

Уравнение (18) имеет три стационарных решения  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pm f$ . Решение  $\gamma = 0$  ( $\theta = 1/2 \pi$ ) устойчиво при  $A > C$  и неустойчиво при  $A < C$ , а решения  $\gamma = \pm f$  ( $\theta = 0, \pi$ ) устойчивы при  $A < C$  и неустойчивы при  $A > C$ .

Угловая скорость прецессии  $\psi' = GA^{-1}$  остается постоянной при эволюции движения, а  $\gamma(t)$  задается неявным образом из соотношения  $\ln [(1 - \gamma^2) \gamma^{-2}] - \gamma^2 (1 - \gamma^2)^{-1} = -2\pi t + \ln [(1 - \gamma^2(0)) \gamma^{-2}(0)] - \gamma^2(0) (1 - \gamma^2(0))^{-1}$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. Вильке В. Г. Предельные движения системы тяжелое упругое твердое тело с неподвижной точкой. — Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1980, № 3, с. 79—83.
3. Лейбензон Л. С. Краткий курс теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1942. 304 с.
4. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами. — ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 34—42.
5. Вильке В. Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. — ПММ, 1980, № 3, вып. 3, с. 395—402.

Москва

Поступила в редакцию  
8.II.1982

УДК 532.516

### ДЕФОРМАЦИЯ КАПЛИ В ВЯЗКОМ ПОТОКЕ И УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕЕ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ

Бутов В. Г., Васенин И. М., Шрагер Г. Р.

Разностным методом получено решение задачи о неустановившемся движении капли в потоке с учетом ее деформации при условии осевой симметрии. Жидкости внутри и вне капли считаются вязкими и несжимаемыми. Представлены установившиеся формы капли при разных значениях числа Рейнольдса внешнего потока и числа Вебера. На основе анализа условия для нормальных напряжений на границе капли получено критическое значение числа Вебера, определяющее условие существования равновесной формы капли.

1. В сферической системе координат, связанной с осесимметричной каплей так, что начало координат совпадает с центром масс капли, а полярная ось (ось симметрии) направлена по потоку, система уравнений, описывающих течение внутри и вне капли, имеет вид (последнее уравнение — следствие первых двух и условия несжимаемости)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= \frac{2}{\text{Re}_k} \left\{ \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left( v_r + \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\sin \theta \partial \theta} \right) \right\} - \\ &- \kappa_k \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \frac{2}{\text{Re}_k} \left\{ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2 \sin^2 \theta} \right) \right\} - \\ &- \frac{\kappa_k}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \Delta P &= \frac{2}{r \kappa_k} \left\{ \frac{\partial (v_r, v_\theta)}{\partial (r, \theta)} + v_\theta \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \text{ctg}^2 \theta \right) - v_r \left( \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \right\} \\ \left( \text{Re}_k = \frac{2R_0 u_0 \rho_k}{\mu_k}, \kappa_k = \begin{cases} \rho_2 / \rho_1, & k = 1 \\ 1, & k = 2 \end{cases}, P = p + \frac{\omega}{\kappa_k} r \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Здесь  $r$  — безразмерная координата, выраженная в единицах радиуса  $R_0$  эквивалентной по объему сферической капли,  $\theta$  — полярный угол ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ),  $v_r, v_\theta$  — составляющие скорости, отнесенные к скорости  $u_0$  потока на бесконечности в начальный момент времени, индекс  $k = 1$  относится к внутренней области,  $k = 2$  — к внешней,  $P$  — модифицированное давление, отнесенное к  $\rho_2 u_0^2$ ,  $\omega$  — ускорение капли в потоке, отнесенное к  $u_0^2 / R_0$ .

На границе капли выполняются условия непрерывности нормальной и касательной составляющих вектора скорости, непрерывности касательного напряжения, равенство скачка нормального напряжения капиллярному давлению и кинематическое условие

$$(1.2) \quad [v_s] = 0, [v_n] = 0, [s\Pi n] = 0, [n\Pi n] = \frac{2}{We^{-1}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$We = 2\rho_2 u_0^2 R_0 / \gamma, \quad dr/dt = v_r, \quad d\theta/dt = v_\theta / r$$

Здесь  $s, n$  — единичные векторы, касательный и нормальный к границе капли ( $n$  направлен внутрь внешнего потока),  $\Pi$  — тензор напряжений,  $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $R_1, R_2$  — радиусы главных кривизн границы капли, отнесенные к радиусу сферической капли.

