Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 6, 1982

УДК 539.3 : 534.1

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНКИ

Алгазин С. Д., Бабенко К. И.

Рассматривается задача об изгибе и свободных колебаниях защемленной и опертой по краю пластинки. Предлагаемый алгоритм есть конкретизация в случае бигармонического уравнения алгоритма, описанного в [1]. Он не имеет насыщения [2], т. е. его точность тем выше, чем глаже решение. Программа построена таким образом, что если граница пластинки достаточно гладкая и задана параметрически, то можно вычислить несколько первых собственных значений и решить задачу об изгибе. Приводится пример расчета собственных частот опертой по краю пластинки, граница которой (эпитрохоида) в двенадцати точках имеет кривизну порядка 10^3 (в соответствующее граничное условие кривизна входят явным образом). Вычислены первые пять собственных частот с 7—8 знаками после запятой. Решение получено благодаря аккуратному способу дискретизации и изучению структуры соответствующей конечно-мерной задачи. Это позволило проводить расчеты с большим числом точек (до 1230). Дается сравнение с результатами расчетов других авторов для круга и эллипса [3—5].

1. Рассматриваются алгоритмы численного решения краевых задач (1.1) — (1.3) и (1.1), (1.2), (1.4)

$$\Delta^2 u(z) = F(z), \quad z \in G \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial G} = 0 \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь G — область в комплексной z-плоскости с достаточно гладкой границей ∂G, n — единичный вектор внешней нормали к ∂G, $\partial/\partial s$ означает дифференцирование по длине дуги (длина отсчитывается против часовой стрелки), $1/\rho$ — кривизна ∂G, ν — постоянная (коэффициент Пуассона). Функция $F(z)$ либо задана, либо имеет вид $F(z) = (Q(z) + \lambda P(z))u(z)$, где Q и P — некоторые функции, и в этом случае имеем задачу на собственные значения для бигармонического уравнения. В частности, при $Q \equiv 0$ и $P \equiv 1$ получаем задачу о свободных колебаниях пластинки, где собственная частота ω связана со спектральным параметром λ соотношением $\sqrt{\lambda} = \omega\sqrt{d/D}$, d — плотность, а D — цилиндрическая жесткость. Краевые условия (1.2) и (1.3) означают, что пластинка защемлена по краю, а краевые условия (1.2) и (1.4) означают опирание по краю.

Пусть $z = \varphi(\zeta)$ — функция, задающая конформное отображение круга единичного радиуса на область G. Тогда в плоскости ζ получаем вместо (1.1) — (1.4) следующие соотношения:

$$\Delta(|\varphi'(\zeta)|^{-2})\Delta u = |\varphi'(\zeta)|^2 f(\zeta), \quad \zeta = re^{i\theta}, \quad r < 1 \tag{1.5}$$

$$u|_{r=1} = 0 \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0 \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\nu + (\nu - 1)\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=1} = 0 \tag{1.8}$$

$$f(\zeta) = F(z(\zeta)), \quad q(\zeta) = Q(z(\zeta)), \quad p(\zeta) = P(z(\zeta))$$

В граничном условии (1.8) учтено условие (1.6), т. е. положено $\partial^2 u/\partial s^2 = 0$.

Для удачной дискретизации краевых задач (1.5) — (1.8) следует воспользоваться априорной информацией о решении — его аналитичностью. С этой целью обратим дифференциальный оператор в левой части соотношения (1.5) и применим интерполяционную формулу (2) для функции двух переменных в круге из работы [1]. Подробно эта процедура приводится ниже.

2. Введем некоторые обозначения. Пусть $l_j(\zeta)$ — фундаментальные функции упомянутой выше интерполяции, тогда для любой непрерывной функции $f(\zeta)$, заданной в единичном круге, имеем соотношение

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{N_*} f_j l_j(\zeta) + R_{N_*}(\zeta_j; f) \tag{2.1}$$

где $f_j = f(\zeta_j)$ — значение функции f в j-м узле интерполяции, R_{N_*} — погрешность интерполяционной формулы. Подробно вид функций $l_j(\zeta)$ описан в [1]. Отметим только, что узлы интерполяции ζ_j лежат на m окружностях через равные углы и на каждой окружности расположено $N \equiv 2n + 1$ узлов. Радиус ν-й окружности r_ν — положительный нуль многочлена Чебышева T_{2m} степени $2m$. Таким образом, всего в круге $N_* = mN$ узлов. Обозначим

$$H_j(\zeta) = -\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} K(\zeta, \xi)\, l_j(\xi)\, d\xi, \quad K(\zeta, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln\left|\frac{1-\zeta\bar{\xi}}{\zeta-\xi}\right| \tag{2.2}$$

где $K(\zeta, \xi)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Если ζ пробегает узлы интерполяции ζ_j, $j = 1, \ldots, N_*$, то получим матрицу H размера $N_* \times N_*$, $H_{ij} = H_j(\zeta_i)$. Следовательно, H — матрица дискретной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге [1]. Оказывается, что матрица H имеет следующую блочную структуру:

$$H = \| h_{ij} \|; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.3}$$

где матрицы h_{ij} — симметричные циркулянты [6] размера $N \times N$. Свойства матриц такого вида изучаются в [7].

