

УДК 539.3

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ
СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Александров В. М., Коваленко Е. В., Мхитарян С. М.

Метод ортогональных полиномов и его обобщение — метод ортогональных функций [1, 2], применяемые при исследовании сложных смешанных задач механики сплошных сред, базируются на использовании спектральных соотношений, обращающих главную (сингулярную) часть ядра интегрального уравнения рассматриваемой задачи. Предлагается довольно общий подход к выводу спектральных соотношений, основанный на теории потенциала. Получены собственные функции в задаче о вдавливании полосового штампа в упругое полупространство, а также нечетные собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов. В качестве приложения полученных результатов строится при любых значениях некоторого безразмерного параметра решение плоской контактной задачи о вдавливании жесткого штампа в поверхность упругой полосы, которая подстиляется прослойкой типа наклейки, опирающейся на недеформируемое основание.

1. Рассмотрим пространственную контактную задачу о вдавливании без трения жесткого штампа в поверхность упругого (G, ν) полупространства, занимающего область $-\infty < x, y < \infty, z > 0$.

Как известно, [3], интегральное уравнение такой задачи имеет вид

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \int \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\theta [\delta - \alpha x + \beta y - f(x, y)]$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \theta = G(1 - \nu)^{-1}$$

Здесь $p(x, y)$ — неизвестные под штампом нормальные напряжения, Ω — область контакта штампа с поверхностью полупространства, $f(x, y)$ — функция, описывающая форму основания штампа, $\delta - \alpha x + \beta y$ — жесткое перемещение его под действием силы P и моментов M_x, M_y .

Уравнение (1.1) справедливо при очевидных условиях статики

$$(1.2) \quad P = \int_{\Omega} \int p(x, y) dx dy$$

$$M_x = \int_{\Omega} \int y p(x, y) dx dy, \quad M_y = \int_{\Omega} \int x p(x, y) dx dy$$

выражающих равновесие штампа на поверхности полупространства и служащих для определения связи между P, M_x, M_y и δ, α, β .

Введем потенциал простого слоя плотности $p(x, y)$, распределенный по плоской области Ω

$$(1.3) \quad \omega(x, y, z) = \int_{\Omega} \int \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}$$

Было показано [3], что $\omega(x, y, z)$ — гармоническая функция всюду в пространстве, кроме плоского разреза по области Ω и обращается в нуль на бесконечности как PR^{-1} ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Кроме того, функция $\omega(x, y, z)$ непрерывна во всем пространстве, включая и область Ω , а ее нормальная производная претерпевает разрыв при переходе с одной сто-

роны разреза на другую, а именно

$$(1.4) \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \mp 2\pi p(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

На разрезе поставим граничное условие

$$(1.5) \quad \omega(x, y, 0) = 2\pi\theta [\delta - \alpha x + \beta y - f(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega$$

Тогда решение интегрального уравнения (1.1) эквивалентно задаче определения гармонической функции $\omega(x, y, z)$ (1.3) — (1.5).

Общая идея метода решения задачи Дирихле (1.3), (1.5), в ходе которого определяется неизвестное значение плотности $p(x, y)$ (1.4), изложена в [3]. Продемонстрируем ее на двух важных частных примерах.

Известно, [4] что контактная задача о вдавливании без трения в упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы в случае, когда осадка под ним определяется формулой $w(x, y) = g(\lambda, x) \cos \lambda y$, сводится к интегральному уравнению

$$(1.6) \quad \int_{-a}^a \varphi(\lambda, \xi) K_0(\lambda |\xi - x|) d\xi = \pi\theta g(\lambda, x) \quad (|x| \leq a)$$

$$p(x, y) = \varphi(\lambda, x) \cos \lambda y$$

Здесь $2a$ — ширина полосы, $K_0(t)$ — функция Макдональда, λ — произвольное положительное число.

