ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
3. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 13.VII.1981

УДК 531.38

ЭВОЛЮЦИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ВЯЗКОУПРУГИЙ ДИСК

Вильке В. Г.

Изучается движение по инерции системы, состоящей из симметричного твердого тела с неподвижной точкой и однородного вязкоупругого диска, расположенного в экваториальной плоскости эллипсоида инерции твердого тела (центр диска совпадает с неподвижной точкой). В случае твердого диска, неподвижного относительно твердого тела, система совершает регулярную прецессию (случай Эйлера движения симметричного твердого тела с неподвижной точкой [1]). Деформации диска, происходящие в плоскости диска и сопровождающиеся рассеянием энергии, являются причиной эволюции регулярной прецессии, заканчивающейся стационарным вращением вокруг вектора момента количества движения системы [2].

Для определения положения твердого тела используем углы Эйлера [1]. Введем три системы координат: система $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижна, система $Ox_1x_2x_3$ связана с твердым телом (ось Ox_3 — ось симметрии твердого тела, система $Oxyz$ получена из неподвижной двумя поворотами на углы Эйлера ψ и Θ. Диск расположен в плоскости Ox_1x_2, перемещения его точек происходят в плоскости Ox_1x_2 и малы, а напряжения соответствуют плоскому напряженному состоянию [3].

Уравнения движения системы имеют вид [2]

$$J[\mathbf{u}]\,\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times J[\mathbf{u}]\,\boldsymbol{\omega}+\int\limits_{\Omega}(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times[\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}]\,\rho\,dx=0 \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Omega}\{\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]+\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}\}\,\delta\mathbf{u}\rho\,dx+$$
$$+(\nabla E[\mathbf{u}]+\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}],\delta\mathbf{u})=0\quad\forall\delta\mathbf{u}\in V,\quad dx=dx_1\,dx_2$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — вектор перемещений точек упругого диска, $J[\mathbf{u}]$ — тензор инерции системы относительно осей $Ox_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела, Ω — область, занимаемая диском в естественном состоянии, $E[\mathbf{u}]$, $D[\mathbf{u}^{\cdot}]$ — функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил, ρ — масса единицы площади пластинки. Конфигурационное пространство системы суть $SO(3)\times V$, где $SO(3)$ — группа вращений трехмерного пространства, $V=\{\mathbf{u}:\mathbf{u}\in(W_2^1(\Omega))^2,\ \mathbf{u}(0,t)=0\}$, $W^1(\Omega)$ — пространство Соболева.

Из уравнений (1) следует закон сохранения момента количества движения

$$\mathbf{G}=J[\mathbf{u}]\,\boldsymbol{\omega}+\int\limits_{\Omega}[(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{u}^{\cdot}]\,\rho\,dx \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{G}$ постоянен и направлен по оси $O\xi_3$.

Получим приближенные уравнения, описывающие эволюцию регулярной прецессии твердого тела. Примем регулярную прецессию в качестве невозмущенного движения при определении деформаций диска из второго уравнения (1). В этом случае $[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]\,\delta\mathbf{u}=0$, поскольку векторы, входящие в смешанное произведение, лежат в плоскости Ox_1x_2.

Предположим справедливыми условия [4, 5]

(3) $$|\mathbf{u}| \ll |\mathbf{r}|, \quad |\boldsymbol{\omega}| \ll \nu_1, \quad D[\mathbf{u}] = \chi \mathrm{E}[\mathbf{u}]$$

Здесь ν_1 — собственная частота колебаний диска на низшей гармонике, χ — постоянная. Условия (3) позволяют пренебречь членами $\mathbf{u}^{\cdot\cdot}$ и $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{\cdot}$ (относительное ускорение и ускорение Кориолиса в системе $Ox_1x_2x_3$) во втором уравнении (1) и задачу о деформации диска рассмотреть как задачу квазистатики

