Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 539.383

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ШТАМПА С ТРЕНИЕМ

$\boxed{\text{Галин Л. А.}}$, Горячева И. Г.

Рассматривается пространственная контактная задача теории упругости с силами трения, коллинеарными направлению движения. Такой случай имеет место при движении штампа по границе упругого полупространства с анизотропным трением [1]. В случае произвольной поверхности трения указанное распределение сил при движении штампа выполняется приближенно.

Учет сил трения в подобных задачах существен, так как позволяет определить момент, действующий на движущийся штамп вследствие несимметричного распределения сил давления под ним. Известные методы решения пространственных контактных задач с силами трения относятся, как правило, к осесимметричному случаю [2, 3]; некоторые решения получены в предположении осесимметричного распределения сил давления на площадке контакта при несимметричном распределении сил трения [4, 5]. В последнее время стали развиваться также численные методы решения подобного рода задач [6].

Рассматривается перемещение жесткого штампа по границе упругого полупространства в направлении оси x. Будем считать задачу квазистатической, что накладывает определенные ограничения на скорость перемещения штампа v, и введем систему координат (x, y, z), связанную с движущимся штампом. Будем считать, что силы трения на площадке контакта направлены против движения штампа (по оси ox). При этом штамп перемещается так, что не может поворачиваться под действием приложенных сил. Граничные условия будут иметь вид

$$w = g(x, y) + \delta, \quad \tau_{xz} = \mu\sigma_z, \; \tau_{yz} = 0, \quad x, y \in \Omega \tag{1}$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad x, y \,\overline{\in}\, \Omega$$

Здесь μ — коэффициент трения, $g(x, y)$ — форма штампа, δ — его осадка, Ω — область контакта.

Смещение штампа в направлении оси z можно представить как суперпозицию перемещения точек основания, вызванного приложением нормального давления $p(x, y)$, и перемещения, обусловленного действием тангенциальной силы. Из решения задачи о действии на упругое полупространство сосредоточенной силы, имеющей составляющие по осям oz (T_z) и ox (T_x) и приложенной в начале координат, следует, что вертикальные перемещения точек граничной полуплоскости $(z = 0)$ определяются по формуле [5]

$$w = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E}\frac{T_z}{R} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E}\frac{xT_x}{R^2}, \quad R = \sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

Интегрируя (2) по всей площадке контакта Ω и принимая во внимание условия (1), получим следующее интегральное уравнение для определения давления $p(x, y)$ под штампом:

$$\iint_\Omega p(\xi, \eta)\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} + \mu\alpha\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right]d\xi\, d\eta = \tag{3}$$
$$= \frac{\pi E}{1-\nu^2}[g(x, y) + \delta], \qquad \alpha = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$$

Коэффициент α будет равен нулю в случае, когда $\nu = 0{,}5$, т. е. упругое тело несжимаемо. В этом случае наличие сил трения не будет сказываться на величине нормального давления. Для реальных тел коэффициент Пуассона ν принимает значение $0 < \nu < 0{,}5$, при этом величина α изменяется в пределах от 0,5 до 0. При коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}3$ $\alpha = 0{,}286$. Следует, кроме того, учесть, что величина коэффициента трения μ также мала. При сухом трении стали по стали $\mu = 0{,}2$. Считая, что $\nu = 0{,}3$, в этом случае $\mu\alpha \simeq 0{,}057$. Для смазанных поверхностей величина $\mu\alpha$ принимает еще меньшие значения.

Обозначим $\mu\alpha = \varepsilon$ и будем рассматривать эту величину как некоторый малый параметр. В случае, когда давление на площадке контакта всюду ограничено, в качестве нулевого приближения $p_0(x, y)$ можно брать решение интегрального уравнения (3) при $\mu\alpha = 0$. Будем рассматривать решения $p(x, y)$ уравнения (3), близкие к $p_0(x, y)$, когда параметр ε мал. В этом случае представим искомую функцию $p(x, y)$ в виде ряда

$$p(x, y) = p_0(x, y) + \varepsilon p_1(x, y) + \ldots + \varepsilon^n p_n(x, y) + \ldots \tag{4}$$

Подставляя ряд (4) в основное интегральное уравнение (3), получим рекуррентную систему уравнений для определения неизвестных функций $p_n(x, y)$. Введя обозначения операторов

$$A(\omega) = \iint_\Omega \omega(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad B(\omega) = -\iint_\Omega \omega(\xi, \eta) \frac{(x-\xi)\, d\xi\, d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

запишем эту систему в виде

$$A[p_n(\xi, \eta)] = B[p_{n-1}(\xi, \eta)], \quad n = 1, 2 \ldots \tag{5}$$

Для доказательства сходимости ряда (4) построим для него мажорантный числовой ряд. Для определенности будем считать, что площадка контакта имеет форму круга радиуса a ($\Omega : x^2 + y^2 \leqslant a^2$).

