Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 62—50

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ КООРДИНАТАХ УБЕГАЮЩЕГО

Чикрий А. А.

Предлагаются эффективные способы решения задачи группового преследования с ограничениями на состояние убегающего. Работа примыкает к исследованиям [1—4] [1] и является развитием результатов [5] в случае произвольных линейных уравнений движения убегающего.

1. Задана дифференциальная игра

$$z_i^{\cdot} = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \quad z_i \in E^{n_i}, \quad u_i \in U_i, \ v \in V, \ i \in N_m = \{1, \ldots, m\} \tag{1.1}$$

где E^{n_i} — конечно-мерное евклидово пространство, A_i — квадратные матрицы порядка n_i, U_i, V — непустые компакты, функции $\varphi_i(u_i, v)$ непрерывны по совокупности переменных.

Терминальное множество M состоит из множеств M_i^*, $i \in N_m$, имеющих вид $M_i^* = M_i^\circ + M_i$, где M_i° — линейные подпространства из E^{n_i}, а M_i — выпуклые замкнутые множества из ортогональных дополнений L_i к M_i° в пространстве E^{n_i}, причем для $i \in N_m \setminus N_k$, $k \leqslant m$, $M_i = \{a_i\}$, a_i — некоторый вектор из L_i.

Игра (1.1) считается законченной, если хотя бы для одного i $z_i(t) \in M_i^*$ для некоторого $t > 0$.

Будем говорить, что дифференциальная игра (1.1) может быть закончена из заданного положения $z^\circ = (z_1^\circ, \ldots, z_m^\circ)$ не позже, чем за время $T = T(z^\circ)$, если существуют такие измеримые функции $u_i(t) = u_i(z_i^\circ, v(t)) \in U_i$, $t \in [0, T]$, что решения уравнений

$$z_i^{\cdot} = A_i z_i + \varphi_i(u_i(t), v(t)), \quad z_i(0) = z_i^\circ, \quad i \in N_m$$

при некотором $i = i(v(\cdot))$ попадают на множество M_i не позже, чем в момент $t = T$, при любых измеримых функциях $v(\cdot) = \{v(t): v(t) \in V, t \in [0, T]\}$. При этом преследователи могут использовать не только мгновенные значения управления убегающего, но и всю предысторию $v(s)$, $s \in [0, t]$.

2. Пусть π_i — оператор ортогонального проектирования из E^{n_i} на подпространство L_i. Рассмотрим многозначные отображения

$$\Phi_i(t, v) = \pi_i \exp(tA_i) \varphi_i(U_i, \varepsilon_i(t) v).$$

$$\Phi_i(t) = \bigcap_{v \in V} \Phi_i(t, v), \quad i \in N_k, \quad t \geqslant 0$$

где $\exp(tA_i)$ — фундаментальная матрица системы $z_i^{\cdot} = A_i z_i$, а $\varepsilon_i(t)$ — некоторые измеримые функции, принимающие значения из интервала $[0, 1]$.

Пусть существуют измеримые функции $\varepsilon_i(t)$, $i \in N_k$, и число $T_0 > 0$, $\varepsilon_i(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T_0]$, такие, что выполнены следующие условия.

[1] См. также: *Ченцов А. Г.* О некоторых вопросах структуры дифференциальных игр сближения — уклонения. Свердловск, 1979.— 44 с. Деп. в ВИНИТИ, 14. I. 1980, № 205—80.

Условие 1. Множества $\Phi_i(t)$ непусты для всех $i \in N_k$, $T_0 \geqslant t \geqslant 0$.

Положим

$$\varphi_i^*(t, u_i, v) = \varphi_i(u_i, v) - \varphi_i(u_i, \varepsilon_i(t) v)$$

Условие 2. Множества

$$W_i(t) = M_i \overset{*}{-} \int_0^t \pi_i \exp((t-\tau) A_i) \varphi_i^*(t-\tau, U_i, V)\, d\tau$$

непусты для всех $i \in N_k$, $T_0 \geqslant t > 0$ ($\overset{*}{-}$ — операция геометрического вычитания множеств [6]).

