак транспонирования.

Теорема 5.1. Пусть существует постоянная матрица Γ, такая, что $m + N = \operatorname{rank} K_1$. Тогда для системы (5.2) разрешима задача о полуоптимальной y-стабилизации.

Доказательство. При условиях теоремы, согласно [12], система μ-вида будет вполне управляемой. Тогда, согласно [13], задача об оптимальной стабилизации до асимптотической устойчивости по Ляпунову для системы μ-вида при условии, что качество переходного процесса в системе μ-вида оценивается функционалом (5.4), имеет единственное решение. Но поведение переменных, описывающих состояние системы μ-вида, полностью определяет поведение переменных $y_1, \ldots, y_m$ замкнутой системы (5.2), (5.3). Теорема доказана.

Для нелинейных систем также может быть эффективно использован способ построения управляющих воздействий, решающих задачу y-стабилизации, в виде (5.3). Следует отметить, что, по-видимому, оказывается редким случай, когда разрешающие управления имеют вид $u_j = u_j^{(1)} +$

$+ u_j^{(2)}$, где управления $u_j^{(1)}(y, z)$ приводят исходную систему к некоторой вспомогательной системе μ-вида (вообще говоря, нелинейной), такой, что решение задачи об оптимальной стабилизации до асимптотической устойчивости по Ляпунову для системы μ-вида при помощи управления $u_j^{(2)}$ гарантирует решение задачи о полуоптимальной y-стабилизации исходной системы управлением $u_j = u_j^{(1)} + y_j^{(2)}$. В общем случае оказывается, что разрешающие управления u_j имеют вид

$$u_j = u_j^{(1)} + f_j(y, z)\, u_j^{(2)} \tag{5.5}$$

где управления $u_j^{(1)}$, $u_j^{(2)}$ имеют указанный выше смысл, а $f_j(y, z)$ — некоторые функции (вообще говоря, неаналитические) переменных y, z. При этом управления (5.5) могут оказаться неаналитическими функциями переменных, определяющих состояние исходной системы, и вопрос об их физической реализуемости требует дополнительного изучения. (Задача y-стабилизации движения в этом классе управления рассмотрена в [12].) Заметим, что при построении управлений в виде (5.5) могут быть использованы приводимые в [4] процедуры построения систем μ-вида.

Пример 4. Рассмотрим уравнения движения летательного аппарата с переменными аэродинамическими характеристиками [14]

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = a_{22}x_2 + (a_{23} + p_{23}(t))\, x_3 + b_2(t)\, u \\ &x_3^{\cdot} = x_2 + (a_{33}^{\cdot} + p_{33}(t))\, x_3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь x_1 — угол тангажа, x_3 — угол атаки, u — отклонение руля высоты, $b_2(t)$ и коэффициенты системы — аэродинамические характеристики.

Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения системы (5.6) относительно угла атаки. Для этого введем новую переменную $\eta = x_2 + (a_{33} + p_{33}(t))\, x_3$. Система (5.6) примет вид

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = a_{22}x_2 + (a_{23} + p_{23}(t))\, x_3 + b_2(t)\, u \\ &x_3^{\cdot} = \eta, \quad \eta^{\cdot} = r(t)\, x_2 + \varepsilon(t)\, x_3 + b_2(t)\, u \\ &(r(t) = a_{22} + a_{33} + p_{33}(t), \ \varepsilon(t) = a_{23} + p_{23}(t) + p_{33}^{\cdot}(t) + (a_{33} + p_{33}(t))^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Управление $u(t)$, следуя (5.3), строим в виде

$$\begin{aligned} &u(t) = -\frac{r(t)}{b_2(t)}\, x_2 + u^*(t) = \Gamma(t)\, z + u^*(t) \\ &\Gamma(t) = \left(-\frac{r(t)}{b_2(t)}, 0\right), \quad z = (x_2, x_1)^T \end{aligned} \tag{5.8}$$

Систему μ-вида, соответствующую матрице $\Gamma(t)$, составят уравнения

$$x_3^{\cdot} = \eta, \quad \eta^{\cdot} = \varepsilon(t)\, x_3 + b_2(t)\, u^* \tag{5.9}$$

При этом задача о x_3-стабилизации невозмущенного движения системы (5.6) сводится к задаче о стабилизации до асимптотической устойчивости по Ляпунову движения $x_3 = \eta = 0$ системы (5.9). Вводя в рассмотрение функционал вида (5.4)

$$J[u] = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t;\, x_3, \eta, u^*)\, dt$$

и строя управляющее усилие u^* по методике, указанной в [15], можно обеспечить достаточно быстрое затухание переходного процесса в замкнутой системе (5.6), (5.8) по переменной x_3, а также частично решить проблему наименьшей затраты ресурсов при построении управления в виде (5.8).