(4) $$(\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}] + \nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \delta\mathbf{u}) = -\int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, \delta\mathbf{u} \rho\, dx \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V$$

Решение уравнения (4) найдем в виде

(5) $$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\chi)^k \frac{\partial^k \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^k}$$

где $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — решение вариационного уравнения плоской задачи теории упругости

(6) $$(\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}_0], \delta\mathbf{u}) = -\int_{\Omega} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, \delta\mathbf{u} \rho\, dx \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V$$

и удовлетворяет граничным условиям

(7) $$\mathbf{u}_0(0, t) = 0, \quad \sigma_n|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = l^2\}$$

Сходимость ряда (5) зависит от величины $\chi\,|\varphi^{\cdot}|$. После центробежных сил в правой части уравнения (6) становится стационарным в системе координат $Oxyz$, а уравнение принимает вид [3]

(8) $$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_0' + \mu_1 \Delta \mathbf{u}_0' = \mu_2 P_3 [\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')]$$

$$\mu_1 = (1-\sigma)(1+\sigma)^{-1}, \quad \mu_2 = 2\rho(1-\sigma)(Eh)^{-1}, \quad \mathbf{r}'(x_1', x_2', 0), \quad \boldsymbol{\omega}'(0, Q, R + \varphi^{\cdot})$$

$$Q = \psi^{\cdot}\sin\theta, \quad R = \psi^{\cdot}\cos\theta, \quad P_3[\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}')] = -[Q^2 + (R + \varphi^{\cdot})^2]\, x_1'\mathbf{e}_x - (R + \varphi^{\cdot})^2 x_2' \mathbf{e}_y$$

Здесь штрих обозначает векторы относительно системы координат $Oxyz$, P_3 — оператор проектирования на плоскость Oxy, h — толщина диска, E, σ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала диска соответственно, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — единичные векторы по осям Ox и Oy. Решение уравнения (8) найдем в виде [5]

(9) $$\mathbf{u}_0' = (a_{11}x_1'^2 + a_{12}x_2'^2 + c_1)\, x_1'\mathbf{e}_x + (a_{21}x_1'^2 + a_{22}x_1'^2 + c_2)\, x_2'\mathbf{e}_y$$

Подставляя (9) в (8) и (7), после преобразований получим систему шести алгебраических линейных уравнений с постоянными коэффициентами относительно постоянных a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2, решив которую найдем

$$\mathbf{u}_0'(\mathbf{r}') = g[\mathbf{r}'^2 - l^2(2 + \mu_1)]\,\mathbf{r}' + D\mathbf{r}', \quad D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, 0\}$$

$$d_i = (B_i\mathbf{r}', \mathbf{r}') + g_i, \quad i = 1, 2$$

$$B_1 = k_1 \operatorname{diag}\{2 + 5\mu_1, 6 + 9\mu_1, 0\}, \quad g_1 = k_2(\mu_1^2 + 4\mu_1 + 2)$$

$$B_2 = k_1 \operatorname{diag}\{-6 - 3\mu_1, -2 + \mu_1, 0\}, \quad g_2 = k_2(\mu_1^2 - 2)$$

$$g = -\frac{\mu_2(R + \varphi')^2}{8(1 + \mu_1)}, \quad k_1 = -\frac{\mu_2 Q^2}{48\mu_1(1 + \mu_1)}, \quad k_2 = \frac{l^2\mu_2 Q^2}{16\mu_1(1 + \mu_1)}$$

Так как $\mathbf{r}' = A(t)\,\mathbf{r}$, где $A(t)$ — матрица перехода от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к $Qxyz$, то

(10) $$\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = A^{-1}\operatorname{diag}\{(A^{-1}B_1A\mathbf{r}, \mathbf{r}) + g_1, (A^{-1}B_2A\mathbf{r}, \mathbf{r}) + g_2, 0\}\, A\mathbf{r} + g[\mathbf{r}^2 - l^2(2 + \mu_1)]\,\mathbf{r}, \quad A = (\gamma_{ij}), \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \cos\varphi$$

$$\gamma_{21} = -\gamma_{12} = \sin\varphi, \quad \gamma_{33} = 1, \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{23} = 0$$