Зафиксировав некоторые измеримые селекторы $\varphi_i(t) \in \Phi_i(t)$, положим

$$\xi_i(t, z_i) = \pi_i \exp(tA_i) z_i + \int_0^t \varphi_i(t-\tau)\, d\tau, \quad i \in N_k, \quad t \in [0, T_0]$$

и обозначим

$$\alpha_i(t, \tau, z_i, v) = \begin{cases} \max(\alpha \geqslant 0:\ \{\Phi_i(t-\tau, v) - \varphi_i(t-\tau)\} \cap \\ \cap \{\alpha(W_i(t) - \xi_i(t, z_i))\} \neq \varnothing), & \xi_i(t, z_i) \overline{\in} W_i(t) \\ t^{-1}, & \xi_i(t, z_i) \in W_i(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$i \in N_k, \quad T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \quad v \in V$$

Лемма 1. Пусть условия 1 и 2, отображения $\varphi_i(U_i, \varepsilon_i(t) v)$ выпуклозначны, $\varphi_i(t)$ — измеримый селектор отображения $\Phi_i(t)$, $v \in V$. Тогда, если $\xi_i(t, z_i) \overline{\in} W_i(t)$, то

$$\alpha_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{p \in P_i(t, z_i)} \{C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, \varphi_i(t-\tau))\}, \tag{2.2}$$

$$T_0 \geqslant t \geqslant \tau \geqslant 0, \quad i \in N_k$$

где $P_i(t, z_i) = \{p \in L_i: -C_{W_i(t)}(p) + (p, \xi_i(t, z_i)) = 1\}$, а $C_{\Phi_i(t,v)}(p)$, $C_{W_i(t)}(p)$ — опорные функции соответствующих множеств.

Доказательство. Из условия 1 следует включение

$$0 \in \Phi_i(t-\tau, v) - \varphi_i(t-\tau)$$

для всех $v \in V$, $T_0 \geqslant t \geqslant \tau \geqslant 0$, которое эквивалентно неравенству

$$C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, \varphi_i(t-\tau)) \geqslant 0 \ \forall p \in L_i \tag{2.3}$$

Из свойства операции геометрического вычитания вытекает, что отображение $W_i(t)$ выпуклозначно [6]. Непустота пересечения в выражении (2.1) равносильна неравенству ([7], с. 65)

$$C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, \varphi_i(t-\tau)) \geqslant \alpha((p, \xi_i(t, z_i)) - C_{W_i(t)}(p)) \ \forall p \in L_i$$

При $(p, \xi_i(t, z_i)) - C_{W_i(t)}(p) \leqslant 0$ последнее неравенство выполнено при любых неотрицательных α, так как имеет место (2.3). Если же $(p, \xi_i(t, z_i)) - C_{W_i(t)}(p) > 0$, то, положив $(p, \xi_i(t, z)) - C_{W_i(t)}(p) = 1$, получим

$$C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, \varphi_i(t-\tau)) \geqslant \alpha$$

Отсюда и следует формула (2.2).

Для $i \in N_m \setminus N_k$ предполагается выполненным следующее.

Условие 3. Множества $\pi_i \exp(tA_i) \varphi_i(U_i, v)$, $i \in N_m \setminus N_k$ состоят из единственных точек $\varphi_i(t, v)$ при фиксированных t, v, $T_0 \geqslant t \geqslant 0$, $v \in V$.

Для $i \in N_m \setminus N_k$ положим

$$\xi_i(t, z_i) = \pi_i \exp(tA_i) z_i$$

$$\alpha_i(t, \tau, z_i, v) = \begin{cases} \alpha:\ \alpha(a_i - \xi_i(t, z_i)) = \varphi_i(t-\tau, v), & a_i \neq \xi_i(t, z_i) \\ \|\varphi_i(t-\tau, v)\| + t^{-1}, & a_i = \xi_i(t, z_i) \end{cases} \tag{2.4}$$

$$T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \quad v \in V$$

Обозначим

$$\lambda(t, z) = 1 - \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in N_m} \int_0^t \alpha_i(t, \tau, z_i, v(\tau))\, d\tau$$

$$T(z) = \{t > 0 \colon \lambda(t, z) = 0\}$$

где $v(\cdot)$ — измеримая на интервале $[0, t]$ функция, принимающая значения из множества V.