Пример 5. Рассмотрим задачу о гашении вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, которое вызвано начальными возмущениями. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} = \frac{B - C}{A}\, x_2 x_3 + \frac{1}{A}\, mg\, (x_{30}\gamma_2 - x_{20}\gamma_3) + \frac{1}{A}\, u_1 \\ &\gamma_1^{\cdot} = x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3 \quad (123,\ ABC) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела, x_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции на главные оси инерции единичного вектора, направленного вдоль неподвижной вертикальной оси, x_{i0} $(i = 1, 2, 3)$ — координаты центра инерции в главных осях инерции, u_1, u_3 — управляющие воздействия, зависящие от ориентации твердого тела и не зависящие от его угловой скорости, u_2 — управляющее воздействие, которое может зависеть как от ориентации твердого тела, так и от его угловой скорости.

Рассмотрим законы управления

$$
\begin{aligned}
(5.11)\qquad & u_1 = -mg\,(x_{30}\gamma_2 - x_{20}\gamma_3), \quad u_2 = -mg\,(x_{10}\gamma_3 - x_{30}\gamma_1) - \\
& -C^{-1}\left[C\,(C - A)\,x_1 x_3^2 + \frac{ABC}{B-C}\,(A - B)\,x_1 x_2^{\,2} + Bu^*\right] x_3\ B \\
& u_3 = -mg\,(x_{20}\gamma_1 - x_1\gamma_2)
\end{aligned}
$$

и введем новую переменную $\mu = (B - C)\,x_2 x_3/A$. В замкнутую систему (5.10), (5.11) будут входить следующие два уравнения:

$$
(5.12)\qquad x_1^{\cdot} = \mu, \quad \mu^{\cdot} = u^*,
$$

причем задачу о x_1-стабилизации невозмущенного движения системы (5.10) можно заменить задачей о стабилизации движения $x_1 = \mu = 0$ системы (5.12) до асимптотической устойчивости по Ляпунову. Вводя в рассмотрение функционал

$$
J\,[u] = \int\limits_{t_0}^{\infty} \omega\,(x_1, \mu, u^*)\,dt
$$

и решая для системы (5.12) задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения, получаем законы управления, решающие для системы (5.10) задачу о полуоптимальной x_1-стабилизации.

Заметим, что полученные законы управления (5.11) переводят вызванное начальными возмущениями движение твердого тела в плоскость, перпендикулярную оси x_1.

Пример 6. Рассмотрим уравнения возмущенного движения гиростата [16]

$$
(5.13)\qquad a_1 x_1^{\cdot} = x_5 x_3 - x_6 x_2 + u_1, \quad x_4^{\cdot} = x_5 x_3 - x_6 x_3 \quad (123,\ ABC)
$$

где a_1, a_2, a_3 — моменты инерции и x_1, x_2, x_3 — угловые скорости аппарата, x_4, x_5, x_6 — линейные функции угловых скоростей аппарата и маховиков, u_1, u_2, u_3 — управляющие воздействия.

Рассмотрим законы управления

$$
\begin{aligned}
(5.14)\qquad & u_1 \equiv u_3 \equiv 0 \\
& u_2 = \frac{a_2}{x_6}\left[x_5\left(\frac{x_1 x_5}{a_3} - x_1 x_2 - \frac{x_2 x_4}{a_3}\right) + x_4\,(x_3^2 + x_2^2)\right] + \\
& + a_2\left(-x_1 x_3 + \frac{x_1 x_6}{a_2} - \frac{x_3 x_4}{a_2}\right) + \frac{a_2}{x_6}\,u^*
\end{aligned}
$$

и введем новую переменную $\mu = x_5 x_3 - x_6 x_2$. В замкнутую систему (5.13), (5.14) будут входить следующие два уравнения:

$$
(5.15)\qquad a_1 x_1^{\cdot} = \mu, \quad \mu^{\cdot} = u^+
$$

причем задачу о x_1-стабилизации невозмущенного движения системы (5.13) можно заменить задачей о стабилизации движения $x_1 = \mu = 0$ системы (5.15) до асимптотической устойчивости по Ляпунову. Решая для системы (5.15) задачу об оптимальной стабилизации невозмущенного движения, получаем законы управления, решающие для системы (5.13) задачу об оптимальной x_1-стабилизации.

Заметим, что законы управления (5.14) переводят вызванное начальными возмущениями движение гиростата в плоскость, перпендикулярную оси x_1.

