Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 62—50

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Логинов М. И.

Рассматривается игровая задача сближения [1, 2] на заданном отрезке времени для управляемых объектов, динамика которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что плата игры — выпуклая и дифференцируемая в некоторой области функция от разности конечных состояний объектов. При определенных условиях обосновывается процедура формирования экстремальной стратегии одного из игроков, гарантирующая ему результат игры, не худший, чем в соответствующей программной задаче на максимин для начальной позиции. На примере показывается, что в случае нелинейных систем описываемая в статье процедура построения оптимальной стратегии охватывает некоторые нерегулярные ситуации, в которых неприменимо правило экстремального прицеливания, разработанное для линейных [1] и нелинейных [3] управляемых систем. В случае линейных систем найденные в статье условия обеспечивают регулярность игровой задачи сближения и, как показано в работе [4], предлагаемый способ решения задачи сближения занимает промежуточное место между правилом экстремального прицеливания [1, 2] и прямыми методами в теории дифференциальных игр [2, 5].

1. Рассмотрим движения $y(t)$ и $z(t)$ управляемых объектов, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями

$$y^{\cdot} = f^{(1)}(t, y) + q^{(1)}(t, u),\ u \in P,\ y \in R^n \tag{1.1}$$
$$z^{\cdot} = f^{(2)}(t, z) + q^{(2)}(t, v),\ v \in Q,\ z \in R^n$$

(множества P и Q — компакты в R^p и R^q соответственно).

Полагаем, что движения $y(t)$ и $z(t)$ рассматриваются на заданном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ и плата определена равенством

$$\gamma[\vartheta] = \sigma(\{z(\vartheta)\}_m - \{y(\vartheta)\}_m) = \sigma(x(\vartheta))$$

где $\sigma(x)$ — заданная функция векторного аргумента x; $\{z\}_m$, $\{y\}_m$ — векторы, составленные из первых m компонент векторов z и y.

Первый (второй) игрок, распоряжающийся выбором управления $u \in P$ $(v \in Q)$, стремится минимизировать (максимизировать) величину $\gamma[\vartheta]$.

Обозначим через $U(\cdot \mid t, \vartheta)$ и $V(\cdot \mid t, \vartheta)$ множества измеримых по Борелю функций $u(\cdot): T \to P$ и $v(\cdot): T \to Q$, где $T = [t, \vartheta]$; через $y(\tau; t, y, u(\cdot))$ и $z(\tau; t, z, v(\cdot))$, $\tau \in T$ — решения уравнений (1.1), порождаемые управлениями $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ при начальных условиях $y(t) = y$, $z(t) = z$. Пусть

$$\rho_1(t, \vartheta, y, l) = \sup_{U(\cdot \mid t, \vartheta)} l' \{y(\vartheta; t, y, u(\cdot))\}_m \tag{1.2}$$
$$\rho_2(t, \vartheta, z, l) = \sup_{V(\cdot \mid t, \vartheta)} l' \{z(\vartheta; t, z, v(\cdot))\}_m$$

где l — произвольный ненулевой m-мерный вектор, штрих означает транспонирование.

Условие 1. А. Функции $f^{(i)}$, $q^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ непрерывны по всем переменным, а функции $f^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ непрерывно дифференцируемы по переменным y и z соответственно и удовлетворяют условиям

$$x' f^{(i)}(t, x) \leqslant c(\|x\|^2 + 1) \quad (i = 1, 2;\ c = \mathrm{const})$$

Б. Функция $\sigma(x)$ выпукла, имеет непрерывные и равномерно ограниченные производные в области $G = \{x \mid \sigma(x) > \inf_z \sigma(z)\}$.

В. При всех $t \in [t_0, \vartheta]$ множества

$$Q_1(t) = \{q^{(1)} \mid q^{(1)} = q^{(1)}(t, u), \quad u \in P\}, \quad Q_2(t) = \{q^{(2)} \mid q^{(2)} = q^{(2)}(t, v), \ v \in Q\}$$

выпуклы.

Г. Каков бы ни был единичный вектор l, максимум в правых частях равенств (1.2) достигается на единственном программном движении $\{y^\circ(\tau; t, y, l), z^\circ(\tau; t, z, l)\}$, порождаемом вектор-функциями $\{q^{(1)}(\tau; u^\circ(\tau; t, y, l)), q^{(2)}(\tau; v^0(\tau; t, z, l))\}$.

