Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 531.36

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Шиманов С. С.

Для стационарной разностной системы второго порядка строится функция Ляпунова, знакоопределенность которой вместе с ее первой разностью явно выражены через условия асимптотической устойчивости и неустойчивости. Даются примеры использования этой функции при анализе устойчивости нелинейных и нестационарных задач.

1. Рассмотрим систему разностных уравнений (a, b, c, d — постоянные коэффициенты)

$$x_{n+1} = ax_n + by_n, \quad y_{n+1} = cx_n + dy_n \tag{1.1}$$

Для системы (1.1) построим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x, y) = [by - (d-k)x]^2 + [cx - (a-k)y]^2 + (1-k^2)(x^2+y^2) \quad (k = a + d / \Delta + 1, \quad \Delta = ad - cb) \tag{1.2}$$

Первая разность ΔV в силу системы (1.1) имеет вид

$$(\Delta V)_{(1.1)} = V(ax+by,\ cx+dy) - V(x,\ y) = -(1-\Delta^2)(1-k^2)(x^2 + y^2), \quad \Delta + 1 \neq 0 \tag{1.3}$$

При выполнении неравенств

$$1 - \Delta^2 > 0, \quad 1 - k^2 > 0 \tag{1.4}$$

функция $V(x, y)$ определенно-положительная, а $\Delta V(x,y)$ — определенно-отрицательная.

На основании аналога теоремы об асимптотической устойчивости для разностных систем движение $x = y = 0$ будет асимптотически устойчиво [1—3]. Таким образом, условия (1.4) — достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1). Выполнение одного из неравенств (1.4) или обоих с противоположным знаком делает V знакопеременной, либо ΔV знакоопределенной со знаком V. Поэтому решение $x = y = 0$ системы (1.1) неустойчиво.

Заметим, что функция V и ΔV имеют смысл при выполнении условия $\Delta + 1 \neq 0$. Если $\Delta + 1 = 0$, то при $a + d \neq 0$ решение $x = y = 0$ системы (1.1) неустойчиво, так как в этом случае в качестве функции Ляпунова может быть взята знакопеременная функция вида

$$V = dx^2 - (c+b)xy + ay^2$$

Ее первая разность в силу системы (1.1)

$$(\Delta V)_{(1.1)} = -(a+d)(x^2+y^2)$$

т. е. тривиальное решение неустойчиво. При выполнении неравенств (1.4) со знаком равенства будет либо неустойчивость, либо слабая (неасимптотическая) устойчивость. Таким образом, условия (1.4) при $\Delta + 1 \neq 0$ — необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ системы (1.1).

В качестве функции Ляпунова для (1.1) может быть взята функция

$$V_1(x, y) = [by - (d-k)x]^2 + (1-k^2)x^2.$$

Определенно-положительная при условии (1.4) и при $b \neq 0$. Первая разность ΔV_1 при условии (1.4) будет знакопостоянной отрицательной. Множество $x = 0$ при условии $b \neq 0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1), поэтому согласно аналогу теоремы Барбашина — Красовского для разностных систем движение $x = y = 0$ системы (1.1) — асимптотически устойчиво.

2. Приведем оценки V и ΔV, используя явное выражение V через коэффициенты системы и аналитические выражения, входящие в условия (1.4). Введем следующие

обозначения:

$$m = 1 - k^2, \quad M = b^2 + (a-k)^2 + c^2 + (d-k)^2$$

$$M_1^2 = [b^2 + (d-k)^2 - c^2 - (a-k)^2]^2 + 4\,[b\,(d-k) + c\,(a-k)]^2,$$

$$M_1 < M$$

$$g = m + \frac{M - M_1}{2}, \quad h = m + \frac{M + M_1}{2}$$

Положим $x = x_1$, $y = x_2$, $x = (x_1, x_2)$, $\| x \| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Имеют место оценки

$$g \| x \|^2 \leqslant V\,(x, y) \leqslant h \| x \|^2, \qquad (\Delta V)_{(1.1)} = -(1 - \Delta^2) m \| x \|^2$$

Если x' и x'' — две произвольные точки, то

$$| V\,(x'') - V\,(x') | \leqslant (M + m) \| x'' - x' \| (\| x'' - x' \| + 2 \| x' \|)$$

3. Используя функцию V (1.2) и оценки для V и ΔV, стандартным путем получим

(3.1) $$x_n^2 + y_n^2 \leqslant hg^{-1}\,(1 - q_1)^n \cdot (x_0^2 + y_0^2), \qquad q_1 = (1 - \Delta^2) mh$$

$$x_n^2 + y_n^2 \geqslant gh^{-1}\,(1 - q_2)^n\,(x_0^2 + y_0^2), \quad q_2 = (1 - \Delta^2) m g$$

Из (3.1) получим максимальное время перехода точки (x_0, y_0), расположенной на окружности произвольного радиуса R, внутрь окружности радиуса ε $(x_n^2 + y_n^2 \leqslant \varepsilon^2)$. Это время определяется формулой

$$n \geqslant \varepsilon^2 R^{-2} gh^{-1} / \ln\,(1 - q_1)$$

4. Функция V может быть использована для получения оценки области притяжения нелинейных разностных систем, для которых система (1.1) является системой первого приближения.