Введем потенциал

$$(1.7) \quad \omega(\lambda, x, z) = \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-a}^a \varphi(\lambda, \xi) K_0[\lambda \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}] d\xi$$

Тогда решение интегрального уравнения (1.6), как указывалось выше, можно найти решив следующую краевую задачу Дирихле [4]:

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \lambda^2 \omega = 0 \quad (x \in [-a, a], z \neq 0)$$

$$\omega(\lambda, x, 0) = g(\lambda, x) \quad (|x| \leq a), \quad \omega(\lambda, x, z) \rightarrow 0, \quad (x^2 + z^2) \rightarrow \infty$$

При этом формулы (1.4) переписутся в форме

$$(1.9) \quad \frac{\partial \omega(\lambda, x, \pm 0)}{\partial z} = \mp \frac{1}{\pi\theta} \varphi(\lambda, x) \quad (|x| < a)$$

$$\frac{\partial \omega(\lambda, x, 0)}{\partial z} = 0 \quad (|x| > a)$$

Для построения решения задачи (1.8) перейдем к эллиптическим координатам

$$x = a \cos \eta \operatorname{ch} \xi, \quad z = a \sin \eta \operatorname{sh} \xi$$

Тогда

$$(1.10) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - \frac{a^2 \lambda^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \omega = 0$$

$$\omega(\lambda, 0, \eta) = g(\lambda, a \cos \eta), \quad \omega(\lambda, \infty, \eta) = 0$$

а вместо первой формулы (1.9) получим

$$(1.11) \quad \varphi(\lambda, a \cos \eta) = \frac{\theta}{a |\sin \eta|} \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

Выражение (1.11) справедливо для всех значений η .

Предполагая, что функция $g(\lambda, x)$ такова, что может быть разложена на промежутке $-a \leq x \leq a$ в равномерно сходящийся ряд по периоди-

ческими функциями Матье [5]

$$(1.12) \quad g(\lambda, a \cos \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \operatorname{ce}_n(\eta, -q) \quad \left(q = \frac{\lambda^2 a^2}{4}\right)$$

будем искать решение задачи (1.10) в виде

$$(1.13) \quad \omega(\lambda, \xi, \eta) = U(\xi) V(\eta)$$

Придем к необходимости изучения уравнений Матье

$$(1.14) \quad V'' + (\alpha + 2q \cos 2\eta) V = 0, \quad U'' - (\alpha + 2q \operatorname{ch} 2\xi) U = 0 \\ U(0) V(\eta) = g(\lambda, a \cos \eta), \quad U(\infty) = 0 \quad (\alpha = \text{const})$$

Следуя далее общей теории уравнений Матье [5], выпишем общее решение (1.13) поставленной краевой задачи (1.10), удовлетворяющее второму условию (1.14) в форме

$$(1.15) \quad \omega(\lambda, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{Fek}_n(\xi, -q) \operatorname{ce}_n(\eta, -q)$$

Используя теперь первое граничное условие (1.14), а также представление (1.12), получим выражения для произвольных постоянных A_n в (1.15) и с учетом (1.11) найдем

$$(1.16) \quad \varphi(\lambda, a \cos \eta) = \frac{\theta}{a |\sin \eta|} \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{\operatorname{Fek}'_n(0, -q)}{\operatorname{Fek}_n(0, -q)} \operatorname{ce}_n(\eta, -q)$$

Поскольку любая гармоника в (1.16) удовлетворяет (1.10), то, подставляя ее в интегральное уравнение (1.6) в согласии с (1.12), придем к следующему спектральному соотношению для функций Матье:

$$(1.17) \quad \int_{-a}^a \frac{\operatorname{ce}_n(\arccos \xi a^{-1}, -q)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} K_0(\lambda |\xi - x|) d\xi = \\ = \frac{\pi \operatorname{Fek}_n(0, -q)}{\operatorname{Fek}'_n(0, -q)} \operatorname{ce}_n(\arccos x a^{-1}, -q)$$

Заметим, что последнее в неявном виде получено в [4].