Отметим, что при выполнении условия 1 области достижимости $G_1(t, \vartheta, y)$ и $G_2(t, \vartheta, z)$ движений $\{y(\tau; t, y, u(\cdot))\}_m$ и $\{z(\tau; t, z, v(\cdot))\}_m$, отвечающие начальной позиции $\{t, y, z\}$, к моменту времени $\tau = \vartheta$ — выпуклые компакты в R^m [3], а величины ρ_1 и ρ_2 — опорные функции множеств G_1 и G_2.

Пусть $\omega(l)$ — функция, сопряженная [6, 7] выпуклой функции $\sigma(x)$, т. е. $\omega(l) = \sup_x \{l'x - \sigma(x)\}$ и $L = \operatorname{dom} \omega(\cdot) = \{l \in R^m \mid \omega(l) < \infty\}$. В силу условия 1 Б справедливо равенство [6]

$$\sigma(x) = \max_{l \in L} \{l'x - \omega(l)\}$$

Введем в рассмотрение величину программного максимина для начальной позиции $\{t_0, y_0, z_0\}$

$$\varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0) = \max_{z(\vartheta)} \min_{y(\vartheta)} \sigma(\{z(\vartheta)\}_m - \{y(\vartheta)\}_m) = \max_{z(\vartheta)} \min_{y(\vartheta)} \max_{l} \{l'\{z(\vartheta)\}_m - l'\{y(\vartheta)\}_m - \omega(l)\}$$

$$\{y(\vartheta)\}_m \in G_1(\vartheta; t_0, y_0), \ \{z(\vartheta)\}_m \in G_2(\vartheta; t_0, z_0), \ l \in L$$

Сопряженная функция $\omega(l)$ выпукла, поэтому на основании общей теоремы о минимаксе [8] можем записать

$$\varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0) = \max_{l \in L} \{\rho_2(l, \vartheta, t_0, z_0) - \rho_1(l, \vartheta, t_0, y_0) - \omega(l)\} \tag{1.3}$$

Условие 2. Пусть $L^\circ = L^\circ(t_0, y_0, z_0)$ — множество векторов l, на которых достигается максимум в правой части равенства (1.3). Существует по крайней мере один ненулевой вектор $l^\circ = l^\circ(t_0, y_0, z_0) \in L^\circ$, такой, что

А. Для любой позиции $\{t, y, z\}$ существуют непрерывные по всем переменным производные

$$\partial y^\circ(\vartheta, t, y, l^\circ) / \partial y = Y[\vartheta; t, y, l^\circ], \quad \partial z^\circ(\vartheta, t, z, l^\circ) / \partial z = Z[\vartheta; t, z, l^\circ]$$

Б. Функция

$$\varkappa(l, t, y, z) = \max_{u \in P} l'\{Y[\vartheta; t, y, l^0]\}' q^{(1)}(t, u) - \max_{v \in Q} l'\{Z[\vartheta; t, z, l^\circ]\}_m' q^{(2)}(t, v) \tag{1.4}$$

выпукла по l при всех $\{t, y, z\}$, где $\{Y\}_m$ и $\{Z\}_m$ — матрицы размерности $n \times m$, составленные из первых m колонок матриц Y и Z.

В. Для любых абсолютно непрерывных функций $y(t)$ и $z(t)$ при почти всех t $(t \in [t_0, \vartheta])$ максимумы в равенствах

$$l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta; t, y(t), l^\circ]\}_m' q_*^{(1)} = \max_{q \in Q_1(t)} l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta; t, y(t), l^\circ]\}_m' q$$

$$l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta; t, z(t), l^\circ]\}_m' q_*^{(2)} = \max_{q \in Q_2(t)} l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta; t, z(t), l^\circ]\}_m' q$$

достигаются на единственных векторах $q_*^{(1)} = q_*^{(1)}(t, y(t), l^0)$ и $q_*^{(2)} = q_*^{(2)}(t, z(t), l^0)$.

В общем случае проверка условий 1 и 2 для нелинейных систем затруднительна. Однако можно указать требования к системе первого приближения, которые обеспечивают выполнение условий 1 и 2 для квазилинейных управляемых объектов

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad & y^{\cdot} = A^{(1)}(t)y + B^{(1)}(t)u + \lambda f^{(1)}(y, t), \quad \|y\| \leqslant \mu \\
& z^{\cdot} = A^{(2)}(t)z + B^{(2)}(t)v + \lambda f^{(2)}(z, t), \quad \|v\| \leqslant \nu
\end{aligned}
$$

где λ — малый параметр, $f^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ непрерывны по $t \in [t_0, \vartheta]$ и дважды непрерывно дифференцируемы по фазовым переменным.