Оператор A является линейным ограниченным оператором, взаимно-однозначно отображающим пространство непрерывных в области Ω функций на себя. Норма оператора A при любых $x, y \in \Omega$ равномерно ограничена

$$\| A \| = \sup_{\|\omega\| \leqslant 1} \| A(\omega) \| = \sup_{r \leqslant a} 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = 2a\pi$$

Взаимная однозначность отображения следует из того, что уравнение

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \rho\omega(\rho, \varphi) L(r, \rho, \theta, \varphi)\, d\rho\, d\varphi = 0$$

$$L(r, \rho, \theta, \varphi) = [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]^{-1/2}$$

имеет только тривиальное решение в силу симметрии ядра $L(r, \rho, \theta, \varphi)$ и полноты системы его собственных функций в пространстве $L_2(\Omega)$ [7, 8].

Таким образом, выполнены все условия теоремы Банаха об обратном операторе [9], из которой следует, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}. Вид этого оператора приведен в работе [2]. Если f — гладкая функция, а ω — ограниченная гладкая функция, то оператор A^{-1} имеет вид

$$\omega = A^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi^3} \iint_\Omega \frac{\Delta f(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \times \tag{6}$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta$$

Норма оператора B также ограничена и справедлива оценка

$$\| B \| = \sup_{\|\omega\| \leqslant 1} \| B(\omega) \| = \sup_{\Omega : x^2 + y^2 \leqslant a^2} \iint_\Omega \frac{|x - \xi|\, d\xi\, d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} =$$

$$= \sup_{\substack{r \leqslant a \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} 2 \int_0^\pi |\cos \varphi| \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2(\varphi - \theta)}\, d\varphi = 4a$$

$$(x - \xi = \rho\cos\varphi, \; y - \eta = \rho \sin\varphi)$$

Умножим каждое уравнение системы (5) на обратный оператор A^{-1}. Тогда

$$p_n(x, y) = A^{-1}B\,[p_{n-1}(x, y)] = C\,[p_{n-1}(x, y)] \tag{7}$$

Оператор C также ограниченный, и справедливо неравенство (k — некоторое число)

$$\| C \| \leqslant \| A^{-1} \|\, \| B \| = k$$

Таким образом, из (7) следует оценка для членов ряда (4)

$$\| p_n(x, y) \| \leqslant \| C \|\, \| p_{n-1}(x, y) \| = k\, \| p_{n-1}(x, y) \|$$

показывающая, что ряд (4) сходится равномерно для всех $\varepsilon < 1/k$.

Размеры площадки контакта (радиус круга a) определяются из условия $p(x, y) = 0$ на границе области контакта Ω.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении гладкого осесимметричного штампа круговой формы в плане $g(r) = Dr^2$ по границе упругого полупространства. Считаем, что площадка контакта — круг радиуса a. В этом случае, как известно [2], функция $p_0(x, y) = p_0(r)$ определяется по формуле

$$p_0(r) = \frac{4ED}{\pi(1-\nu^2)}\sqrt{a^2 - r^2}$$

Для нахождения следующего члена ряда (4) получим

$$B[p_0(r)] = -\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{4ED}{\pi(1-\nu^2)}\,\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}\,(r\cos\theta - \rho\cos\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)} =$$

$$= b(r)\cos\theta, \qquad b(r) = \frac{8ED}{3(1-\nu^2)r}\left[(a^2 - r^2)^{3/2} - a^3\right]$$

Как следует из работы [10], решение уравнения

$$A\,[p_1(r, \theta)] = b(r)\cos\theta \tag{8}$$

имеет вид $p_1(r, \theta) = q(r)\cos\theta$, при этом функция $q(r)$ определяется из уравнения

$$\int_0^r \left[K\left(\frac{\rho}{r}\right) - E\left(\frac{\rho}{r}\right)\right] q(\rho)\,d\rho\, +$$

$$+ \frac{1}{r}\int_r^a \left[K\left(\frac{r}{\rho}\right) - E\left(\frac{r}{\rho}\right)\right] \rho q(\rho)\,d\rho = \frac{1}{4}\,b(r)$$