Вдали от капли для составляющих скорости используются условия

$$(1.3) \quad r \rightarrow \infty, \quad v_r = \cos \theta \left( 1 - \int_0^t \omega dt \right), \quad v_\theta = -\sin \theta \left( 1 - \int_0^t \omega dt \right)$$

На оси симметрии должны выполняться условия осевой симметрии. В начальный момент времени задаются форма капли и вектор скорости, который должен удовлетворять уравнению неразрывности, первым трем условиям (1.2) и условию (1.3). Для эквивалентности решения используемой системы уравнений (1.1) решению исходной системы уравнений Навье — Стокса и неразрывности требуется выполнение уравнения неразрывности на границах.

В локальной декартовой системе координат условие непрерывности касательного напряжения совместно с условием несжимаемости можно записать в виде [1], удобном для целей последующей разностной аппроксимации. В процессе решения задачи при изменении границы капли производится преобразование координат вида

$$\theta = \theta, \quad \eta = r \left( \frac{k_1}{R_3} - \left( \frac{k_1}{R_3} - \frac{1}{\delta} \right) \frac{R_3 - r}{R_3 - \delta} \right)$$

где  $k_1, R_3$  — постоянные,  $\delta(\theta, t)$  — функция, описывающая границу капли. В новых координатах граница капли представляет собой окружность единичного радиуса.

Условия непрерывности касательного напряжения совместно с условием несжимаемости и равенство скачка нормального напряжения капиллярному давлению в новых координатах записываются в виде

$$(1.4) \quad \left[ \mu \left( \left( a^\pm \eta_r' + \frac{a^\mp \eta_\delta' \delta_\theta'}{\delta} \right) \frac{\partial Q^\pm}{\partial \eta} + \frac{a^\mp}{\delta} \frac{\partial Q^\pm}{\partial \theta} + \frac{v_n \sin \varphi + v_s \cos \varphi}{\delta \sin \theta} \right) \right] = 0$$

$$\left[ -P + \frac{4}{\kappa Re} \left( \left( \eta_r' \cos \alpha - \frac{\eta_\delta' \delta_\theta'}{\delta} \sin \alpha \right) \frac{\partial v_n}{\partial \eta} - \frac{\sin \alpha}{\delta} \frac{\partial v_n}{\partial \theta} \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{We} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - Bo (1 - \kappa_1) \delta \cos \theta \right); \quad Bo = \frac{\omega \rho_1 R_0^2}{\gamma}$$

$$Q^\pm = v_s \pm v_n, \quad a^\pm = \cos \alpha \pm \sin \alpha, \quad \alpha = \theta - \varphi$$

где  $\varphi$  — угол между нормалью к границе капли и осью симметрии.

2. Задача решалась разностным методом. Для решения первых двух уравнений движения (1.1), записанных в новых координатах, использовались схемы переменных направлений. Уравнение для давления решалось методом установления, основанном на схеме переменных направлений. Запись условия непрерывности касательного напряжения совместно с условием несжимаемости в форме (1.4) позволяет использовать схемы бегущего счета для расчета составляющих вектора скорости на границе капли [1].

Общий порядок расчета заключается в следующем.