Пусть $Y[\vartheta, t]$ и $Z[\vartheta, t]$ — фундаментальные матрицы линейных однородных систем, отвечающих уравнениям (1.5) при $\lambda = 0$, $u = v = 0$. Тогда условия 1 и 2 можно заменить [9] следующими двумя требованиями:

1) каков бы ни был единичный вектор l, функции

$$\xi^{(1)}(t) = \| l' \{Y[\vartheta, t] B^{(1)}(t)\}_m \|, \quad \xi^{(2)}(t) = \| l' \{Z[\vartheta, t] B^{(2)}(t)\}_m \|$$

обращаются в нуль лишь в конечном числе точек $t_j^{(i)}$ ($t_j^{(i)}$ из отрезка $[t_0, \vartheta]$), причем

$$|d\xi^{(i)}/dt|_{t=t_j^{(i)}} \geqslant k > 0 \quad (k = \mathrm{const}, i = 1, 2)$$

2) функция

$$
\begin{aligned}
\varkappa(l, t) = & \max_{\|u\| \leqslant \mu} l' \{Y[\vartheta, t] B^{(1)}(t)\}_m u - \\
& - \max_{\|v\| \leqslant \nu} l' \{Z[\vartheta, t] B^{(2)}(t)\} v
\end{aligned}
$$

для любых двух векторов l_1 и l_2 $(l_1 \neq Rl_2, R = \mathrm{const})$ удовлетворяет неравенству

$$\varkappa(l_1, t) + \varkappa(l_2, t) > \varkappa(l_1 + l_2, t), \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]$$

Допустимую стратегию U первого игрока будем определять как многозначное отображение, сопоставляющее с каждой возможной позицией $\{t, y, z\}$ множество $U(t, y, z) \subset P$, полунепрерывное сверху по включению. Функция $q^{(1)}$ непрерывна, поэтому выпуклая замкнутая оболочка множества

$$Q_1(t, y, z, U) = \{q^{(1)} \mid q^{(1)} = q^{(1)}(t, u), u \in U(t, y, z)\}$$

будет также полунепрерывной сверху по включению. Под движениями $y[t]$ будем понимать решения соответствующих уравнений в контингенциях [1, 2, 10]. Пусть $Y(t_0, y_0, z_0 U)$ и $Z(t_0, z_0)$ — множества решений, отвечающие начальной позиции $\{t_0, y_0, z_0\}$, уравнений в контингенциях

$$y^{\cdot} \in f^{(1)}(t, y) + \mathrm{co}\, Q_1(t, y, z, U), \quad z^{\cdot} \in f^{(2)}(t, z) + Q_2(t)$$

Задача. Требуется найти допустимую стратегию U^0 первого игрока, которая обеспечивает равенство

$$
\begin{aligned}
& \max_{y[\cdot]} \max_{z[\cdot]} \{\sigma(\{z[\vartheta]\}_m - \{y[\vartheta]\}_m) \mid y[\cdot] \in Y(t_0, y_0, z_0, U^0), \\
& z[\cdot] \in Z(t_0, z_0)\} = \min_U \mathrm{Idem}\,(U^0 \to U)
\end{aligned}
$$

Здесь и далее Idem в правой части равенства означает выражение, совпадающее с левой частью этого равенства при указанной в скобках замене символов.

2. Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t, y, z) = \sigma(x(\vartheta, t, y, z, l^\circ)) = \sigma(\{z^\circ(\vartheta, t, z, l^\circ)\}_m - \{y^0(\vartheta, t, y, l^\circ)\}_m)$$

где $l^\circ = l^\circ(t_0, y_0, z_0)$ — вектор, фигурирующий в условии 2.

Определение. Пусть m-мерный вектор $s(t, y, z)$ определяется равенством

$$s(t, y, z) = -\partial\sigma(x(\vartheta; t, y, z, l^\circ))/\partial x$$

Множество $U^*(t, y, z)$, задающее стратегию U^*, состоит из всех векторов $v^* \in P$, для которых выполняется условие

$$s'(t, y, z)\{Y[\vartheta; t, y, l^\circ]\}_m' q^{(1)}(t, u^*) = \min_{u \in P} \operatorname{Idem}(u^* \to u)$$

Теорема. Если выполнены условия 1 и 2, то стратегия, построенная в соответствии с определением, гарантирует первому игроку результат

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U^*) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0)]$$

и, следовательно, является оптимальной стратегией, разрешающей задачу.