Теорема 1. Пусть для дифференциальной игры (1.1) выполнены условия 1—3 и $T(z^\circ) \leqslant T_0$. Тогда она может быть закончена из заданного начального положения z° не позже, чем за время $T(z^\circ)$.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$, $T = T(z^\circ)$ — некоторая измеримая функция. Положим

$$h(T, t, z^\circ, v(\cdot)) =$$
$$= 1 - \max\left\{\max_{i \in N_k} \int_0^t \alpha_i(T, \tau, z_i^\circ, v(\tau))\, d\tau,\ \max_{i \in N_m \setminus N_k} \int_0^t \alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v(\tau))\, d\tau\right\}$$

Так как $h(T, 0, z^\circ, v(\cdot)) = 1$, а функция $\alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v)$ для $i \in N_m \setminus N_k$, $a_i \neq \xi_i(t, z_i^\circ)$, непрерывно зависит от t, то $h(T, t, z^\circ, v(\cdot))$ непрерывно зависит от t и из определения функции $\lambda(t, z)$ следует, что существует такой момент t_*, $0 < t_* \leqslant T$, что $h(T, t_*, v(\cdot)) = 0$.

Укажем способ выбора управлений для $i \in N_k$. Пусть $\xi_i(T, z_i^\circ) \overline{\in} W_i(T)$. Тогда для $0 \leqslant \tau < t_*$ управление $u_i(\tau) \in U_i$ и функцию $\varkappa_i(\tau) \in W_i(T)$ выберем из уравнения

$$\pi_i \exp((T - \tau) A_i)\, \varphi_i(U_i(\tau),\ \varepsilon_i(T - \tau) v(\tau)) - \varphi_i(T - \tau) = \qquad (2.5)$$
$$= -\alpha_i(T, \tau, z_i^\circ, v(\tau))(\varkappa_i(\tau) - \xi_i(T, z_i^\circ))$$

Функция $\alpha_i(T, \tau, z_i^\circ, v(\tau))$ измерима по τ, поэтому из условий 1 и 2 в силу теоремы Филиппова — Кастена ([8], стр. 179) следует разрешимость уравнения (2.5) в классе измеримых функций $u_i(\tau)$, $\varkappa_i(\tau)$, $0 \leqslant \tau < t_*$.

Для $t_* \leqslant \tau \leqslant T$ положим $\alpha_i(T, \tau, z_i^\circ, v) \equiv 0$ и управление $u_i(\tau)$ выберем из полученного равенства (2.5). Если $\xi_i(T, z_i^\circ) \in W_i(T)$, то положим $\varkappa_i(\tau) \equiv \xi_i(T, z_i^\circ)$ и управление $u_i(\tau)$ выберем из уравнения (2.5) с нулевой правой частью.

Из формулы Коши следует представление

$$\pi_i z_i(t) = \pi_i \exp(tA_i) z_i^\circ + \int_0^t \pi_i \exp((t - \tau) A_i)\, \varphi_i(u_i(\tau), v(\tau))\, d\tau, \qquad (2.6)$$
$$i \in N_m$$

Если $h(T, t_*, z^\circ, v(\cdot)) = 0$, то существует такой номер j, что выполнено одно из следующих равенств:

$$1 - \int_0^{t_*} \alpha_j(T, \tau, z_j^\circ, v(\tau))\, d\tau = 0, \quad j \in N_k \qquad (2.7)$$

$$1 - \int_0^{t_*} \alpha_j(t_*, \tau, z_j^\circ, v(\tau))\, d\tau = 0, \quad j \in N_m \setminus N_k \qquad (2.8)$$

Пусть $j \in N_k$. Тогда, прибавляя и вычитая из обеих частей равенства (2.6) при $i = j$, $t = T$ величины

$$\int_0^T \pi_j \exp((T - \tau) A_j)\, \varphi_j(u_j(\tau),\ \varepsilon_j(T - \tau) v(\tau))\, d\tau, \quad \int_0^T \varphi_j(T - \tau)\, d\tau$$

а также учитывая закон выбора управлений, получим

$$\pi_j z_j(T) = \xi_j(T, z_j^\circ)\left(1 - \int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^\circ, v(\tau))\,d\tau\right) +$$

$$+ \int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^\circ, v(\tau))\,\varkappa_j(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^T \pi_j \exp((T-\tau)A_j)\,\varphi_j^*(T-\tau, u_j(\tau), v(\tau))\,d\tau$$

Отсюда с учетом формул (2.5), (2.7), выпуклозначности отображения $W_j(T)$ и свойства операции геометрического вычитания получим $\pi_j z_j(T) \in \in M_j$.