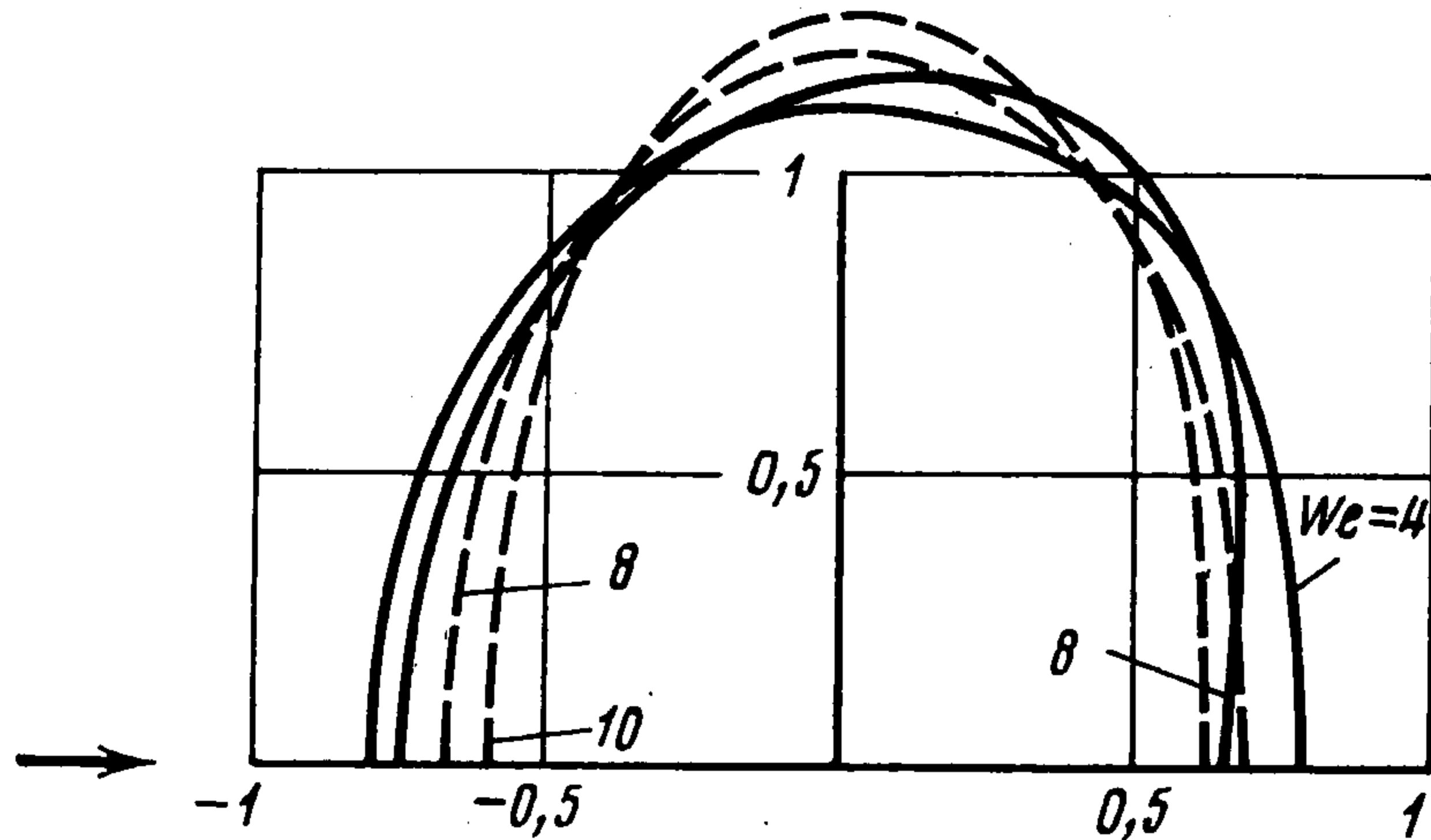
Находится решение уравнения для давления. Для получения давления на границе капли со стороны внешнего потока используется разностный аналог первого уравнения (1.1). Давление на границе капли со стороны внутреннего потока находится из разностного аналога второго из условий (1.4).

Находятся составляющие вектора скорости внутри капли и во внешнем потоке. При этом проводятся дополнительные итерации для согласования условий непрерывности на границе капли.

Определяется ускорение капли в потоке, пересчитываются составляющие вектора скорости вдали от капли и из разностного аналога кинематического условия определяется форма капли.

Описанным методом решалась задача о деформации первоначально сферической капли, помещенной в поток, движущийся на бесконечности со скоростью  $u_0$ . Безразмерные параметры, определяющие процесс, выбирались так, чтобы характерное время деформации капли и характерное время затухания ее колебаний за счет диссипации были много меньше характерного времени изменения разности скоростей между внешним потоком и центром масс капли. Во всех расчетах изменение разности скоростей за время деформации капли до максимального значения не превышало 7% относительно скорости в начальный момент времени.