Ряд (5) сходится, если $4\chi\,|\varphi^{\cdot}| < 1$. Считая величину $4\chi\,|\varphi^{\cdot}|$ достаточно малой, в дальнейшем ограничимся в (5) двумя первыми членами, приняв

(11) $$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) - \chi \mathbf{u}_0^{\cdot}(\mathbf{r}, t)$$

Заметим, что согласно (10) и (11) функция $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

(12) $$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r})(\cos 2\varphi + 2\chi\varphi^{\cdot}\sin 2\varphi) + \mathbf{v}_2(\mathbf{r})(\sin 2\varphi - 2\chi\varphi^{\cdot}\cos 2\varphi) + \mathbf{w}_1(\mathbf{r})(\cos 4\varphi + 4\chi\varphi^{\cdot}\sin 4\varphi) + \mathbf{w}_2(\mathbf{r})(\sin 4\varphi - 4\chi\varphi^{\cdot}\cos 4\varphi)$$

Подставим перемещения (12) в первое уравнение (1) и в интеграл (2), усредним полученные уравнения по «быстрому» времени (по углу φ) и найдем приближенные уравнения, описывающие эволюцию «медленных» переменных Θ, $\varphi^\cdot$. Из первого уравнения (1) имеем

$$(13)\quad \begin{aligned}
&J_{11}[\mathbf{u}]p^\cdot - J_{12}[\mathbf{u}]q^\cdot + (J_{33}[\mathbf{u}] - J_{22}[\mathbf{u}])\,qr + J_{12}[\mathbf{u}]\,rp + \\
&+ J_{11}^\cdot[\mathbf{u}]\,p - J_{12}^\cdot[\mathbf{u}]\,q = 0\\
&J_{22}[\mathbf{u}]q^\cdot - J_{12}[\mathbf{u}]p^\cdot + (J_{11}[\mathbf{u}] - J_{33}[\mathbf{u}])\,pr - J_{12}[\mathbf{u}]\,rq - J_{12}^\cdot[\mathbf{u}]\,p + \\
&+ J_{22}^\cdot[\mathbf{u}]\,q = 0\\
&J_{33}[\mathbf{u}]r^\cdot + (J_{22}[\mathbf{u}] - J_{11}[\mathbf{u}])\,pq - J_{12}[\mathbf{u}](p^2 - q^2) + \\
&+ J_{33}^\cdot[\mathbf{u}]\,r + \int\limits_\Omega [(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{u}^{\cdot\cdot}]\,\mathbf{e}_3\rho\,dx = 0
\end{aligned}$$

Здесь p, q, r — проекции вектора ω на оси $Ox_1x_2x_3$, $J_{ij}[\mathbf{u}]$ — компоненты матрицы инерции системы относительно осей $Ox_1x_2x_3$. Согласно (12) величины $J_{ij}[\mathbf{u}]$ будут содержать помимо постоянных членов синусы и косинусы $2n\varphi$, $n = 1, 2, 3, 4$. Далее

$$\begin{aligned}
&p = P\cos\varphi + Q\sin\varphi,\quad q = -P\sin\varphi + Q\cos\varphi,\quad r = R + \varphi^\cdot\\
&p^\cdot = (P^\cdot + Q\varphi^\cdot)\cos\varphi + (Q^\cdot - P\varphi^\cdot)\sin\varphi,\quad q^\cdot = (Q^\cdot -\\
&- P\varphi^\cdot)\cos\varphi - (P^\cdot + Q\varphi^\cdot)\sin\varphi
\end{aligned}$$