6. Довольно обширная литература посвящена поставленной А. М. Летовым [16] задаче минимизации функционала, которая является задачей реализации некоторых требований, предъявляемых к качеству переходных процессов в системе. Допустим, что необходимо реализовать некоторые требования, предъявляемые к качеству переходных процессов по переменным $y_1, \ldots, y_m$ в системе (5.2). Это можно сделать строя управляющее воздействие в виде (5.3) и решая для системы уравнений μ-вида задачу минимизации квадратичного функционала. Заметим, что при этом проблема наименьшей затраты ресурсов управления, как и в случае задачи y-стабилизации, решается лишь частично. При помощи построения управлений в виде (5.5) аналогичный подход может быть реализован и для нелинейных систем.

7. Рассмотрим конфликтно-управляемую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = A^*x + B^*u + C^*v \tag{7.1}$$

$$x = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p) = (y, z), \quad m > 0, \quad n = m + p, \quad p > 0$$

Здесь x — n-мерный вектор состояния системы, u, v — векторы управлений первого и второго игроков, A^*, B^*, C^* — постоянные матрицы соответствующих размеров. В переменных y, z система (7.1) имеет вид

$$y^{\cdot} = Ay + Bz + P_1u + Q_1v, \quad z^{\cdot} = Cy + Dz + P_2u + Q_2u \tag{7.2}$$

где A, B, C, D, P_1, P_2, Q_1, Q_2 — постоянные матрицы.

Линейно-квадратичная игра на минимакс—максимин некоторого функционала [17] является отражением некоторых требований предъявляемых к поведению переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ исходной системы (7.1). Допустим, что необходимо реализовать требования лишь по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_m$ системы (7.1). Это можно сделать выбирая управления в виде

$$u = \Gamma^{(1)} z + u^*(t), \quad v = \Gamma^{(2)} z + v^*(t) \tag{7.3}$$

где $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров. Подставляя управления (7.3) в систему (7.2), имеем

$$\begin{aligned} y^{\cdot} &= Ay + (B + P_1\Gamma^{(1)} + Q_1\Gamma^{(2)})\, z + P_1u^* + Q_1v^* \\ z^{\cdot} &= Cy + (D + P_2\Gamma^{(2)} + Q\Gamma^{(2)})\, z + P_2u^* + Q_2v^* \end{aligned} \tag{7.4}$$

Полагая в системе (7.4) $u^* \equiv 0$, $v^* \equiv 0$ и строя для получившейся системы вспомогательную систему уравнений μ-вида [3] $\xi' = G\xi$, полностью описывающую состояние ее переменных $y_1, \ldots, y_m$, получаем для системы (7.4) следующие уравнения:

$$\xi^{\cdot} = G\xi + P^*u^* + Q^*v^* \tag{7.5}$$

причем число этих уравнений может быть меньше числа уравнений в исходной системе (7.1). Поведение переменных, описывающих состояние системы (7.5), полностью описывает состояние переменных $y_1, \ldots, y_m$ замкнутой системы (7.2), (7.3).

Решая задачу на минимакс—максимин некоторого квадратичного функционала, заданного для системы (7.5), можно реализовать, пользуясь известными методами ее решения [17], определенные требования к поведению переменных $y_1, \ldots, y_m$ исходной конфликтно-управляемой системы (7.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364—384.
3. *Воротников В. И., Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем.— ПММ., 1978, т. 42, вып. 2, с. 268—271.
4. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 441—450.

5. *Матр*[illegible]. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. IV.— Дифференц[illegible]ения, 1969, т. 5, вып. 12, с. 2129—2143.
6. [illegible] *T*. Systémès des équations et des inéqua différentielles ordinaires aux [illegible]mes membres monotones et leurs applications.— Ann. Soc. Polon. Math., 1950, v. 23, p. 112—166.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
8. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 138—143.
9. *Rumyantsev V. V.* On the stability with respect to a part of the variables. Sympos. Math. V. 6. Meccanica nonlineare e stabilita, 1970. London — N. Y.: Acad. Press, 1971, p. 243—265.
10. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440—456.
11. *Воротников В. И.* Об устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных для линейных систем с запаздыванием.— Автоматика и телемеханика, 1980, № 8, с. 36—47.
12. *Воротников В. И.* О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных.— Автоматика и телемеханика, 1982, № 3, с. 15—21.
13. *Красовский Н. Н.* Проблема стабилизации управляемых движений.— В кн.: *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. 530 с.
14. *Боднер В. А.* Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 698 с.
15. *Репин Ю. М.*, *Третьяков В. Е.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 6, с. 738—743.
16. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
17. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
20.IV.1982