Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 62—50

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АПРИОРНЫХ МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНОК

Покотило В. Г.

Изучаются свойства априорных минимаксных оценок [1, 2] неизвестного начального состояния линейного динамического объекта при условии, что измерения производятся в дискретные моменты времени, а шумы присутствуют только в канале измерителя и моделируются независимыми случайными величинами.

Работа продолжает исследования, начатые в [3].

1. Предварительные замечания. Предположим, что в дискретные моменты времени $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $(\tau > 0)$ наблюдается процесс

$$y_k = Bx(t_k) + w_k \tag{1.1}$$

где $x(t)$ — фазовый вектор линейной системы

$$x^{\bullet} = Ax,\ t \geqslant 0,\ x(0) = z \in R^n \tag{1.2}$$

Здесь A и B — постоянные $(n \times n)$- и $(m \times n)$-матрицы, w_k, $k = 0, 1, \ldots$ — независимые случайные величины, заданные на пространстве элементарных событий $\{\Omega, \Sigma, P\}$ в $\{R^m, \Delta\}$, Δ — борелевская σ-алгебра множеств из R^m.

Начальное состояние z неизвестно.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — собственные числа матрицы A кратности $k_1, \ldots, k_r$ соответственно и h_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, k_i$ — векторы серии относительно матрицы A с собственным значением λ_i, так, что [4]

$$Ah_{i1} = \lambda_i h_{i1}, \quad Ah_{i2} = \lambda_i h_{i2} + h_{i1}, \ldots,$$
$$Ah_{ik_i} = \lambda_i h_{ik_i} + h_{ik_i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

Будем считать, что

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_u < 0 = \operatorname{Re}\lambda_{u+1} = \ldots = \operatorname{Re}\lambda_{u+p} <$$
$$< \operatorname{Re}\lambda_{u+p+1} \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_r$$

и через Ψ, Ψ' обозначим множества

$$\Psi = \{\psi \in R^n : \|\psi\| = 1,\ \psi h_{ij} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, u\},\ \Psi' = \{\psi \in \Psi : \psi = \alpha B + a\psi',$$
$$\alpha \in R^m,\ a \in R',\ \psi' h_{i1} = 0,\ i = u + 1, u + 2, \ldots, u + p\} \tag{1.3}$$

Строчными греческими буквами будем обозначать векторы-строки соответствующих размерностей в отличие от векторов-столбцов, для обозначения которых используются строчные латинские буквы.

Оценка $z(\psi, N)$ скалярной величины ψz, $\psi \in R^n$, $\|\psi\| = 1$ по N наблюдениям вида (1.1) реализуется в виде линейного функционала

$$z(\psi, N) = \varphi[y^N] = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i y_i, \quad y^N = (y_0, \ldots, y_N) \tag{1.4}$$

Как показано в [1], наилучшая в смысле минимакса операция $\varphi[\cdot]$ в предположении, что возможная область изменения помехи оценивается неравенством $\rho[w^N] \leqslant 1$, где $w^N = (w_0, \ldots w_N)$ и $\rho[\cdot]$ — норма в (mN)-мерном пространстве $\{w^N\}$, определяется решением следующей задачи (проблемы моментов):

$$\rho^*[\varphi] \to \inf; \quad \sum_{i=0}^{N} \varphi_i B\Phi(i\tau) = \psi \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица (1.2), а $\rho^*[\cdot]$ — сопряженная норма, т. е. норма, обычным образом введенная в пространстве линейных функционалов над $\{w^N, \rho[\cdot]\}$.

Часто в качестве $\rho[\cdot]$ используют следующие нормы ($\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^m):

$$\rho_q[w^N] = \left(\sum_{k=0}^{N} \|w_k\|^q\right)^{1/q}, \qquad q = 1, 2$$

$$\rho_\infty[w^N] = \max\{\|w_k\| : 0 \leqslant k \leqslant N\}$$

Обозначим через $z_q(\psi, N)$ минимаксную оценку, соответствующую норме $\rho_q[\cdot]$, $q = 1, 2, \infty$.