На фигуре представлены формы деформированной капли в потоке  $Re_2 = 10$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 10$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 10$  (сплошные линии) и при  $Re_2 = 40$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 40$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 10$  (штриховые линии). Видно, что характер и степень деформации капли при одинаковых значениях числа Вебера зависят от числа Рейнольдса внешнего потока. Зависимость



отношения радиуса миделева сечения деформированной капли к начальному радиусу сферической капли от числа Вебера имеет вид]

$$R'/R_0 = 1 + 0,027 We$$

На основе результатов экспериментальных исследований при  $Re_2 = 100-700$  [2] была предложена [3] аналогичная зависимость с коэффициентом 0,03 при числе Вебера.

3. При  $We > 20$  установившуюся форму капли получить [не удалось. Покажем, что это может быть связано с невозможностью существования стационарной формы капли при таких числах Вебера. Для простоты рассмотрим сначала случай, в котором можно пренебречь силами инерции и вязкими силами движения внутри капли по сравнению с силами инерции набегающего потока. Упомянутые условия выполняются, если

$$(3.1) \quad \frac{\rho_1 u_1^2}{\rho_2 u_2^2} \sim \frac{\rho_1 \mu_2^2}{\rho_2 \mu_1^2} Re_2 \ll 1, \quad \frac{\mu_1 u_1}{2R_0 \rho_2 u_2^2} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_2}} \ll 1$$

В рассматриваемом случае внутри капли существенны лишь силы гидростатического давления, вызванные ускорением капли в потоке.

Так как из (3.1) следует  $Re_2 \gg 1$ , то в уравнении для разрыва нормальных напряжений будем пренебрегать вязкой составляющей нормального напряжения во внешнем потоке по сравнению с давлением. Поместим начало цилиндрических координат  $r$  и  $z$  в кормовой точке капли и направим ось  $z$  навстречу потоку. Тогда уравнение для разрыва нормальных напряжений запишется в виде

$$(3.2) \quad \mp \frac{1}{r} \frac{d}{dz} \frac{r}{\sqrt{1+r_z'^2}} - (1 - \kappa_1) Bo z + c = \frac{We}{2} P_2, \quad c = \frac{We}{2} P_{10}$$

где  $P_{10}$  — давление на границе капли при  $z = 0$ , знаки плюс и минус относятся к переднему и заднему фронтам капли. Если давление  $P_2(r)$  известно, то уравнение (3.2) вместе с дополнительными условиями симметрии и выражением для безразмерного объема

$$(3.3) \quad r_z' |_{z=0, r=0} = r_z' |_{z=z_0, r=0} = 0, \quad V = \frac{4}{3} \pi$$

позволяет определить стационарную форму капли.

Необходимое условие разрешимости задачи (3.2), (3.3) имеет следующий вид:

$$(3.4) \quad - (1 - \kappa_1) Bo \frac{4}{3} \pi = \frac{We}{2} \int_0^{r_1} (P_+ - P_-) r dr$$

где  $r_1$  — безразмерный радиус миделева сечения капли, индексы плюс и минус относятся к давлению на ее переднем и заднем фронтах. При больших числах  $Re_2$  ускорение и число  $Bo$  определяются только перепадом давления, возникающим при отрывном обтекании капли, и (3.4) сводится к уравнению движения центра масс капли. Следовательно, если ускорение, входящее в число  $Bo$ , находится из уравнения движения, то (3.4) выполняется.

Пусть при некоторых значениях параметров задачи известна функция  $P_2(r)$  и стационарная форма капли, удовлетворяющая (3.2) и (3.3). Придадим числам  $Bo$ ,  $We$  и функции  $P_2(r)$  малые приращения  $\delta Bo$ ,  $\delta We$  и  $\delta P_2(r)$ . Требуется найти новую равновесную поверхность, близкую к исходной. Для этого линеаризуем задачу (3.2), (3.3). Будем считать, что каждая точка  $X$  поверхности получила малое приращение  $\delta X$ , которое разложим на сумму векторов:  $\delta_1 X = nN$ , перпендикулярного к поверхности, и  $\delta_2 X$ , касательного к ней.