где P, Q, R — проекции угловой скорости вращения системы координат $Oxyz$. Отсюда следует, что первые два уравнения (13) при усреднении по углу φ обратятся тождественно в нуль. При усреднении величины Q, P, r, $P^\cdot$, $Q^\cdot$, $r^\cdot$ считаются постоянными. Поскольку $|\mathbf{u}| \ll |\mathbf{r}|$ и производная $r^\cdot$ мала, то усредненное значение $J_{33}[\mathbf{u}]$ примем равным $J_{33}[0] = C_1 + {}^1/_2 ml^2$, где C_1 — момент инерции твердого тела относительно оси Ox_3, m = масса диска, а l — его радиус. Два последних слагаемых в третьем уравнении (13) обращаются в нуль. Так как $|P| \ll |Q|$, то, полагая $p = Q\sin\varphi$, $q = Q\cos\varphi$, найдем

$$(14)\quad \langle (J_{22}[\mathbf{u}] - J_{11}[\mathbf{u}])^\cdot \ {}^1/_2 Q^2 \sin 2\varphi + J_{12}[\mathbf{u}]\,Q^2\cos 2\varphi\rangle \approx {}^1/_2 Q^2\,\Phi$$

$$\Phi = \int\limits_\Omega [x_1(v_{12}+v_{21}) + x_2(v_{11}-v_{22})]\,\rho\,dx,\quad \langle\cdot\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cdot)\,d\varphi;$$

$$v_{ij} = \mathbf{v}_i\mathbf{e}_j,\quad i, j = 1, 2$$

Здесь $\langle\ \ \rangle$ — операция усреднения по углу φ.

Приближенное равенство в (14) означает, что в его правой части ввиду малости опущены квадратичные члены от компонент вектора перемещений. В результате вычислений интеграла Φ найдем

$$\Phi = (5/12)\,\chi\varphi^\cdot Q^2 ml^4\mu_2\mu_1^{-1}$$

После усреднения третьего уравнения (13) получим приближенное уравнение

$$(15)\quad Cr^\cdot + k\varphi^\cdot Q^4 = 0,\quad C = J_{33}[0],\quad k = 5/24\,\chi\, ml^4\mu_2\mu_1^{-1}$$

Интеграл момента количества движения (2) запишем в виде

$$(16)\quad \begin{aligned}
&(J_{11}[\mathbf{u}]\,p - J_{12}[\mathbf{u}]\,q)^2 + (J_{22}[\mathbf{u}]\,q - J_{12}[\mathbf{u}]\,p)^2 + \\
&+ \Big\{J_{33}[\mathbf{u}]\,r + \int\limits_\Omega [(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{u}^\cdot]\,\mathbf{e}_3\rho\,dx\Big\}^2 = G^2
\end{aligned}$$

Усредняя (16) по углу φ и ограничиваясь главными членами (фактически необходимо в (16) положить $\mathbf{u} \equiv 0$), получим

$$(17)\quad A^2Q^2 + C^2r^2 = G^2,\quad A = A_1 + {}^1/_4\,ml^2$$

Здесь A_1 — момент инерции твердого тела относительно оси Ox_1. Воспользуемся соотношением $\varphi^\cdot = r(A - C)/A$, справедливым в случае регулярной прецессии при отсутствии внешних сил, и из уравнений (15), (17) найдем

$$(18)\quad \gamma^\cdot = n\gamma(1-\gamma^2)^2,\quad n = \frac{kG^4(G-A)}{CA^5},\quad \gamma = \frac{Cr}{G} = \cos\Theta$$