3. Обратим в (1.5) первый оператор Лапласа и получим

$$\Delta u(\zeta) = |\varphi'(\zeta)|^2 \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} K(\zeta, \xi)\, |\varphi'(\xi)|^2 f(\xi)\, d\xi + |\varphi'(\zeta)|^2 \int_0^{2\pi} K_0(\zeta, \theta)\, v(e^{i\theta})\, d\theta \equiv S(\zeta) \tag{3.1}$$

где $K_0(\zeta, \theta)$ — ядро Пуассона, а $v(e^{i\theta})$ — неизвестная функция. Еще раз обратив в (3.1) оператор Лапласа, получим, учитывая (1.6), соотношение

$$u(\zeta) = \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} K(\zeta, \xi)\, S(\xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

Применим к функциям $S(\xi)$ и $|\varphi'(\xi)|^2 f(\xi)$ интерполяционную формулу (2.1), а для v используем тригонометрическую интерполяцию

$$v(e^{i\theta}) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} D_n(\theta - \theta_j)\, v_j + \tau_n(\theta; v), \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N} \tag{3.3}$$

(D_n — ядро Дирихле, а r_n — погрешность интерполяции). Тогда получаем

$$(3.4)\qquad u(\zeta)=\sum_j H_j(\zeta)z_j\sum_i H_{ji}z_if_i-\sum_j H_j(\zeta)z_j\sum_{p=0}^{2n} H_p^\circ(\zeta_j)v_p+\delta_1(\zeta)$$

$$z_j=|\varphi'(\zeta_j)|^2,\quad v_p=v(e^{i\theta_p}),\quad \theta_p=\frac{2\pi p}{N}$$

$$H_p^\circ(\zeta)=\int_0^{2\pi} K_0(\zeta,\theta)D_n(\theta-\theta_p)\,d\theta$$

Здесь z_j — значение функции $|\varphi'(\zeta)|^2$ в j-м узле интерполяции, δ_1 — погрешность. Последний интеграл вычисляется аналитически.

В соотношение (3.4) входят неизвестные величины $v_0, \ldots, v_{2n}$. Для их определения воспользуемся вторым граничным условием (1.7) или (1.8). Удобно рассмотреть несколько более общую задачу. Обозначим через M дифференциальный оператор, стоящий в левой части граничного условия, считая, что первое граничное условие имеет вид (1.6). Применим к равенству (3.4) дифференциальный оператор M, положим в полученном соотношении $\zeta = e^{i\theta}$, считая, что θ пробегает узлы интерполяции θ_j (см. (3.3)). Тогда для определения вектора $v = (v_0 \ldots v_{2n})'$ получаем систему линейных уравнений с матрицей A и правой частью R, причем

$$(3.5)\qquad A=\|A_{pq}\|,\ A_{pq}=\sum_{i=1}^{N_*} H^1_{i,p}z_iH_q^\circ(\zeta_i),\quad p,q=1,\ldots,N$$

$$H^1_{i,p}=M(H_i(\zeta))\big|_{\zeta=e^{i\theta_p}}$$

$$R=(R_0,\ldots,R_{2n})',\quad R_p=\sum_{i,j}^{N_*} H^1_{j,p}z_iH_{ij}z_jf_j+\delta_2$$

где δ_2 — погрешность. Пусть $C = A^{-1}$, тогда $v = CR$. Подставляем это выражение в (3.4) и пусть в полученном соотношении ζ пробегает узлы интерполяции внутри круга. В результате имеем итоговое соотношение

$$(3.6)\qquad u = (B^2 - BEB)f + \delta$$

Здесь $u = (u(\zeta_1), \ldots, u(\zeta_{N_*}))'$ — вектор значений функции $u(\zeta)$ в узлах, f — соответствующий вектор значений правой части бигармонического уравнения, $B = HZ$ — матрица дискретной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в рассматриваемой области G (δ — погрешность дискретизации)

$$(3.7)\qquad E=\|E_{lj}\|,\quad E_{lj}=\sum_{p=0}^{2n} H_p^\circ(\zeta_l)\sum_{q=0}^{2n} C_{qp}\sum_i H^1_{i,q}z_i$$