Пусть $j \in N_m \setminus N_k$. Рассмотрим случай, когда $a_j \neq \xi_j(t_*, z_j^\circ)$. Из (2.4) в силу равенства (2.8) и условия 3 имеем

$$a_j - \xi_j(t_*, z_j^\circ) - \int_0^{t_*} \varphi_j(t_* - \tau, v(\tau))\,d\tau = 0$$

или $a_j = \pi_j z_j(t_*)$.

Если $a_j = \xi_j(t_*, z_j^\circ)$, то из равенства (2.8) получим

$$\int_0^{t_*} \| \varphi_j(t-\tau, v(\tau)) \|\,d\tau = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^{t_*} \varphi_j(t_* - \tau, v(\tau))\,d\tau = 0$$

Отсюда с учетом исходного предположения и формулы (2.6) получим $a_j = \pi_j z_j(t_*)$.

3. Зафиксируем некоторые измеримые селекторы $\varkappa_i(t)$ многозначных отображений $W_i(t)$, $i \in N_k$, $t \in [0, T_0]$ и положим

$$\eta_i(t, z_i) = \xi_i(t, z_i) - \varkappa_i(t)$$

Обозначим

$$\beta_i(t, \tau, z_i, v) = \begin{cases} \max(\beta \geqslant 0: -\beta\eta_i(t, z_i) \in \Phi_i(t-\tau, v) - \\ -\varphi_i(t-\tau)), \quad \eta_i(t, z_i) \neq 0 \\ t^{-1}, \quad \eta_i(t, z_i) = 0 \end{cases}$$

$$i \in N_k, \quad T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \quad v \in V$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1 и 2, отображения $\varphi_i(U_i, \varepsilon_i(t)\,v)$ выпуклозначны, $\varphi_i(t)$ и $\varkappa_i(t)$ — измеримые селекторы отображений $\Phi_i(t)$ и $W_i(t)$ соответственно. Тогда, если $\eta_i(t, z_i) \neq 0$, то

$$\beta_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{\substack{p \in L_i \\ (p,\, \eta_i(t, z_i)) = 1}} \{C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, \varphi_i(t-\tau))\},$$

$$i \in N_k, \; T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \; v \in V$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Для $i \in N_m \setminus N_k$ положим $\xi_i(t, z_i) \equiv \eta_i(t, z_i)$, $\beta_i(t, \tau, z_i, v) \equiv \equiv \alpha_i(t, \tau, z_i, v)$. Обозначим

$$\mu(t, z) = 1 - \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in N_m} \int_0^t \beta_i(t, \tau, z_i, v(\tau))\,d\tau$$

$$\Theta(z) = \{t > 0: \; \mu(t, z) = 0\}$$

Теорема 2. Пусть для дифференциальной игры (1.1) выполнены условия 1—3 и $\Theta(z^\circ) \leqslant T_0$. Тогда она может быть закончена из заданного начального положения z° не позже, чем за время $\Theta(z^\circ)$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1.

4. Пусть $\omega_i(t, \tau)$, $i \in N_k$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$ — некоторые числовые функции. Рассмотрим многозначные отображения

$$F_i(t, \tau, U_i, v) = \Phi_i(t - \tau, v) - \omega_i(t, \tau) W_i(t)$$

$$F_i(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} F_i(t, \tau, U_i, v), \quad t \geqslant \tau \geqslant 0, \quad i \in N_k$$

Пусть существуют измеримые функции $\varepsilon_i(t) \in [0, 1]$, измеримые неотрицательные функции $\omega_i(t, \tau)$ и число T_0, $i \in N_k$, $T_0 \geqslant t \geqslant \tau \geqslant 0$, такие, что выполнено

Условие 4. Множества $F_i(t, \tau)$ непусты для всех $i \in N_k$, $T_0 \geqslant t \geqslant \tau \geqslant 0$.

Зафиксируем некоторые измеримые селекторы $f_i(t, \tau)$ отображений $F_i(t, \tau)$ и положим

$$\zeta_i(t, z_i) = \pi_i \exp(tA_i) z_i + \int_0^t f_i(t, \tau)\, d\tau$$

Обозначим

$$\gamma_i(t, \tau, z_i, v) = \begin{cases} \max(\gamma \geqslant 0: \ -\gamma\zeta_i(t, z_i) \in F_i(t, \tau, U_i, v) - f_i(t, \tau)) \\ \hfill \zeta_i(t, z_i) \neq 0 \\ t^{-1}, \quad \zeta_i(t, z_i) = 0 \end{cases}$$