При выводе этого уравнения было использовано значение следующего интеграла:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}} =$$

$$= 2\cos\theta \begin{cases} \dfrac{2}{\rho}\left[K\left(\dfrac{\rho}{r}\right) - E\left(\dfrac{\rho}{r}\right)\right], & \left|\dfrac{\rho}{r}\right| < 1 \\ \dfrac{2}{r}\left[K\left(\dfrac{r}{\rho}\right) - E\left(\dfrac{r}{\rho}\right)\right], & \left|\dfrac{r}{\rho}\right| < 1 \end{cases}$$

где $K(x)$, $E(x)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Выражение для функции $q(r)$ можно получить и непосредственно, используя формулу (6) или метод решения уравнения (8), предложенный в [10].

Последующие члены ряда (4) будут иметь вид

$$p_n(r, \theta) = \sum_{k=1}^{n} q_{nk}(r)\cos k\theta$$

в чем можно убедиться, вычислив значение интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(n\varphi)(r\cos\theta-\rho\cos\varphi)\,d\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)} = \begin{cases} \dfrac{\pi\rho^n}{r^{n+1}}\cos(n+1)\theta, & \left|\dfrac{\rho}{r}\right|<1 \\ -\dfrac{\pi r^{n-1}}{\rho^n}\cos(n-1)\theta, & \left|\dfrac{\rho}{r}\right|>1 \end{cases}$$

и используя результат [2, 10], утверждающий, что если форма поверхности штампа, внедряющегося в упругое полупространство, выражается формулой

$$f(r,\varphi)=f_0(r)+\sum_{m=1}^{n} f_m^{(c)}(r)\cos m\varphi+\sum_{m=1}^{n} f_m^{(s)}(r)\sin m\varphi$$

то давление $q(r,\varphi)$ под штампом будет иметь вид

$$q(r,\varphi)=q_0(r)+\sum_{m=1}^{n} q_m^{(c)}(r)\cos m\varphi+\sum_{m=1}^{n} q_m^{(s)}(r)\sin m\varphi$$

В данном случае в качестве функции $f(r,\varphi)$ рассматриваем правую часть интегрального уравнения (5), а вид решения определяет функцию $p_n(x,y)$ $(n=1,2,\ldots)$.

В случае, когда форма и размеры площадки контакта заранее заданы, давление на границе может обладать сингулярностью. В этом случае будем искать решение интегрального уравнения (3) в виде

$$p(x,y)=\psi(x,y)\chi(x,y)$$

где $\chi(x,y)$ — выделенная сингулярная часть, а $\psi(x,y)$ — регулярная функция, которую можно определить методом разложения по малому параметру, описанным ранее.

Установим особенность функции давления $p(x,y)$ при приближении точки (x,y) к некоторой точке (x_0,y_0), принадлежащей контуру области загружения, являющемуся угловой линией штампа. Очевидно, что на особенность поведения решения интегрального уравнения (3) в граничной точке $M(x_0,y_0)$ будет оказывать влияние только ближайшая окрестность Ω_1 точки M. Введем в этой точке систему координат x', y', направив ось x' по нормали, а ось y' — по касательной к границе площадки контакта Ω в точке M. Оси x', y' будут составлять с осями x, y угол θ. Разложим движение штампа в точке M на две составляющие: по оси x' со скоростью $v\cos\theta$ и по оси y' со скоростью $-v\sin\theta$. Соответственно этому напряженное состояние в области Ω_1, которую выберем симметричной по y' $(-\alpha\leqslant x'\leqslant 0,\ -\beta\leqslant y'\leqslant\beta)$, разложится на составляющие $\tau_{x'z}=\tau_{xz}\cos\theta$, $\tau_{y'z}=-\tau_{xz}\sin\theta$.

Рассмотрим интегральное уравнение (3) в граничной точке площадки контакта (x_0,y_0) и разобьем интеграл в левой части (3) на два: по области Ω_1 в системе координат (x',y') с началом в точке (x_0,y_0) и по оставшейся области $\Omega_2=\Omega\setminus\Omega_1$. Тогда будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega_1} p(x',y')\left[\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}-\frac{\mu\alpha\cos\theta x'}{x'^2+y'^2}+\frac{\mu\alpha\sin\theta y'}{x'^2+y'^2}\right]dx'\,dy' + \tag{9}$$
$$+\iint\limits_{\Omega_2} p(\xi,\eta)\left[\frac{1}{\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2}}+\frac{\mu\alpha(x_0-\xi)}{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2}\right]d\xi d\eta=$$
$$=\frac{\pi E}{1-\nu^2}[g(x_0,y_0)+\delta]$$