Рассмотрим нечетную плоскую контактную задачу о вдавливании двух симметрично расположенных штампов в упругую полуплоскость. Интегральное уравнение такой задачи имеет вид [1]

$$(1.18) \quad \int_b^a \varphi(\xi) \ln \left| \frac{\xi + x}{\xi - x} \right| d\xi = f(x) \quad (b \leq x \leq a) \\ M = 2 \int_b^a \varphi(x) x dx$$

Введем в рассмотрение логарифмический потенциал

$$(1.19) \quad \omega(x, y) = \int_L \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}} \varphi(\xi) d\xi, \quad L = \{x : b \leq |x| \leq a\}$$

Тогда решение интегрального уравнения (1.18) эквивалентно решению следующей внешней краевой задачи Дирихле:

$$(1.20) \quad \Delta \omega = 0, \quad (x, y) \in L, \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ \omega(x, y) = f(x), \quad y = 0; \quad \omega(x, y) \rightarrow 0, \quad (x^2 + y^2) \rightarrow \infty$$

После того как построена функция $\omega(x, y)$ (1.19), плотность потенциала $\varphi(x)$ будет определяться по формуле (ср. с. (1.4))

$$(1.21) \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \quad (b \leq |x| \leq a)$$

Решение задачи (1.20) построим методом конформного отображения. С этой целью заметим, что функция [6]

$$(1.22) \quad z = b \operatorname{sn} [\pi^{-1} K'(k) \ln \zeta, k] \quad (k = b/a)$$

комплексную плоскость $z = x + iy$, разрезанную вдоль L , отображает на круговое кольцо

$$(1.23) \quad q_0 \leq \rho \leq q_0^{-1}, \quad q_0 = \exp [-\pi K(k)/K'(k)]$$

комплексной плоскости $\zeta = \rho e^{i\psi} = \xi + i\eta$. Здесь $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби, $K(k), K'(k)$ — полные эллиптические интегралы первого рода от аргументов k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$ соответственно.

При конформном отображении (1.22) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ отображается на верхнее полукольцо $\{q_0 < \rho < q_0^{-1}, 0 < \psi < \pi\}$, нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ — на нижнее полукольцо $\{q_0 < \rho < q_0^{-1}, -\pi < \psi < 0\}$, а бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = -1$ плоскости ζ . Кроме того, верхний берег разреза по отрезку $[b, a]$ переходит в верхнюю полуокружность внешней окружности $\rho = q_0^{-1}$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой же окружности. Аналогично, верхний берег разреза по отрезку $[-a, -b]$ переходит в верхнюю полуокружность внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а нижний берег — в нижнюю полуокружность этой окружности.

Введем функцию

$$(1.24) \quad w = u + iv = \pi^{-1} K'(k) \ln \zeta$$

отображающую прямоугольник $\{-K(k) \leq u \leq K(k), -K'(k) \leq v \leq K'(k)\}$ на упомянутое выше круговое кольцо. Разделив в (1.24) действительную и мнимую части, получим

$$(1.25) \quad u = \pi^{-1} K'(k) \ln \rho, \quad v = \pi^{-1} K(k) \psi \quad (q_0 \leq \rho \leq q_0^{-1}, -\pi < \psi \leq \pi)$$

Из (1.23) — (1.25) будем иметь

$$(1.26) \quad \begin{aligned} z &= b \operatorname{sn}(u + iv, k), \quad x = b \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(iv, k) \operatorname{cn} \\ y &= -ib \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(iv, k) \operatorname{cn} \operatorname{cn}, \quad \operatorname{cn} = \operatorname{dn}(iv, k) [1 - \\ &\quad - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(iv, k)]^{-1} \end{aligned}$$

где $\operatorname{sn}(u, k)$ и $\operatorname{dn}(u, k)$ — эллиптические функции Якоби.

Координатной линии $u = -K(k)$ соответствует дважды покрываемый отрезок $[-a, -b]$ или, согласно сказанному выше, внутренняя окружность $\rho = q_0$ кольца, а координатной линии $u = K(k)$ — дважды покрываемый отрезок $[b, a]$ или внешняя окружность $\rho = q_0^{-1}$ кольца. Поскольку $\operatorname{sn}[K(k), k] = 1$, то на координатной линии $u = K(k)$ из второй формулы (1.26) найдем, воспользовавшись формулами преобразования эллиптических функций Якоби с мнимым аргументом [7]

$$(1.27) \quad x = b \operatorname{dn}^{-1}(v, k') \quad (|v| \leq K'(k))$$

С другой стороны, приняв во внимание представление функции $\operatorname{dn}(v, k')$ с помощью эллиптического интеграла [7], после простых операций найдем

$$(1.28) \quad v = \int_1^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k'^2 t^2)}} \quad (b \leq x \leq a)$$

Для $-a \leq x \leq -b$ формула (1.28) должна нечетно продолжаться.