$$i \in N_k, \quad T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \quad v \in V$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия 2 и 4, отображения $\varphi_i(U_i, \varepsilon_i(t) v)$ выпуклозначны, $f_i(t, \tau)$ — измеримый селектор отображения $F_i(t, \tau)$. Тогда, если $\xi_i(t, z_i) \neq 0$, то

$$\gamma_i(t, \tau, z_i, v) = \inf_{\substack{p \in L_i \\ (p,\, \zeta_i(t, z_i)) = 1}} \{C_{\Phi_i(t-\tau, v)}(-p) + (p, f_i(t, \tau)) +$$

$$+ \omega_i(t, \tau) C_{W_i(t)}(-p)\} \quad i \in N_k, \ T_0 \geqslant t \geqslant \tau > 0, \ v \in V$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Для $i \in N_m \setminus N_k$ положим $\zeta_i(t, z_i) \equiv \xi_i(t, z_i)$, $\gamma_i(t, \tau, z_i, v) \equiv \alpha_i(t, \tau, z_i, v)$. Обозначим

$$\nu(t, z) = 1 - \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in N_m} \int_0^t \gamma_i(t, \tau, z_i, v(\tau))\, d\tau$$

$$\Gamma(z) = \{t > 0: \ \nu(t, z) = 0\}$$

Теорема 3. Пусть для дифференциальной игры (2.1) выполнены условия 2—4, $T = \Gamma(z^\circ) \leqslant T_0$ и

$$\int_0^T \omega_i(T, \tau)\, d\tau = 1, \quad i \in N_k$$

Тогда она может быть закончена из заданного начального положения z° не позже чем за время $\Gamma(z^\circ)$.

Доказательство основано на идеях, используемых при доказательстве теоремы 1.

5. Пусть $k = m = 1$. Опустим во всех обозначениях индексы и положим $\varepsilon(t) \equiv 1$. Установим связь между схемами преследования, изложенными в пп. 2—4, и первым прямым методом Л. С. Понтрягина [6].

Следствие 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда для того, чтобы

$$\pi \exp(tA) z \in M - \int_0^t \Phi(t - \tau)\, d\tau$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал измеримый селектор $\varphi(\tau) \in \Phi(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, такой, что $\xi(t, z) \in M$.

Из следствия 1, в частности, вытекает, что

$$T(z) \leqslant \Pi(z)$$

$$\Pi(z) = \left\{t > 0: \pi \exp(tA) z \in M - \int_0^t \Phi(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

Следствие 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда для того, чтобы

$$\left\{\pi \exp(tA) z + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, d\tau\right\} \cap M \neq \varnothing$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали измеримый селектор $\varphi(\tau) \in \Phi(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ и вектор $m \in M$, такие что $\eta(t, z) = 0$.

Следствие 3. Пусть выполнено условие 4. Тогда для того, чтобы

$$-\pi \exp(tA) z \in \int_0^t F(t, \tau)\, d\tau \tag{5.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал измеримый селектор $f(t, \tau) \in F(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$, такой, что $\zeta(t, z) = 0$. Если к тому же

$$\int_0^t \omega(t, \tau)\, d\tau = 1$$

то преследование может быть закончено за время $t = t(z)$, задаваемое включением (5.1), из начального положения z.

Доказательство следствий 1—3 вытекает из конструкций пп. 2—4.

Таким образом, схемы пп. 2 и 3 могут, в частности, совпадать с первым прямым методом Л. С. Понтрягина, а схема п. 4 приводит к некоторой его модификации.

6. Рассмотрим задачу преследования группой управляемых объектов убегающего в ситуации, когда последний не может покинуть пределы некоторого выпуклого открытого множества, и покажем, что она является частным случаем дифференциальной игры (1.1).

Движение преследователей и убегающего имеют вид

$$\begin{aligned} &x_i^{\bullet} = C_i x_i + u_i, \quad u_i \in U_i, \quad x_i \in E^{r_i}, \quad i \in N_k \\ &y^{\bullet} = By + v, \quad v \in V, \quad y \in E^s \end{aligned} \tag{6.1}$$

причем некоторые координаты убегающего стеснены ограничением

$$G = \{y\colon (p_i, y) < l_i, \ \|p_i\| = 1, \ i \in N_m \setminus N_k\} \tag{6.2}$$

Множества M_i^*, $i \in N_k$, задаются так же, как в игре (1.1), в пространствах $E^{n_i} = E^{r_i} \times E^s$.