Особенность функции $p(x',y')$ на границе, как во всех контактных задачах, носит степенной характер, т. е. $p(x',y')=\psi(x',y')/(\sqrt{x'^2+y'^2})^\beta$, и определяется первым интегральным слагаемым левой части (9). Вследствие симметрии области Ω_1 $(\Omega_1\to 0)$ относительно оси x' и регулярности функции $\psi(x', y')$ в области Ω_1 интеграл

$$\iint_{\Omega_1} \psi(x', y') \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{1+\beta/2}} dx' dy'$$

обусловленный действием сил, направленных по касательной к границе, по сравнению с интегралом

$$\iint_{\Omega_1} \frac{\psi(x', y')}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^\beta} \left[\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{\mu\alpha \cos\theta x'}{x'^2 + y'^2} \right] dx' dy'$$

не оказывает влияние на характер особенности функции $p(x', y')$. Этот вывод совпадает с установленным в работе [2] фактом, что в случае сил трения, обладающих осевой симметрией и направленных перпендикулярно радиусу площадки контакта, уравнения для определения компонент напряжений и деформаций распадаются на две независимые группы и наличие тангенциальных сил не сказывается на величине давления на площадке контакта. Поэтому будем искать характер особенности функции давления в точке M, рассматривая движение ближайшей окрестности Ω_1 точки M по нормали к границе области контакта в этой точке. В этом случае можно считать, что область Ω_1 находится в условиях плоской задачи.

Таким образом, имеем плоскую контактную задачу с силами трения, когда коэффициент трения равен $\mu_1 = \mu \cos \theta$. Воспользуемся решением этой задачи, приведенным в [2], и определим сингулярную часть функции давления $\chi(x, y)$ в окрестности точки M. Для определенности в качестве области Ω рассмотрим круг радиуса a. В этом случае ось x' совпадает с радиусом площадки контакта. Тогда давление на краях площадки контакта будет иметь особенность вида (для удобства введена полярная система координат)

$$\chi(r, \theta) = \frac{1}{(a - r)^{1/2+\gamma}}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu_1\alpha) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\varepsilon \cos\theta)$$

Таким образом, распределение давления на площадке контакта под цилиндрическим штампом с угловой линией на границе области контакта следует искать в виде

$$p(r, \theta) = \frac{\psi(r, \theta)}{(a - r)^{1/2+\gamma}}$$

Функция $\psi(r, \theta)$ всюду ограничена и непрерывна. Из (3) и (5) следует уравнение, которому должна удовлетворять функция $\psi(r, \theta)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\psi(\rho, \varphi)\rho}{(a - \rho)^{1/2+\gamma}} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon(r\cos\theta - \rho\cos\varphi)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} \right] d\rho\, d\varphi = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} [g(r) + \delta]$$

где $g(r)$ — форма боковой поверхности штампа, представляющего собой тело вращения. Далее для нахождения функции $\psi(r, \theta)$ можно применить метод разложения в ряд по малому параметру, изложенный выше, и построить рекуррентную систему уравнений для определения искомых членов ряда $\psi_k(r, \theta)$. Указанный способ выделения особенности может быть применен только для достаточно гладких форм контуров площадки контакта. В случае площадки контакта с угловыми точками следует воспользоваться общим методом выделения особенностей, изложенным в [11].

Рассмотрим, наконец, случай движения штампа круговой формы в плане по границе упругого шероховатого полупространства. Предполагаем, что дополнительные нормальные перемещения границы упругого основания за счет деформации микровыступов $w_*(r, \theta)$ пропорциональны давлению $p(r, \theta)$

$$w_*(r, \theta) = \varkappa p(r, \theta) \tag{10}$$

где $\varkappa$ — коэффициент, характеризующий деформационные свойства шероховатого слоя.

Нормальные перемещения границы упругого полупространства складываются из упругих перемещений точек границы полупространства, определяемых формулой (3), и дополнительных перемещений за счет деформации микровыступов $w_*(r, \theta)$ (10). Запишем условие контакта штампа с границей полупространства

$$\varkappa p(r,\theta) + \int_0^a \int_0^{2\pi} p(\rho, \varphi)\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}} + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \varepsilon \frac{r\cos\theta - \rho\cos\varphi}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\right]\rho\, d\rho\, d\varphi = g(r) + \delta$$

Отметим, что решение уравнения (11) не может обращаться в бесконечность на концах площадки контакта.