Из (1.28) следует, что когда x возрастает от b до a , то v возрастает от 0 до $K'(k)$ и, следовательно, формулой (1.28) дается зависимость между переменными v и x .

Исходя далее из (1.25), (1.27), положим

$$f_1(\psi) = -f \left\{ \frac{b}{\operatorname{dn}[\pi^{-1}K'(k)\psi, k']} \right\}, \quad f_2(\psi) = -f_1(\psi) \quad (-\pi < \psi \leq \pi)$$

Очевидно, что функция $f_1(\psi)$ определена на внутренней окружности $\rho = q_0$ кольца, а функция $f_2(\psi)$ — на внешней окружности $\rho = q_0^{-1}$ того же кольца. Обе они четные функции переменной ψ .

Теперь краевая задача (1.20) для плоскости z с разрезом по L после конформного отображения (1.22) переходит в следующую краевую задачу для кругового кольца в плоскости ζ :

$$(1.29) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = 0$$

$$W(\rho, \psi) = f_1(\psi), \quad \rho = q_0; \quad W(\rho, \psi) = f_2(\psi), \quad \rho = q_0^{-1} \quad (-\pi < \psi \leq \pi)$$

$$W(1, \pm\pi) = 0$$

где $W(\rho, \psi) = \omega(x, y)$, а связь между переменными ρ, ψ и x, y осуществляется посредством формул (1.25), (1.26). В то же время, опуская выкладки, формулу вычисления плотности потенциала (1.21) представим в форме

$$(1.30) \quad \varphi(x) = \frac{a}{K'(k) \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left[\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right]_{\rho=q_0^{-1}} \quad (b \leq x \leq a)$$

Используя для решения задачи (1.29) метод разделения переменных, получим [8]

$$(1.31) \quad W(\rho, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n (\rho^n - \rho^{-n}) \cos n\psi}{\operatorname{sh}[\pi n K(k)/K'(k)]} + \frac{h_0}{\pi} \frac{K'(k)}{K(k)} \ln \rho$$

$$f_j(\psi) = (-1)^j \left[h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos n\psi \right] \quad (j=1, 2)$$

$$q_0 \leq \rho \leq q_0^{-1}, \quad -\pi < \psi \leq \pi$$

С учетом (1.31) заключаем, что соответствующая потенциалу $W(\rho, \psi)$ плотность (1.30) будет выражаться по формуле

$$(1.32) \quad \varphi(x) = \frac{a}{K'(k) \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n h_n \operatorname{cth} \left[\frac{\pi n K(k)}{K'(k)} \right] \times \right. \\ \left. \times T_n(X) + \frac{h_0}{\pi} \frac{K'(k)}{K(k)} \right\} \quad (b \leq x \leq a)$$

$$X = \cos \psi, \quad \psi = \frac{[\pi}{K'(k)} \int_1^{x/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}}]$$

где $T_n(t)$ — полиномы Чебышева первого рода.

Пусть теперь в (1.32)

$$h_m = 0 \quad (m \neq n), \quad h_n = 1 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Тогда каждое из разложений (1.31) будет содержать только одну гармонику, которая удовлетворяет краевой задаче (1.29). Подставляя ее в

интегральное уравнение (1.18), приходим к следующему спектральному соотношению:

$$(1.33) \quad \int_b^a \ln \left| \frac{\xi + x}{\xi - x} \right| \frac{T_n(Y) d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(\xi^2 - b^2)}} = \lambda_n T_n(X) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

$$Y = \cos \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{K'(k)} \int_1^{\xi/b} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}} \quad (b \leq \xi \leq a)$$

$$\lambda_n = \frac{K'(k)}{an} \operatorname{th} \left[\frac{\pi n K(k)}{K'(k)} \right], \quad \lambda_0 = \frac{\pi}{a} K(k)$$

Соотношением (1.33) даются собственные функции логарифмического ядра в случае двух симметрических интервалов.