$$Z=\mathrm{diaq}(z_1,\ldots,z_{N_*}),\ z_j=|\varphi'(\zeta_j)|^2$$

Отбрасывая в (3.6) погрешность δ, получим приближенную конечномерную задачу. Таким образом, решение задачи об изгибе пластинки сводится к умножению матрицы $D = B^2 - BEB$ на вектор, а задаче на собственные значения (свободные колебания) соответствует приближенная конечно-мерная задача

$$u = (B^2 - BEB)(Q + \lambda P)$$

$$Q = \mathrm{diag}(q(\zeta_1), \ldots, q(\zeta_{N_*})),\quad P = \mathrm{diag}(p(\zeta_1), \ldots, p(\zeta_{N_*}))$$

где Q, P — диагональные матрицы, у которых на диагонали стоят значения соответствующих функций q и p в узлах интерполяции. Для задачи о свободных колебаниях $Q \equiv 0$, $P \equiv I$, т. е. она сводится к вычислению собственных значений матрицы D.

Отметим, что вид второго краевого условия учитывается строением матрицы E, причем если второе краевое условие $\Delta u|_{\partial G} = 0$, то $E \equiv 0$, а для условий (1.7), (1.8) и т. д. массив E должен быть построен по формуле (3.7). Напомним, что первое краевое условие фиксировано и принимается в виде (1.6).

Для того чтобы убедиться в устойчивости описанного алгоритма вычисления матрицы D, следует исследовать вопрос о числе обусловленности матрицы A. Можно показать, что процедура определения функции $v(\theta)$ на границе круга сводится к задаче о решении интегрального уравнения первого рода, трудность решения которого определяется скоростью стремления к нулю его собственных значений. При краевом условии (1.7) для собственных значений λ_k соответствующего интегрального уравнения справедливо неравенство

$$\frac{p_0}{2(k+1)} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{p_1}{2(k+1)}, \quad p_0 = \min_{|\zeta|\leqslant 1} |\varphi'(\zeta)|^2, \quad p_1 = \max_{|\zeta|\leqslant 1} |\varphi'(\zeta)|^2$$

Таким образом, в этом случае число обусловленности матрицы A размера $N \times N$ есть $\operatorname{cond} A \asymp N$ и зависит от рассматриваемой области G.

Итак, при обращении матрицы A (см. (3.5)) для случая краевого условия (1.7) происходит потеря $O(N)$ знаков. В практических расчетах значение $\operatorname{cond} A$ никогда не превосходило величины порядка 10^2 для обеих краевых условий (максимальное значение N, при котором проводились расчеты, было равно 41).

Если исходная область — круг, то структура матрицы D такая же, как и структура матрицы H, определяемая формулой (2.3).

Действительно, рассмотрим вначале краевое условие (1.7). В этом случае массив $H^1_{i,p}$ представляется в виде блочной матрицы H_1, а массив $H_q{}^\circ(\zeta_i)$ можно представить в виде блочной матрицы H_0

(3.8) $$H_1 = (d_1, \ldots, d_m),\ H_0 = (b_1, \ldots, b_m)'$$

где d_ν и b_ν — симметричные циркулянты размера $N \times N$. С учетом этих обозначений получаем, что

(3.9) $$A = H_1 Z H_0 = d_1 Z_1 b_1 + \ldots + d_m Z_m b_m$$

Здесь $Z = \operatorname{diag}(Z_1, \ldots, Z_m)$ — блочно-диагональная матрица, причем матрицы Z_ν диагональные и содержат на диагонали значения $|\varphi'(\zeta)|^2$ на ν-й окружности. Далее имеем

(3.10) $$E = H_0 C H_1 Z = (b_1, \ldots, b_m)' C (d_1 Z_1, \ldots, d_m Z_m)$$

Для краевого условия (1.8) массив $H^1_{i,p}$ можно представить в виде блочной матрицы

$$H_2 = (d_1{}^\circ + \psi d_1, \ldots, d_m{}^\circ + \psi d_m),\ \psi = \operatorname{diag}(\psi_0, \ldots, \psi_{2m})$$

$$\psi_j = \nu + (\nu - 1)\operatorname{Re}\left(\zeta \frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\right)\Big|_{\zeta = e^{i\theta_j}}, \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}$$

Здесь d_ν — те же матрицы, что и в формуле (3.8), а $d_\nu{}^\circ$ — некоторые другие симметричные циркулянты размера $N \times N$. Формулы для массивов A и E получаются заменой в соотношениях (3.9) и (3.10) матрицы H_1 на H_2. Для круга $Z \equiv I$, а $\psi_j \equiv \nu$. Поэтому матрицы A и C — симметричные циркулянты размера $N \times N$. Теперь сформулированное выше утверждение следует из свойств симметричных циркулянтов [6].