Далее изучаются асимптотические свойства $z_q(\psi, N)$ при $N \to \infty$.

2. Основные утверждения. *Теорема* 1. Пусть пара (A, B) наблюдаема, $\mathbf{M}[w_k] \equiv 0$, $\mathbf{M}[w_k w_k^*] \equiv d^2 I$ (I — единичная матрица, звездочка означает транспонирование). Тогда существует $\tau > 0$, такое, что для всех $\psi \in \Psi$ $z_q(\psi, N)$, $q = 1, 2$, — несмещенная и состоятельная оценка, т. е. $\mathbf{M}[z_q(\psi, N)] = \psi z$, и для любого $\varepsilon > 0$ имеем $P\{|z_q(\psi, N) - \psi z| \geqslant \varepsilon\} \to \to 0$ при $N \to \infty$.

Аналогичное утверждение для $q = \infty$, вообще говоря, несправедливо. Однако если δ_* — значение нижней грани в (1.5) при $\rho[\cdot] = \rho_\infty[\cdot]$, то имеет место

Теорема 2. Пусть система (A, B) наблюдаема, $\mathbf{M}[w_k] \equiv 0$ и $\mathbf{M}[w_k w_k^*]$ ограничено при $k = 0, 1, \ldots$.

Тогда существует $\tau > 0$ и для всех $\psi \in \Psi'$, $\varepsilon > 0$ найдется функционал φ_ε, такой, что $\rho_\infty^*[\varphi_\varepsilon] < \delta_* + \varepsilon$ и оценка (1.4) несмещенная, сильно состоятельная, т. е. с вероятностью единица

$$z_\varepsilon(\psi, N) = \varphi_\varepsilon[y^N] \to \psi z \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

Минимаксные оценки являются гарантированными и строятся в расчете на наихудшую реализацию помех без использования их статистических характеристик. Из теорем 1 и 2 следует, что если помехи имеют случайную природу, то они, тем не менее, обладают удовлетворительными свойствами (несмещенность, состоятельность).

Отметим, что множество Ψ охватывает наиболее интересные направления, так как, если $z = c_1\psi_1^* + c_2\psi_2^*$, $\psi_1 \in \Psi$ и $\psi_2\psi^* = 0$ для $\psi \in \Psi$, то $\Phi(t)z = c_1\Phi(t)\psi_1^* + \delta(t)$, $\|\delta(t)\| \leqslant C\exp(\operatorname{Re}\lambda_u t) \to 0$ при $t \to \infty$, $C = \mathrm{const}$.

Из условия наблюдаемости следует, что для всех $i = 1, 2, \ldots, r$ существует строка β матрицы B, такая, что $\beta h_{i1} \neq 0$.

3. Доказательство основных утверждений. Для краткости изложения теоремы 1 и 2 здесь подробно не доказываются. Ниже в виде последовательности утверждений приводится лишь схема доказательства.

Предположим для простоты, что $m = 1$, т. е. матрица B состоит из одной строки β. Переход к общему случаю можно осуществить разложением пространства в прямую сумму подпространств наблюдаемости, связанных со строками матрицы B.

1°. Пусть пара (A, β) наблюдаема. Рассмотрим систему уравнений

$$\beta\Phi\,((j-k)\,\tau)\,g_k = \delta_{jk}; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \; g_k \in R^n \tag{3.1}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, k фиксировано. Существует $\tau_* > 0$, такое, что при $\tau = l_s\tau_*$, $s = 1, 2, \ldots$ система (3.1) разрешима и ее решение допускает представление

$$g_k = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}^k(\tau)\,h_{ij}; \quad |c_{ij}^k(l_s\tau_*)| \leqslant \leqslant (l_s\tau_*)^{-(j-1)}G, \quad G = \mathrm{const}, \quad l_s/s \leqslant L < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Представление (3.2) можно получить непосредственно обращением матрицы системы (3.1), приведенной к новым переменным

$$c'_{ij} = \sum_{k=j}^{k_i} \frac{c_{ik}\,(\beta h_{ik-j+1})}{(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \ldots, k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

Воспользуемся указанными значениями τ_* и l_s, $s = 1, 2, \ldots$.