Полагая теперь в (1.33)

$$a = e^\gamma, \quad b = e^{-\gamma}, \quad \xi = e^{\gamma\tau}, \quad x = e^{\gamma t} \quad (\gamma > 0)$$

получим

$$(1.34) \quad - \int_{-1}^1 \ln \left| \operatorname{th} \frac{\gamma(\tau - t)}{2} \right| \frac{T_n(s) d\tau}{\Delta(\tau)} = \mu_n T_n(r) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{2} \pi e^{-\gamma}}{\gamma} K(e^{-2\gamma}),$$

$$\mu_n = \frac{\sqrt{2} e^{-\gamma}}{n\gamma} K'(e^{-2\gamma}) \operatorname{th} \left[\pi n \frac{K(e^{-2\gamma})}{K'(e^{-2\gamma})} \right] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$s = \cos \alpha(\tau), \quad r = \cos \alpha(t), \quad \Delta(\tau) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma - \operatorname{ch} 2\gamma\tau}$$

$$\alpha(\tau) = \frac{\pi}{K'(e^{-2\gamma})} F \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{e^{2\gamma} - e^{-2\gamma\tau}}{2 \operatorname{sh} 2\gamma}}, \quad \sqrt{1 - e^{-4\gamma}} \right)$$

Здесь $F(x, y)$ — эллиптический интеграл первого рода.

Спектральным соотношением (1.34) даются собственные функции ядра $-\ln \left| \operatorname{th} \frac{\gamma(t - \tau)}{2} \right|$ ($-1 \leq \tau, t \leq 1$).

2. Используем полученное спектральное соотношение (1.34) для решения интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред (применению спектрального соотношения (1.17) для решения интегральных уравнений таких задач посвящена статья [2]).

Известно [9], что широкий класс линейных смешанных задач теории упругости и вязкоупругости (контактные задачи), гидромеханики (линейные задачи глиссирования, обтекания тонких профилей и поверхностей, задачи линейной суперкавитации и т. д.) в плоской и пространственной постановках сводится к интегральному уравнению первого рода типа свертки на конечном интервале

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 \varphi(\xi) N \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leq 1)$$

$$N(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty + ic}^{\infty + ic} L(u) u^{-1} e^{-iut} du \quad \left(t = \frac{\xi - x}{\lambda}, \quad u = \sigma + i\tau, \quad |c| < \gamma \right)$$

причем функция $L(u)$ регулярна в полосе $|\tau| \leq \gamma, |\sigma| < \infty$ и имеют место следующие асимптотические формулы:

$$(2.2) \quad L(u) = Au + O(|u|^3) \quad (|u| \rightarrow 0), \quad L(u) = \operatorname{sgn} \sigma + O(e^{-\nu|\sigma|})$$

$$(|\sigma| \rightarrow \infty)$$

В (2.1), (2.2) A, λ, γ и ν — постоянные, значения которых определяются конкретными задачами. Ограничения, налагаемые на правую часть уравнения (2.1), будут указаны ниже.

В силу условий (2.2) функцию $L(u)$ можно представить в виде [9]

$$L(u) = \operatorname{th} Au + G(u)$$

откуда

$$(2.3) \quad N(t) = -\ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi t}{4A} \right| + H(t), \quad H(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\sigma)}{\sigma} e^{-i\sigma t} d\sigma$$

Здесь $H(t)$ как функция комплексного переменного $w = t + is$ регулярна в полосе $|s| < \inf(\nu, 2A)$, $|t| < \infty$ и, кроме того, [9]

$$H(t) = O(e^{-\kappa|t|}) \left(|t| \rightarrow \infty, \kappa = \inf\left(\gamma, \frac{\pi}{2A}\right) \right)$$