Зададим исходную поверхность в параметрическом виде  $r(s)$  и  $z(s)$ , выбрав за параметр  $s$  расстояние от рассматриваемой точки до одного из полюсов, отсчитываемое по дуге меридиана. Тогда для возмущения поверхности  $N(s)$  получим следующую задачу:

$$(3.5) \quad LN - \delta c_1 r = \frac{d}{ds} [rN_s'] + \left[ r \left( r_{ss}'' + z_{ss}'' \right) + \frac{r_s'^2}{r} + Bo(1 - \kappa_1) r r_s' \right] N - \delta c_1 r = \\ = - \left\{ \delta \left( \frac{We}{2} P_2 \right) + z \delta [(1 - \kappa_1) Bo] \right\} r; \quad \delta c_1 = \delta c + Bo(1 - \kappa_1) \delta r(0)$$

$$(3.6) \quad N_s' |_{s=0} = N_s' |_{s=s_0} = 0, \quad \int_0^{s_0} Nr ds = 0$$

( $s_0$  — расстояние по меридиану между полюсами).

Задачи, аналогичные (3.2), (3.3) и (3.5), (3.6), но с учетом течения в капле, использовались для нахождения формы капли в потоке при не слишком больших числах  $We$  и  $Bo$  [4,5].

Наряду с задачей (3.5), (3.6) рассмотрим соответствующую ей однородную краевую задачу. Предположим, что однородная задача при некотором выборе параметров течения, входящих в нее не только явно, но и неявно через форму капли, имеет нетривиальное решение  $\bar{N}(s)$ . В силу самосопряженности однородной и неоднородной краевых задач из формулы Грина вытекает, что неоднородная задача будет иметь решение лишь тогда, когда выполнено условие ортогональности решения  $\bar{N}(s)$  и правой части (3.5).

Решение однородной задачи  $\bar{N}(s)$  зависит лишь от формы капли и числа  $(1 - \kappa_1)Bo$  при исходных невозмущенных значениях параметров. В отличие от  $\bar{N}(s)$  возмущение  $\delta \left( \frac{1}{2} We P_2 \right) + z \delta [(1 - \kappa_1) Bo]$  зависит не только от формы капли, но и от возмущений потока на внешней границе. Такими возмущениями могут быть, например, изменения (в том числе неоднородные) скорости, плотности потока на бесконечности и др. Поэтому можно ожидать возникновения ситуаций, в которых не выполняется условие ортогональности решения  $\bar{N}(s)$  и правой части (3.5), и, следовательно, не будет существовать решение возмущенной задачи (3.5), (3.6). Более того, если оно все же выполняется, случайные стационарные отклонения во внешнем течении могут привести к его нарушению.

Однако из несуществования решения задачи (3.5), (3.6) еще не вытекает несуществование решения в исходной, нелинейной постановке. Кроме того, условия существования и устойчивости решения задачи (1.1)–(1.3) могут нарушиться прежде, чем будут достигнуты параметры, при которых не существует решения задачи (3.5), (3.6). Поэтому ответ на вопрос, что происходит на самом деле в этой «подозрительной» ситуации, необходимо искать в сравнении с численными расчетами и экспериментом.

Отметим, что аналогичный подход можно использовать для нахождения критической совокупности параметров в случае, когда на форму капли влияют внутреннее движение в капле и вязкость.

«Подозрительные» параметры определялись решением задачи (3.5), (3.6) численным методом [6].

Задача первой части этой статьи была исследована таким образом для случая  $Re_2 = 40$  относительно возмущений, вызванных приращением числа Вебера. Оказалось, что в этом случае однородная задача, соответствующая задаче (3.5), (3.6), имеет нетривиальное решение при  $We_* = 20,6$ . При этом форма капли аппроксимировалась эллипсоидом вращения, отношение полюсов которого экстраполировалось по резуль-

татам расчета. «Подозрительная» совокупность параметров вычислялась также для условий экспериментов, приведенных в [2]. Найденное при этих условиях значение  $We_* = 21$  удовлетворительно согласуется с найденными экспериментально [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р.* Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 295—298.
2. *Корсунов Ю. А., Тишин А. П.* Экспериментальное исследование дробления капель жидкости при низких значениях чисел Рейнольдса.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2, с. 182—186.
3. *Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А.* Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1971. 266 с.
4. *Ривкинд В. Я.* Стационарное движение слабо деформируемой капли в потоке вязкой жидкости.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1977, т. 69, с. 157—170.
5. *Ривкинд В. Я.* Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 84, с. 220—242.
6. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.

Томск

Поступила в редакцию  
24.IV.1981