Процесс преследования считается законченным, если хотя бы один из преследователей ловит убегающего ($\{x_i, y\} \in M_i^*$ для некоторого $i \in N_k$) либо убегающий вынужден нарушить ограничения ($(p_i, y) = l_i$ для некоторого $i \in N_m \setminus N_k$).

Положим

$$z_i = \{x_i, y\}, \quad A_i = \begin{Vmatrix} C_i & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \quad \varphi_i(u_i, v) = \begin{Vmatrix} u_i \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ v \end{Vmatrix}, \quad i \in N_k$$

$$z_i = y, \quad A_i = B, \quad \varphi_i(u_i, v) = v$$

$$M_i^{\circ} = \{z_i\colon (p_i, z_i) = 0\}, \quad a_i = l_i p_i, \quad i \in N_m \setminus N_k$$

Тем самым задача группового преследования (6.1) с ограничениями (6.2) свелась к задаче без ограничений вида (1.1). Такое сведение использовано в [5], для задачи убегания аналогичный прием применялся ранее [9].

В [5] присутствовало весьма жесткое условие 2, сводившее рассмотрение по существу к простому движению убегающего.

Условие 3, заменившее его, выполнено автоматически.

7. *Пример 1.* Преследователи и убегающий движутся согласно уравнениям

$$x_i^{\cdot} = ax_i + u_i,\ \| u_i \| \leqslant 1,\ i \in N_k,\ x_i \in E^s$$
$$y^{\cdot} = ay + v,\ \| v \| \leqslant 1,\ y \in E^s$$

Множество M_i^* состоит из таких точек $\{x_i, y\}$, что $\| x_i - y \| \leqslant \varepsilon_i$. Ограничения на координаты убегающего

$$G = \{y \in E^s\colon (p_i, y) < l_i,\ p_i \in E^s,\ \| p_i \| = 1,\ i \in N_m \setminus N_k\}$$

Рассмотрим различные случаи.

1°. $a < 0$, $\varepsilon_i > 0$, $i \in N_k$. Применим схему п. 2. Условие 1 выполнено с $\varepsilon_i(t) \equiv 1$. Положив $\varphi_i(t) \equiv 0$, получим

$$\xi_i(t, z_i) = \exp(at)\, z_i,\ i \in N_k$$

Поскольку $a < 0$, то $\xi_i(t, z_i) \in M_i^*$ в момент

$$t_i^* = a^{-1}\cdot\ln(\varepsilon_i \cdot \| z_i^\circ \|^{-1})$$

Эта цель достигается с помощью управления $u_i(\tau) = v(\tau)$, $\tau \in [0, t_i^*]$. При этом время t_i^* совпадает со временем по Л. С. Понтрягину в силу следствия 1.

Таким образом, каждый из преследователей самостоятельно ловит убегающего при любых начальных положениях за конечное время даже без ограничений (6.2).

2°. $a < 0$, $\varepsilon_i = 0$, $i \in N_k$. Из метода инвариантных подпространств [10] следует, что убегающий может избежать поимки в случае одного преследователя и без ограничений. В силу леммы 1 имеем

$$\alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v) = \exp(-\tau a)\, \alpha_i(z_i^\circ, v)$$
$$\alpha_i(z_i^\circ, v) = \| z_i^\circ \|^{-2}\left((v, z_i^\circ) + [(v, z_i^\circ)^2 + \| z_i^\circ \|^2 (1 - \| v \|^2)]^{1/2}\right),\quad i \in N_k$$
$$\alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v) = \frac{(p_i, \exp(a(t-\tau))\, v)}{l_i - (p_i, \exp(at)\, z_i^\circ)},\quad i \in N_m \setminus N_k$$

Пусть фазовые ограничения представляют собой многогранный конус ($l_i = 0$, $i \in N_m \setminus N_k$). Обозначим

$$\alpha(z^\circ) = \max_{i \in N_m} \min_{\| v \| \leqslant 1} \left\{\alpha_i(z_i^\circ, v),\ \frac{(p_i, v)}{-(p_i, z_i^\circ)}\right\}$$

Тогда условие $\alpha(z^\circ) > 0$ является достаточным для завершения группового преследования, причем время преследования ограничено величиной

$$-a^{-1} \ln \frac{\alpha(z^\circ) - a}{\alpha(z^\circ)} \tag{7.1}$$

а управления преследователей имеют вид

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \alpha_i(z_i^\circ, v(\tau))\, z_i^\circ,\ i \in N_k,\ \tau \in [0, T(z^\circ)]$$

3°. $a > 0$, $\varepsilon_i = 0$, $i \in N_k$, $l_i = 0$, $i \in N_m \setminus N_k$. Достаточным условием завершения преследования является условие $\alpha(z^\circ) > a$, время преследования ограничено величиной (7.1).