Доказательство. Пусть реализовалась позиция $\{t, y[t], z[t]\}$, причем $x(\vartheta; t, y[t], z[t], l^\circ) \in G$. Из условия 2 следует, что существуют производные

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} = -\{Y[\vartheta; t, y, l^\circ]\}_m \frac{\partial\sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = \{Z[\vartheta; t, z, l^\circ]\} \frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

Оценим приращение функции $\varepsilon[\tau] = \varepsilon(\tau, y[\tau], z[\tau])$ на отрезке $[t, t + \Delta t]$. Запишем его в виде $\Delta\varepsilon = \delta_1 + \delta_2$

$$\delta_1 = \varepsilon(t + \Delta t, y[t + \Delta t], z[t + \Delta t]) - \varepsilon(t + \Delta t, y[t], z[t])$$

$$\delta_2 = \varepsilon(t + \Delta t, y[t], z[t]) - \varepsilon(t, y[t], z[t])$$

С учетом непрерывности производных $\partial\varepsilon/\partial\varepsilon$ и $\partial\varepsilon/\partial z$ по $\{t, y, z\}$ имеем

$$\delta_1 = s'(t, y[t], z[t])\{Y[\vartheta; t, y[t], l^\circ]\}_m' \times \int_t^{t+\Delta t} [f^{(1)}(\tau, y[\tau]) + q_1[\tau]]\,d\tau - s'(t, y[t], z[t])\{Z[\vartheta; t, z[t], l^\circ]\}_m' \times \int_t^{t+\Delta t} [f^{(2)}(\tau, z[\tau]) + q^{(2)}(\tau, v[\tau])]\,dr + o(\Delta t); \tag{2.1}$$

$$q_1[\tau] \in \operatorname{co} Q_1(\tau, y[\tau], z[\tau], U)$$

Учитывая единственность программных движений $y^\circ(\cdot\ t, y, l^\circ)$ и $z^\circ(\cdot\ t, z, l^\circ)$, получим

$$\delta_2 = \varepsilon(t + \Delta t, y[t], z[t]) - \varepsilon(t + \Delta t, y^0(t + \Delta t; t, y[t], l^\circ), z^\circ(t + \Delta t; t, z[t], l^\circ)) = -s'(t, y[t], z[t])\{Y[\vartheta; t, y[t], l^\circ]\}_m' \int_t^{t+\Delta t} [f^{(1)}(\tau, y^\circ(\tau; t, y[t], l^\circ)) + q^{(1)}(\tau; u^\circ(\tau; t, y[t], l^\circ))]\,d\tau + s'(t, y[t], z[t])\{Z[\vartheta; t, z[t], l^\circ]\}_m \times \int_t^{t+\Delta t} [f^{(2)}(\tau, z^\circ(\tau; t, z[t], l^\circ)) + q^{(2)}(\tau, v^\circ(\tau; t, z[t], l^\circ))]\,d\tau + o(\Delta t) \tag{2.2}$$

Функция $\varkappa(l, t, y, z)$ (1.4) выпукла по l и положительно однородна, поэтому она является опорной функцией непустого выпуклого множества [2]

$$H(t, y, z) = \bigcap_{v \in Q} [\{Y[\vartheta; t, y, l^\circ]\}_m' Q_1(t) - \{Z[\vartheta; t, z, l^\circ]\}_m' q^{(2)}(t, v)]$$

Опираясь на принцип максимума Л. С. Понтрягина и результаты работы [3] (либо на метод динамического программирования), с учетом условия 2В можно показать, что при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливо включение

$$h^\circ(t, y[t], z[t]) = \{Y[\vartheta; t, y[t], l^\circ]\}_m' q_*^{(1)} - \{Z[\vartheta; t, z[t], l^\circ]\}_m' q_*^{(2)} \in H(t, y[t], z[t])$$

где $q_*^{(1)} = q_*^{(1)}(t, y, [t], l^\circ)$, $q_*^{(2)} = q_*^{(2)}(t, z[t], l^\circ)$ удовлетворяют условию 2В.