Таким образом, первое слагаемое в выражении для $N(t)$ (2.3) полностью отражает все основные свойства ядра интегрального уравнения (2.1) при всех $t \in [0, \infty)$. Второе же слагаемое в (2.3) — сколь угодно гладкая функция при $t \in [0, \infty)$ и играет роль малой добавки. Следовательно, чтобы построить метод решения интегрального уравнения (2.1), одинаково эффективный при всех значениях $\lambda \in (0, \infty)$, необходимо точно обратить интегральный оператор

$$L^* \varphi = - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi(\xi - x)}{4A\lambda} \right| d\xi$$

Схема такого метода изложена в [9]. В соответствии с ней предположим, что четная функция $f(x) \in W_{4+0}^1(-1, 1)$ (определения всех упоминающихся функциональных пространств даны в [9]), и представим $\varphi(x)$ в (2.1) в форме

$$(2.4) \quad \varphi(x) = \frac{\theta(x)}{\Delta(x)}, \quad \Delta(x) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma - \operatorname{ch} 2\gamma x},$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2A\lambda}, \quad \theta(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$$

Тогда будем искать функцию $\theta(x)$, входящую в соотношение (2.4), в виде следующего ряда Фурье по полиномам Чебышева:

$$(2.5) \quad \theta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_{2j}(r)$$

Функцию $f(x)$, а также регулярную добавку ядра $H(t)$ разложим, соответственно, в одинарный и двойной ряды по указанной системе многочленов. Будем иметь

$$(2.6) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_{2n}(r), \quad H(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} T_{2m}(s) T_{2n}(r)$$

В силу указанных выше свойств функций $f(x)$ и $H(t)$ ряды (2.6) равномерно сходятся к ним при всех $|x| \leq 1$, $|\xi| \leq 1$, $\lambda > 0$.

Воспользовавшись условием ортогональности полиномов Чебышева

$$(2.7) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_n(r) T_m(r) dx}{\Delta(x)} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma e^\gamma} K'(e^{-2\gamma}) \begin{cases} 1 & (m = n = 0) \\ 1/2 & (m = n \neq 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

получим

$$(2.8) \quad f_n = \beta_n \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_{2n}(r) dx}{\Delta(x)}$$

$$e_{mn}(\lambda) = \beta_m \beta_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H(t) \frac{T_{2m}(s) T_{2n}(r) d\xi dx}{\Delta(\xi) \Delta(x)}$$

$$\beta_0 = \gamma e^\gamma [V\sqrt{2} K'(e^{-2\gamma})]^{-1}, \quad \beta_n = 2\beta_0 \quad (n \geq 1)$$

Подставляя теперь (2.3) — (2.6) в интегральное уравнение (2.1), используя соотношения (1.34), (2.7) и приравнявая в полученном выражении коэффициенты левой и правой частей при многочленах Чебышева одинакового номера, приходим к следующей бесконечной системе для определения неизвестных коэффициентов a_j :