Уравнение (18) описывает эволюцию угла Θ. Если $A < C$, то $n > 0$ и $\lim\gamma(t) = \pm 1$ при $t\to\infty$, в зависимости от того, $\gamma(0)$ больше или меньше нуля. При этом угол Θ стремится либо к нулю, либо к π, т. е. тело стремится к вращению вокруг оси симметрии. При $A > C$ имеем $n < 0$ и $\lim\gamma(t) = 0$ при $t\to\infty$. Это означает, что $\lim\theta(t) = {}^1/_2\pi$ при $t\to\infty$ и тело стремится к стационарному вращению вокруг одного из диаметров, принадлежащих экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Уравнение (18) имеет три стационарных решения $\gamma = 0$ и $\gamma = \pm 1$. Решение $\gamma = 0$ ($\Theta = {}^1/_2\,\pi$) устойчиво при $A > C$ и неустойчиво при $A < C$, а решения $\gamma = \pm 1$ ($\Theta = 0, \pi$) устойчивы при $A < C$ и неустойчивы при $A > C$.

Угловая скорость прецессии $\psi^{\cdot} = GA^{-1}$ остается постоянной при эволюции движения, а $\gamma(t)$ задается неявным образом из соотношения $ln\,[(1-\gamma^2)\gamma^{-2}] - \gamma^2(1-\gamma^2)^{-1} = -2nt + ln\,[(1-\gamma^2(0))\gamma^{-2}(0)] - \gamma^2(0)(1-\gamma^2)(0))^{-1}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Вильке В. Г.* Предельные движения системы тяжелое упругое твердое тело с неподвижной точкой.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1980, № 3, с. 79—83.
3. *Лейбензон Л. С.* Краткий курс теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1942. 304 с.
4. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами.— ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 34—42.
5. *Вильке В. Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил.—ПММ, 1980, № 3, вып. 3, с. 395—402.

Москва

Поступила в редакцию 8.II.1982

УДК 532.516

ДЕФОРМАЦИЯ КАПЛИ В ВЯЗКОМ ПОТОКЕ И УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕЕ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ

Бутов В. Г., Васенин И. М., Шрагер Г. Р.

Разностным методом получено решение задачи о неустановившемся движении капли в потоке с учетом ее деформации при условии осевой симметрии. Жидкости внутри и вне капли считаются вязкими и несжимаемыми. Представлены установившиеся формы капли при разных значениях числа Рейнольдса внешнего потока и числа Вебера. На основе анализа условия для нормальных напряжений на границе капли получено критическое значение числа Вебера, определяющее условие существования равновесной формы капли.

1. В сферической системе координат, связанной с осесимметричной каплей так, что начало координат совпадает с центром масс капли, а полярная ось (ось симметрии) направлена по потоку, система уравнений, описывающих течение внутри и вне капли, имеет вид (последнее уравнение — следствие первых двух и условия несжимаемости)

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{2}{\mathrm{Re}_k}\left\{\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\left(v_r + \frac{\partial(v_\theta \sin\theta)}{\sin\theta\,\partial\theta}\right)\right\} - \varkappa_k\frac{\partial P}{\partial \theta} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{2}{\mathrm{Re}_k}\left\{\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta}\right)\right\} - \frac{\varkappa_k}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\Delta P = \frac{2}{r\varkappa_k}\left\{\frac{\partial(v_r, v_\theta)}{\partial(r,\theta)} + v_\theta\left(\frac{\partial r_v}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}^2\theta\right) - v_r\left(\frac{v_r}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{2v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right)\right\}$$

$$\left(\mathrm{Re}_k = \frac{2R_0 u_0 \rho_k}{\mu_k},\quad \varkappa_k = \begin{cases}\rho_2/\rho_1, & k=1\\ 1, & k=2\end{cases},\quad P = p + \frac{\omega}{\varkappa_k} r\cos\theta\right)$$

Здесь r — безразмерная координата, выраженная в единицах радиуса R_0 эквивалентной по объему сферической капли, θ — полярный угол ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), v_r, v_θ — составляющие скорости, отнесенные к скорости u_0 потока на бесконечности в начальный момент времени, индекс $k = 1$ относится к внутренней области, $k = 2$ — к внешней, P — модифицированное давление, отнесенное к $\rho_2 u_0^2$, ω — ускорение капли в потоке, отнесенное к u_0^2/R_0.