Действительно, предполагая, что давление имеет на границе интегрируемую степенную особенность вида $(a-r)^{-\beta}$ $(0<\beta<1$, a — точка на границе), и учитывая, что интегральный член уравнения (11) не имеет особенностей на границе области, получим, что левая часть уравнения (11) имеет особенность порядка $(a-r)^{-\beta}$; в правой же части особенностей нет. Полученное противоречие и доказывает высказанное выше утверждение.

Представим, как и ранее, функцию давления $p(r, \theta)$, всюду ограниченную, в виде ряда

$$p(r, \theta) = p_0(r) + \varepsilon p_1(r, \theta) + \ldots + \varepsilon^n p_n(r, \theta) + \ldots \tag{12}$$

и подставим его в (11). Тогда получим рекуррентную систему уравнений для определения неизвестных функций $p_n(r, \theta)$

$$\begin{aligned} &A[p_0(r)] + \varkappa p_0(r) = g(r) + \delta \\ &A[p_n(r, \theta)] + \varkappa p_n(r, \theta) = B[p_{n-1}(r, \theta)], \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, для определения искомых функций $p_n(r, \theta)$ необходимо на каждом шаге решать неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода (13). Решение его может быть получено методом последовательных приближений [12].

Доказательство сходимости ряда (12) проводится аналогично предыдущему, поскольку оператор A^* в левых частях уравнений (13) ограниченный как сумма двух ограниченных операторов.

Во всех рассмотренных случаях давление на площадке контакта представляется рядом (4), показывающим, в частности, что при движении штампа круговой формы в плане давление под штампом будет распределяться несимметрично, вследствие чего возникнет дополнительный момент M_y относительно оси oy

$$M_y = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(\rho, \varphi)\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi = \varepsilon \int_0^a \int_0^{2\pi} p_1(\rho, \varphi)\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi + O(\varepsilon^2)$$

Равнодействующая сил давления P будет смещена по направлению движения штампа на расстояние d от его оси, которое можно определить с точностью до членов второго порядка малости по формуле

$$d = \frac{M_y}{P} = \frac{\varepsilon\pi}{P} \int_0^a \int_0^{2\pi} p_1(\rho, \varphi)\, \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

Как показано ранее, при перемещении гладкого кругового в плане штампа по границе упругого полупространства функция для давления имеет вид $p(r, \theta) = p_0(r) + \varepsilon q(r) \cos\theta + O(\varepsilon^2)$. В этом случае момент M_y и смещение равнодействующей d определяются по формулам

$$M_y = \varepsilon\pi \int_0^a q(\rho)\, \rho^2\, d\rho + O(\varepsilon^2), \quad d = \frac{\varepsilon\pi}{P} \int_0^a q(\rho)\, \rho^2\, d\rho$$

Из условия равновесия моментов сил, действующих на движущийся штамп, следует, что сила T, вызывающая движение штампа и направленная по оси ox, должна быть приложена на расстоянии h от основания, где

$$h = \frac{M_y}{T} = \frac{M_y}{\mu P} = \frac{\varepsilon\pi}{\mu P} \int_0^a q(\rho)\, \rho^2\, dp = \frac{\alpha\pi}{P} \int_0^a q(\rho)\, \rho^2\, d\rho \tag{14}$$

При несоблюдении равенства (14) штамп будет иметь наклонное основание, что повлечет за собой изменение в граничных условиях (1). В случае плоского штампа круговой формы в плане функция $w(r, \theta)$ (1) будет иметь вид

$$w(r, \theta) = \beta r \cos\theta + \delta$$

Неизвестная постоянная β, определяющая угол наклона штампа, может быть найдена из условия равенства моментов всех сил, действующих на штамп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ванторин В. Д.* Движение по плоскости с анизотропным трением.— В кн.: Трение и износ в машинах. Т. 16. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 81—120.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Бабдоян А. А.* О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 143—147.
4. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, с. 187—196.
5. *Лурье А. И.* Пространственная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955, 492 с.
6. *Кравчук А. С.* Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения.— Трение и износ, 1981, т. 2, № 4, с. 589—595.
7. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
8. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
10. *Ростовцев Н. А.* Комплексные потенциалы в задаче о штампе, круглом в плане.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 1, с. 77—82.
11. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 289—293.
12. *Горячева И. Г.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 99—105.

Москва

Поступила в редакцию 29.I.1982