Случай простого движения ($a = 0$) разобран в [5].

Пример 2. (Контрольный пример Л. С. Понтрягина с равными коэффициентами трения.) Движения преследователей и убегающего описываются уравнениями

$$x_{1i}^{\cdot} = x_{2i},\ x_{2i}^{\cdot} = ax_{2i} + u_i,\ x_{1i}, x_{2i} \in E^s,\ s \geqslant 2,\ \| u_i \| \leqslant 1,\ i \in N_k$$
$$y_1^{\cdot} = y_2,\ y_2^{\cdot} = ay_2 + v,\ y_1, y_2 \in E^s,\ \| v \| \leqslant 1,\ a < 0$$

Множество M_i^* состоит из пар $\{x_{1i}, y_1\}$, таких, что $x_{1i} = y_1$. Ограничения на геометрические координаты (y_1) убегающего имеют вид (6.2).

Положим

$$z_{1i} = x_{1i} - y,\ z_{2i} = x_{2i} - y,\ i \in N_k,\ z_{1i} = y_1,\ z_{2i} = y_2,\ i \in N_m \setminus N_k$$

Применим схему п. 1. Условие 1 выполнено с $\varepsilon_i(t) \equiv 1,\ i \in N_k$. При этом $\varphi_i(t) \equiv 0$, а

$$\xi_i(t, z_i^\circ) = z_{1i}^\circ + e_1(t)\, z_{2i}^\circ,\quad i \in N_m$$

$e_1(t) = a^{-1}(1 - \exp(-at))$ ([11], с. 252).

В силу леммы 1

$$\alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v) = e_1(t-\tau)\, \alpha_i(\xi_i(t, z_i^\circ), v),\quad \xi_i(t, z_i^\circ) \neq 0,\quad i \in N_k$$

$$\alpha_i(t, \tau, z_i^\circ, v) = \frac{(p_i,\ e_1(t-\tau)\, v)}{l_i - (p_i,\ y_1^\circ + e_1(t)\, y_2^\circ)},\quad \xi_i(t, z_i^\circ) \neq l_i p_i,\quad i \in N_m \setminus N_k$$

Обозначим

$$z_i^* = z_{1i}^\circ + 1/a z_{2i} = \lim_{t\to\infty} \xi_i(t, z_i^\circ),\quad i \in N_k$$

$$y^* = y_1^\circ + 1/a y_2^\circ = \lim_{t\to\infty} \xi_i(t, z_i^\circ),\quad i \in N_m \setminus N_k$$

$$\alpha(z^\circ) = \max_{i \in N_m} \min_{\|v\| \leqslant 1} \left\{ \alpha_i(z_i^*, v),\ \frac{(p_i, v)}{l_i - (p_i, y^*)} \right\},\quad l_i \neq (p_i, y^*)$$

Условие $\alpha(z^\circ) > 0$ является достаточным для завершения группового преследования. Управления преследователей имеют вид, указанный в [3] (пример 3).

Примеры 1, 2 представляют собой решения задач типа «крыса в углу», «игра с линией смерти», «лев и человек» [12] в данной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: 1981. 287 с.
3. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями.— Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 3, с. 530—535.
4. *Григоренко Н. Л.* К линейной задаче преследования несколькими объектами.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 2, с. 275—279.
5. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 4, с. 785—789.
6. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Матем. сб., 1980, т. 112, вып. 3, с. 307—330.
7. *Пшеничный Б. Н.* Линейные дифференциальные игры.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 1, с. 65—78.
8. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
9. *Чикрий А. А.* Нелинейная задача об уклонении от встреч с терминальным множеством сложной структуры.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 3—11.
10. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А.* Дифференциальная игра уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1977, № 1, с. 3—8.
11. *Понтрягин Л. С.* К теории дифференциальных игр.— Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 4, с. 219—274.
12. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.; Мир, 1967. 479 с.

Киев

Поступила в редакцию
16.II.1982