Из (2.1) и (2.2), непрерывности вектора s, матриц Y и Z и того, что вектор функции $q^{(1)}(\tau, u^\circ(\tau; t, y[t], l^\circ))$ и $q^{(2)}(\tau; v^\circ(\tau; t, z[t], l^\circ))$ удовлетворяют условиям максимума, получим

$$\Delta\varepsilon = \int_t^{t+\Delta t} s'(\tau, y[\tau], z[\tau])[\{Y[\vartheta; \tau, y[\tau], l^\circ]\}_m' q_1[\tau] - \{Z[\vartheta; \tau, z[\tau], l^\circ]\}_m' q^{(2)}(\tau, v[\tau]) - h^\circ(\tau, y[\tau], z[\tau])]\,d\tau + o(\Delta t)$$

Далее, учитывая вид множества $H(\tau, y[\tau], z[\tau])$, заключаем, что по любой реализации $v[\tau]$ найдется такое $q = q(\tau)$, что

$$\Delta\varepsilon = \int_t^{t+\Delta t} s'(\tau, y[\tau], z[\tau])\{Y[\vartheta; \tau, y[\tau], l^\circ]\}_m'(q_1[\tau] - q(\tau))d\tau + o(\Delta t)$$

$$q(\tau) \in Q_1(\tau)$$

Таким образом, выбирая $U = U^*$, получим, что $\varepsilon[t]$ на отрезке $[t_0, \vartheta]$ не возрастает. Учитывая теперь, что по построению вспомогательной функции $\varepsilon[t]$ имеют место равенства

$$\varepsilon[t_0] = \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0)$$

$$\varepsilon[\vartheta] = \sigma(\{z[\vartheta]\}_m - \{y[\vartheta]\}_m$$

приходим к выводу о справедливости утверждения теоремы.

Отметим, что если функция $\varkappa(l, t, y, z)$ вогнута по l при всех (t, y, z) то, поменяв в предыдущих рассуждениях ролями u и v, можно получить стратегию V^*, гарантирующую второму игроку результат

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, V^*) \geqslant \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0)$$

3. *Пример.* Пусть поведение преследующего и преследуемого объектов описывается уравнениями

$$y_1^\cdot = y_2,\ y_2^\cdot = \lambda y_2^3 + u_1,\ y_3^\cdot = y_4,\ y_4^\cdot = \lambda y_4^3 + u_2$$

$$u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mu^2,\ z_1^\cdot = z_2,\ z_2^\cdot = \lambda z_2^3 + v_1,\ z_3^\cdot = z_4$$

$$z_4^\cdot = \lambda z_4^3 + v_2,\ v_1^2 + v_1^2 \leqslant \nu^2$$

и пусть

$$\gamma[\vartheta] = [(y_1(\vartheta) - z_1(\vartheta))^2 + (y_3(\vartheta) - z_3(\vartheta))^2]^{1/2},\ \lambda > 0$$

Обозначим $\rho_1(l, t, y)$ и $\rho_2(l, t, z)$ опорные функции областей достижимости $G_1(\vartheta, t, y)$ и $G_2(\vartheta, t, z)$. Проведя необходимые вычисления, аналогично тому, как это сделано в [9], получим

$$\varphi(l, t, y, z, \lambda) = \rho_2(l, t, z) - \rho_1(l, t, y) = l_1(x_1 + (\vartheta - t)x_2 + \lambda(\vartheta - t)^2(z_2^3 - y_2^3)/2) + l_2(x_3 + (\vartheta - t)x_4 + \lambda(\vartheta - t)(z_4^3 - y_4^3)/2) + l_1^2[\lambda\alpha(\vartheta - t)^4/4 + \lambda(\vartheta - t)^3(z_2^2 - y_2^2)/2] + l_2^2[\lambda\alpha(\vartheta - t)^4/4 + \lambda(\vartheta - t)^3(z_4^2 - y_4^2)/2] + l_1^3\lambda(\vartheta - t)^4(z_2 - y_2)/4 + l_2^3\lambda(\vartheta - t)^4(z_4 - y_4)/4 + \lambda^2 R(l_1, l_2, y, z, \lambda)$$

$$(l_1^2 + l_2^2 = 1,\ x_i = z_i - y_i\ (i = 1, \ldots, 4),\ \mu = 1,\ \nu = 1 + \alpha(\vartheta - t)^2\lambda)$$

Выберем начальную позицию $\{t_0, y_0, z_0\}$ так, чтобы $t_0 = 0$, $y_{20} = y_{40}$, $z_{20} = z_{40}$, $y_{20} - z_{20} = a > 0$. Обозначим

$$c = \vartheta^4 a/4,\ b = \vartheta^3 (z_{20}^2 - y_{20}^2)/2 + \alpha\vartheta^4/4$$
$$a_1 = x_{10} + \vartheta x_{20} + \lambda\vartheta^2 (z_{20}^3 - y_{20}^3)/2$$
$$a_2 = x_{30} + \vartheta x_{40} + \lambda\vartheta^2 (z_{40}^3 - y_{40}^3)/2]$$