Так, рассмотрим систему

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + \gamma x_n^3, \quad y_{n+1} = cx_n + dy_n + \beta y_n^3$$

где γ, β — постоянные $(| \gamma | > | \beta |)$. Область притяжения будет определяться неравенством

$$\| x \| \leqslant (g/h)^{1/2} r$$

где

$$r = | \gamma |^{-1/2} \left\{ \left[l + \frac{(1 - \Delta^2)\, m\, | \gamma |}{M} \right]^{1/2} - l^{1/2} \right\}, \quad l = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

5. Функция V (1.2) может быть использована также для анализа устойчивости разностных систем второго порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

(5.1) $$x\,(n + 2) + 2\,Ax\,(n + 1) + Bx\,(n) = 0$$

где A, B — постоянные коэффициенты. Это уравнение эквивалентно системе вида (1.1)

(5.2) $$x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = -2Ay_n - Bx_n$$

Для этой системы имеем функцию Ляпунова

(5.3) $$V\,(x,\,y) = V_1\,(x,\,y) + V_2\,(x,\,y), \quad V_1\,(x,\,y) = [y + 2Ax - Cx]^2 + (1 - C^2)\,x^2, \quad V_2\,(x,\,y) = [Bx + Cy]^2 + (1 - C^2)\,y^2, \quad C = 2A/(B + 1)$$

Условием асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ системы (5.2) будут неравенства

(5.4) $$B^2 < 1, \quad (B + 1)^2 > 4A^2, \quad B + 1 \neq 0$$

В качестве примера приложения функции V рассмотрим следующую систему, рассмотренную в [4]:

(5.5) $$x_{n+1} = y_n, \quad y_{n+1} = p_n y_n + a^2 x_n$$

Используя функцию [4], равную

$$V = (1 + a^2)^{-1} (a^2 V_1 + V_2) = a^2 x^2 + y^2 \quad (A = 0,\ B = -a^2)$$

и условия асимптотической устойчивости (5.4), найдем условия асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ системы (5.1):

1) $1 - a^2 > 0$

2) $-[(1 - a^2 - \delta)(1 - a^2)]^{1/2} < p_n < 1 - a^2 - \varepsilon$

где δ, ε — положительные постоянные. Полученная область асимптотической устойчивости шире области, найденной ранее ([4], с. 34).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
3. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 323 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 13.VII.1981

УДК 531.38

ЭВОЛЮЦИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ВЯЗКОУПРУГИЙ ДИСК

Вильке В. Г.

Изучается движение по инерции системы, состоящей из симметричного твердого тела с неподвижной точкой и однородного вязкоупругого диска, расположенного в экваториальной плоскости эллипсоида инерции твердого тела (центр диска совпадает с неподвижной точкой). В случае твердого диска, неподвижного относительно твердого тела, система совершает регулярную прецессию (случай Эйлера движения симметричного твердого тела с неподвижной точкой [1]). Деформации диска, происходящие в плоскости диска и сопровождающиеся рассеянием энергии, являются причиной эволюции регулярной прецессии, заканчивающейся стационарным вращением вокруг вектора момента количества движения системы [2].

Для определения положения твердого тела используем углы Эйлера [1]. Введем три системы координат: система $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижна, система $Ox_1x_2x_3$ связана с твердым телом (ось Ox_3 — ось симметрии твердого тела, система $Oxyz$ получена из неподвижной двумя поворотами на углы Эйлера ψ и Θ. Диск расположен в плоскости Ox_1x_2, перемещения его точек происходят в плоскости Ox_1x_2 и малы, а напряжения соответствуют плоскому напряженному состоянию [3].

Уравнения движения системы имеют вид [2]

$$J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}+\int\limits_{\Omega}(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times[\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}]\rho\,dx=0 \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Omega}\{\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})+\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]+\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}\}\,\delta\mathbf{u}\rho\,dx+$$
$$+(\nabla\mathrm{E}[\mathbf{u}]+\nabla D[\mathbf{u}^{\cdot}],\delta\mathbf{u})=0\qquad\forall\delta\mathbf{u}\in V,\quad dx=dx_1\,dx_2$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — вектор перемещений точек упругого диска, $J[\mathbf{u}]$ — тензор инерции системы относительно осей $Ox_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела, Ω — область, занимаемая диском в естественном состоянии, $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$, $D[\mathbf{u}^{\cdot}]$ — функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил, ρ — масса единицы площади пластинки. Конфигурационное пространство системы суть $SO(3)\times V$, где $SO(3)$ — группа вращений трехмерного пространства, $V=\{\mathbf{u}:\mathbf{u}\in(W_2^1(\Omega))^2,\ \mathbf{u}(0,t)=0\}$, $W^1(\Omega)$ — пространство Соболева.

Из уравнений (1) следует закон сохранения момента количества движения

$$\mathbf{G}=J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}+\int\limits_{\Omega}[(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{u}^{\cdot}]\rho\,dx \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{G}$ постоянен и направлен по оси $O\xi_3$.

Получим приближенные уравнения, описывающие эволюцию регулярной прецессии твердого тела. Примем регулярную прецессию в качестве невозмущенного движения при определении деформаций диска из второго уравнения (1). В этом случае $[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]\,\delta\mathbf{u}=0$, поскольку векторы, входящие в смешанное произведение, лежат в плоскости Ox_1x_2.