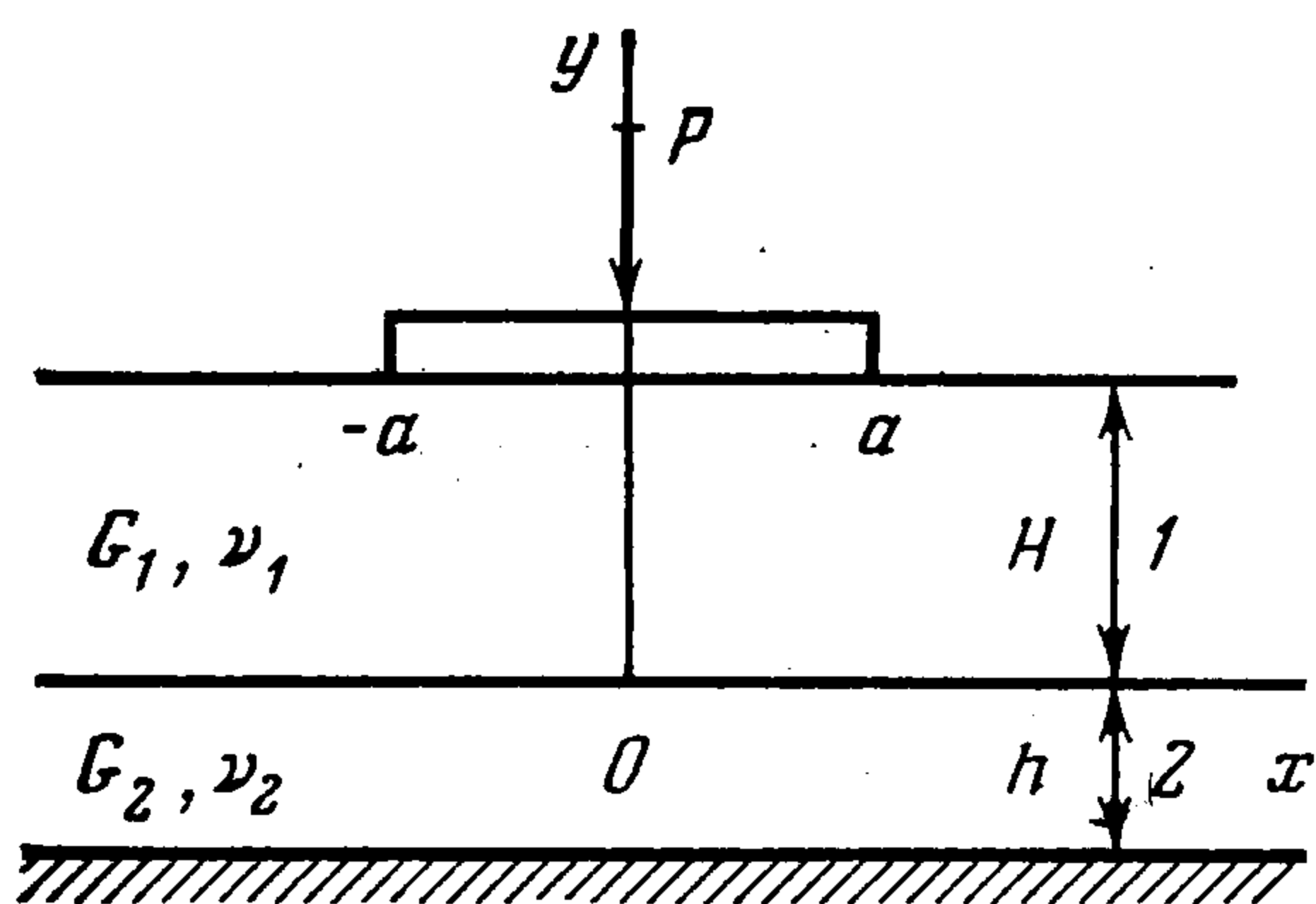
$$(2.9) \quad a_j + \sum_{n=0}^{\infty} c_{nj}(\lambda) a_n = b_j \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

$$b_j = \pi \mu_j^{-1} f_j, \quad c_{nj}(\lambda) = \mu_j^{-1} \beta_n^{-1} e_{nj}(\lambda)$$

Получив для коэффициентов системы (2.9) оценки типа [9], можно утверждать, что бесконечная система (2.9) квазивполне регулярна при $\lambda > > 0$. Кроме того, можно указать некоторое $\lambda_0 > 0$, такое, что при $\lambda > \lambda_0$ бесконечная система (2.9) вполне регулярна [10].

Решив систему (2.9), найдем затем по формулам (2.4), (2.5) функцию $\varphi(x)$ — решение интегрального уравнения (2.1) при любом значении параметра $\lambda \in (0, \infty)$.

3. В качестве примера рассмотрим следующую контактную задачу. Пусть жесткий штамп ширины $2a$ с плоским основанием взаимодействует с поверхностью упругой



полосы толщины H , которая подстигается прослойкой типа накладки ($-h \leq y \leq 0$, $h \ll H$), лежащей без трения на недеформируемом основании (фигура). Между полосой и накладкой осуществлено условие жесткого сцепления. Штамп вдавливается в полосу силой P . Силы трения на линии контакта предполагаются отсутствующими. Вне штампа полоса не нагружена, массовыми силами пренебрегаем. Рассматривается случай плоского деформированного состояния.