и выберем x_{10}, x_{30} так, чтобы

$$a_1 = {}^3/_4\, \lambda c - k_1\lambda^2,\ a_2 = {}^3/_4 \lambda c - k_2\lambda^2$$

где параметры k_1 и k_2 будут определены ниже. При сделанных предположениях

$$\rho_2 - \rho_1 = {}^3/_4\, \lambda c(l_1 + l_2) - \lambda c\,(l_1^3 + l_2^3) + \lambda b\,(l_1^2 + l_2^2) + \lambda^2 (R - k_1 l_1 - k_2 l_2)$$

Обозначим $l_1 = \cos\varphi$, $l_2 = \sin\varphi$, тогда

$$\varepsilon^\circ (t_0, y_0, z_0) = \max_{\|l\|=1} \{\rho_2 - \rho_1\} = \max_{\varphi} \Phi(\varphi, \lambda, k_1, k_2)$$

$$\Phi(\varphi, \lambda, k_1, k_2) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4} c \sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \lambda b + \lambda^2 (R - k_1\cos\varphi - k_2 \sin\varphi)$$

Сумма первых двух слагаемых максимальна при следующих значениях φ:

(3.1) $$\varphi^{(0)} = \frac{\pi}{4},\quad \varphi^{(1)} = \frac{11}{12}\pi,\quad \varphi^{(2)} = \frac{19}{12}\pi$$

и величина этого максимума равна $\lambda\sqrt{2}\,c/4 + \lambda b$. Используя теорему о неявных функциях, можно показать, что при достаточно малых λ найдутся параметры k_1 и k_2, такие, что функция Φ имеет ровно три локальных максимума при $\varphi^{(0)}(\lambda)$, $\varphi^{(1)}(\lambda)$, $\varphi^{(2)}(\lambda)$, отвечающих значениям (3.1) при $\lambda = 0$, и они равны. Величина $\varepsilon^\circ (t_0, y_0, z_0)$ будет положительна, если $\sqrt{2}\,c/4 + b > 0$ или, полагая $\alpha = (1 + 2\sqrt{2})\,a$, получим условие

(3.2) $$a\vartheta^3 \left[\frac{\sqrt{2}}{16}\vartheta - \frac{y_{20} + z_{20}}{2} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}\vartheta\right] > 0$$

Функция $\varkappa\,(l, t, y, z, \lambda)$, вычисленная для вектора $l^{(0)}(\lambda)$ ($l^{(0)}(0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$), будет иметь вид

$$\varkappa = \frac{\lambda(\vartheta - t)^2}{\sqrt{l_1^2 + l_1^2}} \Big[({}^3/_2 (y_2^2 - z_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\vartheta - t)(y_2 - z_2) -$$
$$- (1 + 2\sqrt{2})\, a\, (\vartheta - t))\, l_1^2 + ({}^3/_2 (y_4^2 - z_4^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\vartheta - t)(y_4 - z_4) -$$
$$- (1 + 2\sqrt{2})\, a\, (\vartheta - t))\, l_2^2 \Big] + o(\lambda)$$

Эта функция будет выпукла для всех реализаций $y[t]$, $z[t]$ $(0 \leqslant t < \vartheta)$, если a достаточно велико и

(3.3) $$y_{20} + z_{20} > \left[{}^2/_3 (1 + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}\right]\vartheta$$

Условия (3.2) и (3.3) будут выполнены, если $y_{20} + z_{20} = 2{,}09\,\vartheta$.

Таким образом, нашлась начальная позиция, для которой нет регулярности в смысле [1, 3], но метод, описанный в статье, остается применимым.

Автор благодарит Э. Г. Альбрехта и А. И. Субботина за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Батухтин В. Д.* О дифференцируемости цены дифференциальной игры сближения.— Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12, с. 2140—2148.

4. *Логинов М. И.* Об одной линейной игровой задаче наведения.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 593—598.
5. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования.— Матем. сб., 1980, т. 112, № 3, с. 307—330.
6. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
8. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 838 с.
9. *Альбрехт Э. Г.* О сближении квазилинейных объектов.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 577—586.
10. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сб., 1960, т. 51, № 1, с. 99—128.

Свердловск

Поступила в редакцию
8.I.1982