2°. Существуют $M > 0$ и разбиение $\{J_k\}$ множества $\{0, 1, \ldots, N\}$ на наборы J_k, $k = 1, 2, \ldots, K(N)$ по n индексов, такие, что $J_k \cap J_i = \phi$, $k \neq i$ и система уравнений

$$\sum_{i\in J_k} \varphi_i\beta\Phi\,(i\tau_*) = \psi, \; \psi \in \Psi \tag{3.3}$$

имеет решение

$$\varphi_i\colon |\varphi_i| \leqslant M, \quad i \in J_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K(N), \; N = 1, 2, \ldots$$

При этом разбиение $\{J_k\}$ можно выбрать таким образом, что $N/K(N) < < \infty$ при $N \to \infty$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим наборы

$$J_k = \{i = k + (j-1)\,l_K, \; j = 1, 2, \ldots, n\}, \quad k = 0, 1, \ldots, K$$

и будем искать решение (3.3) в виде

$$\varphi_i = \psi\Phi\,(-i\tau_*)\,g_i \tag{3.4}$$

Это приводит к системе уравнений (3.1) относительно g_i с $\tau = l_K\tau_*$. Оценка сверху для $|\varphi_i|$ следует, таким образом, из соотношений (3.2) и для завершения доказательства остается заметить, что для наборов J_k рассматриваемого вида $K(N) \geqslant \left[\dfrac{N}{1+nL}\right]$.

3°. Доказательство теоремы 1. Пусть

$$z_1(\psi, N) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i y_i = \varphi\,[y^N]$$

Так как $\rho_1{}^*[\cdot] = \rho_\infty[\cdot]$, то из 2° следует неравенство

$$|\varphi_i| \leqslant M\,(K(N))^{-1}, \; i = 0, 1, \ldots, N$$

$$\mathbf{M}\,[\,|z_1(\psi, N) - \psi z\,|^2] \leqslant M^2 d^2 N\,(K(N))^{-2}$$

Оценку $z_2(\psi, N)$ можно выписать в явном виде [1]. В условиях теоремы она совпадает с оценкой метода наименьших квадратов в общей невырожденной линейной модели Гаусса — Маркова [5—7]

$$\mathbf{M}\,[|z_2(\psi, N) - \psi z|^2] = d^2\psi\Big(\sum_{i=0}^{N} \Phi^*(i\tau_*)\,\beta^*\beta\Phi\,(i\tau_*)\Big)^{-1}\psi^* \leqslant \leqslant M^2 n\,(K(N))^{-1}$$

Последнее неравенство следует из утверждения 2°, так как для решения (3.3) справедливы соотношения

$$M^2 n \geqslant \sum_{i\in J_k} |\varphi_i|^2 = \psi\Big(\sum_{i\in J_k} \Phi^*(i\tau_*)\,\beta^*\beta\Phi\,(i\tau_*)\Big)^{-1}\psi^*$$

Утверждение теоремы 1 вытекает, таким образом, из неравенства Чебышева.

Несмещенность оценок — простое следствие несмещенности минимаксных оценок [1], выраженной вторым из соотношений (1.5)

4°. Пусть

$$u + p \geqslant 1, \quad \psi = \beta\,(\,\|\,\beta\,\|\,)^{-1}, \quad \rho\,[\cdot] = \rho_\infty\,[\cdot]$$

Тогда соотношения

$$(3.5) \qquad \varphi_0{}^\circ = (\|\,\beta\,\|)^{-1}, \quad \varphi_i{}^0 = 0, \; i = 1, 2, \ldots, N$$

определяют решение (1.5).