Таким образом, для круга матрица D обладает свойствами, сформулированными в [7]. Известно, что в круге соответствующая задача на собственные значения для бигармонического уравнения разделением переменных сводится к задаче на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Конечно-мерная задача наследует это свойство. Наследуется также вид собственной функции и свойство кратности части собственных значений.

Отметим, что массивы H и H_0, которые требуются для вычисления матрицы D, вычисляются один раз для всех областей и граничных условий рассматриваемого вида. Кроме того, массив H содержит всего $m^2 (n + 1)$ различных элементов, а массив H_0 — $m (n + 1)$. Например, если в круге взято 104 точки (8 окружностей по 13 точек), то массив H содержит 448 различных элементов, а H_0 —56. Массивы H_1 и H_2 также имеют аналогичную структуру. Это позволяет вести расчеты с большим числом точек.

Максимальное число точек, с которым проводились расчеты, 1230 (30 окружностей по 41 точке). Практически вычисления собственных значений матриц больших размеров проводилось методом простых итераций в сочетании с методом исключения [8]. В качестве начального приближения использовалось приближенное выражение собственной функции, полученное на меньшем числе точек. Для реализации этого метода требуются лишь программы умножения матрицы D и D' (т. е. транспонированной матрицы) на вектор, причем матрицы D и D' не нужно вычислять явно.

Описанная выше простая структура матрицы конечно-мерной задачи позволяет создать стандартную программу для вычисления собственных значений бигармонического оператора и решения соответствующей краевой задачи.

4. Рассмотрим некоторые примеры численных расчетов. Вначале рассмотрим задачу о свободных колебаниях в круге. Максимальное число точек, с которым проводились расчеты, 820 (20 окружностей по 41 точке). Вычисление собственных значений соответствующей матрицы D размера 820×820 сводится к вычислению собственных значений 21 матрицы размера 20×20 [7]. Для первых пяти однократных собственных значений получаем при краевом условии защемления 104,3631056 (104,344 [3]); 1581,744 (1581,306 [3]); 7939, 549; 25022,25; 61012, а при краевом условии свободного опирания ($\nu = 0{,}25$) получаем 23,62085804 (24,744 [3]); 879,843510932 (885,481 [3]); 5491, 02409476; 19117, 1544172; 49357, 5252428. Для контроля проводились вычисления по одномерной методике на 100 точках. Выше приведены только совпавшие знаки (кроме последней цифры). Приведем еще для случая свободного опирания значение 7-го по величине собственного значения (двукратного) 3224, 568989 (3259,626 [3]).

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о свободных колебаниях свободно опертой пластинки, граница которой получается из круга конформным отображением $z = \zeta (1 + \zeta^{12}/14)$. Граница этой области (эпитрохоида) имеет в 12 точках кривизну порядка 10^3 (—2170). Для первых 5 собственных значений при $\nu = 0{,}25$ получаем на $1230 = 30 \times 41$ точках **10,6434390885**; **95,7918067***703*; **272,324453**2*59*; **471,27**1070 2*79*; **587,14**1069 4*72*. Кроме того, проводились расчеты на $410 = 10 \times 41$ и $820 = 20 \times 41$ точках, результаты которых совпадают с приведенными выше результатами с ошибкой не более чем в девять единиц последнего знака, выделенного жирным шрифтом и шрифтом до последнего курсива.

Последний пример — вычисление основной частоты защемленной эллиптической пластинки. Конформное отображение круга на эллипс проводилось численно. Для $\sqrt{\lambda_1}$ при $a = 1$, $b = 0{,}5$ получено на $104 = 8 \times 13$ точках значение 27,2 (28,5148 [4]; 27,5 [9]), при $a = 1$, $b = 1/3$ на $410 = 10 \times 41$ точках — значение 56,4 (60,3179 [4]; 56,9 [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алгазин С. Д., Бабенко К. И.* Об одном численном агоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов.—Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 5, с. 1049—1053.
2. *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 3, с. 505—508.
3. *Гликман Б. Т.* Свободные колебания круглой пластинки со смешанными граничными условиями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1, с. 135—140.
4. *Sundararajan C.* An approximate solution for the fundamental frequency of Plates.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1978, v. 45, № 4, p. 936—938.
5. *Itao K., Crandall S. H.* Natural Modes and Natural frequencies of Uniform, Circular, Free—Edge Plates.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1979, v. 46, No 2, p. 448—453.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969, 367 с.
7. *Алгазин С. Д.* О дискретизации оператора Лапласа.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 3, с. 521—525.
8. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734с.
9. *Leissa A. W.* Free vibration of elastik plates.— AIAA Paper, 1969, № 24, 34p.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1980