Граничные условия задачи при сделанных предположениях будут иметь вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y = H: \tau_{xy}^1 &= 0, \quad \sigma_y^1 = 0 \quad (|x| > a), \quad v_1 = \delta \quad (|x| \leq a) \\ y = 0: u_1 &= u_2, \quad v_1 = 0, \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^2, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 \\ 2G_2 h u_1'' &= -(1 - \nu_2) \tau_{xy}^1 - \nu_2 h (\sigma_y^1)' \end{aligned}$$

Последнее граничное условие (3.1) в силу малости толщины прослойки ($h \ll H$) снесено со срединной плоскости накладки на нижнюю границу полосы $y = 0$.

Применяя для решения поставленной задачи интегральное преобразование Фурье по переменной x [11] и переходя к безразмерным переменным и обозначениям

$$\begin{aligned} x' &= xa^{-1}, \quad \xi' = \xi a^{-1}, \quad \lambda = Ha^{-1}, \quad \delta' = \delta a^{-1}, \quad q(x) \theta^{-1} = \varphi(x'), \\ \theta &= G_1 (1 - \nu_1)^{-1} \end{aligned}$$

(штрихи далее опустим), получим интегральное уравнение (2.1) относительно неизвестных под штампом контактных давлений $q(x)$, причем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} L(u) &= [(2\kappa_1 \operatorname{sh} 2u - 4u)u + 4m(nu \operatorname{sh} 2u + \operatorname{ch} 2u - 1)] \times \\ &\times [(2\kappa_1 \operatorname{ch} 2u + \kappa_1^2 + 1 + 4u^2)u + 4m(n\kappa_1 u + nu \operatorname{ch} 2u + 2u + \operatorname{sh} 2u)]^{-1} \\ m &= \frac{G_1 H (1 - \nu_1) (1 - \nu_2)}{h (G_2 - \nu_2 G_1)}, \quad n = \frac{h \nu_2}{H (1 - \nu_2)}, \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1 \\ A &= 4 \frac{\kappa_1 - 1 + 2m(1 + n)}{(\kappa_1 + 1)^2 + 4m[4 + n(1 + \kappa_1)]}, \quad G_2 > \nu_2 G_1 \end{aligned}$$

Заметим, что к уравнению (2.1) необходимо добавить условие статики

$$Q = P (a\theta)^{-1} = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

выражающее равновесие штампа на верхней грани полосы.

Приближенное решение интегрального уравнения (2.1), (3.2) может быть получено методом, изложенным в п. 2.

λ	$x = 0,0$	0,2	4	0,6	0,8	0,95	$Q\delta^{-1}$
$1/2$	3,905	3,887	3,863	3,821	3,961	5,739	8,571
1	1,964	1,967	1,984	2,048	2,328	3,804	4,648
2	1,011	1,021	1,058	1,150	1,425	2,555	2,716

Положим в (3.2) $m = 10$, $n = 0,1$, $\nu_1 = 0,3$. Распределение неизвестных подштампом контактных давлений $\varphi(x)\delta^{-1}$, а также значения величин $Q\delta^{-1}$ при некоторых λ даны в таблице. Важно, что число уравнений в урезанной системе (2.9) не превосходит пяти при различных значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$. Гарантируемая точность решения задачи не менее 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука, 1976. 493 с.
2. Александров В. М., Коваленко Е. В. Метод ортогональных функций в смешанных задачах механики сплошных сред.— Прикл. механика, 1977, т. 13, № 12, с. 9—17.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
4. Рвачев В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 2, с. 248—254.
5. Мак-Лохлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953, 476 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Курс современного анализа. Ч. 2, М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
8. Будаг Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 686 с.
9. Александров В. М., Коваленко Е. В. О двух эффективных методах решения линейных смешанных задач механики сплошных сред.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 688—698.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
11. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Москва, Ереван

Поступила в редакцию
25.1.1982