Действительно

$$\sum_{i=0}^{N} \varphi_i{}^\circ \beta \Phi\,(i\tau_*) = \psi$$

Предположим, что φ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ — решение (1.5). Тогда (см. [1])

$$\rho_\infty{}^*\,[\varphi] = \sum_{i=0}^{n} |\,\varphi_i\,| \geqslant \mu^{-1}, \qquad \mu = \inf_z \{\rho_\infty\,[(y^\circ)^N] : \psi z = 1\}$$

где $y_i{}^\circ$, $i = 0, 1, \ldots, N$ — идеальный сигнал, не содержащий помех.

Учитывая (1.1), (1.2), получим

$$\mu = \inf_z \{\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |\,\beta\Phi\,(i\tau)\,z\,| : \psi z = 1\} =$$

$$= \|\,\beta\,\| \inf_{c_{ij}} \Biggl\{ \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \Biggl| \sum_{k=1}^{r} \exp\,(\lambda_k i \tau_*) \sum_{j=1}^{k_i} c_{kj} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{k_i} \frac{(i\tau_*)^{j-l}}{(j-l)!}\, \psi h_{kl} \Biggr| : \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} c_{kj} \psi_{kj} = 1 \Biggr\} \leqslant \|\,\beta\,\|$$

5°. Пусть

$$\psi = a_1\,(\|\,\beta\,\|)^{-1}\,\beta + a_2 \psi' \in \Psi', \quad \rho\,[\cdot] = \rho_\infty\,[\cdot]$$

и $\varphi_i\,(T, N)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ — решение (1.5) при дополнительном предположении $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_T = 0$.

Тогда

$$\sum_{i=0}^{N} |\,\varphi_i\,(T, N)\,| = \sum_{i=T+1}^{N} |\,\varphi_i\,(T, N)\,| \to |\,a_1\,|\,(\|\,\beta\,\|)^{-1}, \quad N \to \infty$$

Действительно, из предложения 2° следует, что для каждого из наборов

$$J_{ks} = \{t = k + (j-1)\,l_s,\; j = 1, 2, \ldots, n\},\; k, s = 1, 2, \ldots$$

система (3.3) разрешима. Выбирая $k \geqslant T$ и учитывая (3.2), (3.4), для $N \geqslant k + nl_s$ получим

$$|\,a_1\,|\,(\|\,\beta\,\|)^{-1} \leqslant \sum_{i=0}^{N} |\,\varphi_i\,(T, N)\,| \leqslant |\,a_1\,| \sum_{t \in J_{ks}} \Biggl| \sum_{i=1}^{r} \exp\,(-\lambda_i t \tau_*) \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}(l_s \tau_*) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{j} \frac{(t\tau_*)^{j-m}}{(j-m)!}\,(\|\,\beta\,\|)^{-1} \beta h_{im} \Biggr| + |\,a_2\,| \sum_{t \in J_{ks}} \Biggl| \sum_{i=1}^{r} \exp\,(-\lambda_i t \tau_*) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}\,(l_s \tau_*) \sum_{m=1}^{j} \frac{(t\tau_*)^{j-m}}{(j-m)!}\, \psi' h_{im} \Biggr|$$

Используя (1.3) и (3.2), можно доказать, что при $s \to \infty$ первая из сумм в последнем выражении стремится к величине $(\|\,\beta\,\|)^{-1}$, а вторая — к нулю. Следовательно, справедливо утверждение 5°

6°. Доказательство теоремы 2. Основываясь на предыдущем утверждении, выберем последовательность N_k, $k = 1, 2, \ldots$ из условия

$$\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\varphi_i(N_k, N_{k+1})| < |a_1|(\|\beta\|)^{-1} + \varepsilon$$

Известно, что решение (1.5) при $\rho[\cdot] = \rho_\infty[\cdot]$ достигается на конечном наборе индексов. В данном случае можно взять не более чем n индексов [1, 2]. Обозначим через φ_{ki}, $i = 1, 2, \ldots, n$ ненулевые $\varphi_i(N_k, N_{k+1})$ и определим

$$\varphi_\varepsilon[y^N] = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ki}y_{ki}, \quad N_{K+1} \leqslant N \leqslant N_{K+2}$$

В силу утверждений 4° и 5°

$$\rho_\infty{}^*[\varphi_\varepsilon] = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_{ki}| < \delta_* + \varepsilon$$

Теорема 2 следует из несмещенности минимаксной оценки и усиленного закона больших чисел [8].

4. *Примеры.* Будем считать, что w_k, $k = 0, 1, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и ограниченной дисперсией.

1°. Пусть $n = 1, A = 0, B = 1$.

Рассмотренные в работе оценки определяются равенством

$$z_q(\psi, N) = \frac{1}{(N+1)}\sum_{k=0}^{N} y_k = z + \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} w_k$$

(в случае $q = \infty$ решение неединственно).

2°. Рассмотрим малые колебания математического маятника. В этом случае

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \beta = \|1, 0\|, \quad \beta\Phi(k\tau) = \|\cos k\tau, \sin k\tau\|$$

Если $\psi = \|\psi^1, \psi^2\|$ и $\tau = \tau_* = {}^1/_2\pi$, то

$$z_1(\psi, 2K-1) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}((-1)^i\psi^2 y_{2i+1} + (-1)^{i+1}\psi^1 w_{2i}) =$$

$$= \psi z + \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}((-1)^i\psi^2 w_{2i+1} + (-1)^{i+1}\psi^1 y_{2i})$$

3°. Для равномерного движения по прямой

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \beta = \|1, 0\|, \quad \beta\Phi(t) = \|1, t\|, \quad \tau = 1$$

получим следующее выражение для оценки наименьших квадратов:

$$z_2(\psi, N) = \sum_{t=0}^{N}\varphi_t y_t = \sum_{t=0}^{N}\psi R(N)\,\Phi^*(t)\,\beta^* y_t$$

$$R(N) = \left(\sum_{t=0}^{N}\Phi^*(t)\,\beta^*\beta\Phi(t)\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{2(2N+1)}{(N+1)(N+2)} & -\dfrac{6}{(N+1)(N+2)} \\ -\dfrac{6}{(N+1)(N+2)} & \dfrac{12}{N(N+1)(N+2)} \end{Vmatrix}$$

Минимаксные оценки начального положения ($\psi = \psi_1 = \|1,0\|$) и скорости ($\psi = \psi_2 = \|0, 1\|$) в случае $q = \infty$ определены соотношениями

$$z_\infty(\psi_1, N) = \varphi^1[y^N] = y_0, \quad z_\infty(\psi_2, N) = \varphi^2[y^N] = \frac{y_N - y_0}{N}$$

и не являются состоятельными.

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим последовательности натуральных чисел m_i и k_i, $i = 1, 2$, $m, k = 1, 2, \ldots$ таким образом, чтобы $(m_2 - m_1)^{-1} < \varepsilon$, $2k_1 (k_2 - k_1)^{-1} < \varepsilon$. Тогда для $N \geqslant \max \{m_i;\ k_i,\ i = 1, 2,\ m = 1, 2, \ldots, M,\ k = 1, 2, \ldots, K\}$ равенства

$$z_\infty^\varepsilon (\psi^1, N) = \varphi_\varepsilon^1 [y^N] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \frac{k_2 y_{k_1} - k_1 y_{k_2}}{k_2 - k_1}$$

$$z_\infty^\varepsilon (\psi^2, N) = \varphi_\varepsilon^2 [y^N] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{y_{m_2} - y_{m_1}}{m_2 - m_1}$$

дают сильно состоятельные, в рассматриваемых условиях, оценки начального положения и скорости объекта, причем

$$\rho_\infty^* [\varphi_\varepsilon^s] < \rho_\infty^* [\varphi^s] + \varepsilon, \quad s = 1, 2$$

Автор благодарит Б. Н. Пшеничного за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теории управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. *Пшеничный Б. Н.*, *Покотило В. Г.* О задаче наблюдения линейного объекта.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 212—217.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд-е 2-е. М.: Физматгиз, 1962. 349 с.
6. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.
7. *Петров В. В.* О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах.— Успехи матем. наук, 1954, т. 9, № 159, с. 41—62.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 414 с.

Киев

Поступила в редакцию
5.VI.1981