

УДК 539.3:534.1

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПЛАСТИНОЙ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ НАБОРОМ ВЫСТУПАЮЩИХ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

[Белинский Б. П.

Рассматривается излучение звука пластиной, подкреплённой периодическим набором выступающих ребер жесткости небольших волновых размеров. Источник поля — набор сосредоточенных гармонических сил, приложенных к пластине периодическим образом в каждом пролете, причем силы берутся одинаковыми по амплитуде, но с постоянным сдвигом фазы между соседними источниками. Задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, через решение которой выражаются потоки энергии, уходящей от пластины в жидкость.

Излучение звука периодически подкреплёнными пластинами изучалось во многих работах (см. [1] и др.). Общим упрощением было отсутствие учета отражения звука от поверхности ребер, иначе говоря, считалось, что они лишь влияют на условия, при которых происходят колебания несущей пластины.

Данная работа продолжает исследования [2, 3] по влиянию отражающей поверхности ребра жесткости на дифракционное поле. Однако развитая там методика позволяет рассчитать излучение рассматриваемой конструкции лишь при достаточно малом отношении высоты ребер к расстоянию между ними. Ниже исследуется более реальный случай, когда это отношение порядка единицы. Используется метод факторизации [4] в форме аналогичной построениям [5], где рассмотрена дифракция коротких волн на пластине, подкреплённой одним ребром. Находятся амплитуды распространяющихся над ребрами волн и их потоки энергии. Исследуется зависимость потоков от частоты и точки приложения силы. Обсуждаются границы применимости приближенного рассмотрения дифракционных процессов, не учитывающего отражения звука от поверхности ребер.

1. Пусть пластина $\{-\infty < x < \infty, y = 0\}$ подкреплена выступающими ребрами жесткости $\{x = nd, 0 < y < h\} (-\infty < n < \infty)$. Конструкция возбуждается набором точечных сил

$$(1.1) \quad f(x) = F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 - nd) \exp(in\alpha)$$

приложенных к пластине ($0 < x_0 < d$). Фазовый сдвиг α можно считать изменяющимся в пределах $|\alpha| \leq \pi$. Задача плоская, зависимость процессов от времени $\exp(-i\omega t)$ (ω — частота колебаний) опускается. Давление $p(x, y)$ ($y > 0$) в жидкости удовлетворяет уравнению Гельмгольца при граничных условиях на пластине и поверхности ребер [2, 3]

$$(1.2) \quad Lp(x, 0) = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + |v| \right] p(x, 0) = vf(x) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \delta(x - nd) + C_n \delta'(x - nd) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(1.3) \quad p_x(nd, y) + yp_{yx}(nd, 0) = 0 \quad (0 < y < h, -\infty < n < \infty)$$

Гранично-контактные постоянные B_n, C_n определяются из условий стыковки ребер с пластиной

$$(1.4) \quad Z_1 p_y(nd, 0) = [p_{yxxx}(nd, 0)] \\ - Z_2 p_{yx}(nd, 0) = [p_{yx}(nd, 0)] + v \int_0^h s [p(nd, s)] ds$$

Эти условия, а также смысл параметров k_0, ν, Z_1, Z_2 обсуждаются в [2, 3]. Символом $[\varphi(nd)]$ обозначается скачок функции $\varphi(x)$ при переходе через точку $x = nd$. Наконец, поле давлений $p(x, y)$ строится в соответствии с принципом предельного поглощения [6, 7] и должно удовлетворять условию Майкснера «на ребре» [8].

2. В соответствии с почти-периодичностью приложенной к пластине системы сил (1.1) будем искать поле давлений в виде почти-периодической функции, т. е. предположим, что

$$(2.1) \quad p(x + md, y) = p(x, y) \exp(im\alpha)$$

Для обоснования схемы применения принципа предельного поглощения следует установить, что краевая задача для уравнения Гельмгольца при условиях (1.2) — (1.4) и (2.1) имеет единственное решение при наличии поглощения в среде ($\text{Im } k > 0$). При этом считается, что поле $p(x, y)$ удовлетворяет условию Майкснера и достаточно быстро убывает на бесконечности, обеспечивая сходимость возникающих ниже интегралов. Отметим, что для задач дифракции электромагнитных волн на решетках единственность решения строго доказана в [9].

Привлечем вторую формулу Грина для пары функций $p(x, y)$ и $\bar{p}(x, y)$ (черта — знак комплексного сопряжения, ρ_0 — плотность жидкости) в области Ω (S — граница области Ω)

$$(2.2) \quad \frac{1}{2\rho_0\omega} \int_{\Omega} (\bar{p}\Delta p - p\Delta\bar{p}) d\Omega = \frac{1}{2\rho_0\omega} \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial n} \bar{p} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} p \right) dS$$

$$S = \{0 < x < d, y = 0\} \cup \{0 < x < d, y = H\}$$

$$\cup \{x = +0, 0 < y < H\} \cup \{x = d - 0, 0 < y < H\}$$

Из тождества (2.2) с учетом уравнения Гельмгольца следует

$$(2.3) \quad -\frac{\text{Im } k^2}{2\rho_0\omega} \int_{\Omega} |p|^2 d\Omega = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im} \int_S \frac{\partial p}{\partial n} \bar{p} dS$$

При этом левая часть задает поглощенную в области Ω энергию, а правая — поток энергии через границу S [7]. При преобразовании правой части проводится интегрирование по частям с учетом всей совокупности граничных и гранично-контактных условий и условия Майкснера, а также вещественности параметров k_0, ν, Z_1, Z_2 . Приведем лишь результат

$$(2.4) \quad -\frac{\text{Im } k^2}{2\rho_0\omega} \int_{\Omega} |p|^2 d\Omega = -\text{Im}(\bar{F} p_y(x_0, 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im} \int_0^d p_y(x, H) \bar{p}(x, H) dx$$

Предположим, что при $H \rightarrow \infty$ поле $p(x, H) \rightarrow 0$ вместе с $p_y(x, H)$, причем L_2 — норма в левой части (2.4) остается конечной. Найдем

$$(2.5) \quad \frac{\text{Im } k^2}{2\rho_0\omega} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |p|^2 d\Omega = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im}(\bar{F} p_y(x_0, 0))$$

В условиях однородной задачи $F = 0$, откуда $p(x, y) \equiv 0$, что и доказывает единственность решения.

В отсутствие поглощения приходим к тождеству

$$(2.6) \quad \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im} \int_0^d p_y(x, H) \bar{p}(x, H) dx = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im}(\bar{F} p_y(x_0, 0))$$

Здесь правая часть описывает вводимую в конструкцию энергию, а левая — поток энергии через контур $\{0 < x < d, y = H\}$. В силу условия почти-периодичности (2.1) в пространстве над ребрами ($y > h$) поле давлений представимо в виде ряда Фурье

$$(2.7) \quad p(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x - \gamma_n y)$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi n + \alpha}{d}, \quad \gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma_n \geq 0$$

Учитывая еще условие прилипания для смещения пластины $\zeta(x) = p_y(x, 0)/(\rho_0 \omega^2)$ [1], приведем тождество (2.6) к виду

$$(2.8) \quad \frac{d}{2\rho_0 \omega} \sum |A_n|^2 \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im}(\bar{F}\zeta(x_0))$$

Здесь суммирование проводится лишь по распространяющимся волнам, для которых $|\lambda_n| < k$. Тождество (2.8) представляет собой закон сохранения энергии и может служить для контроля правильности расчетов излучения конструкции. Оно сходно с тождеством, найденным в [9] для случая дифракции электромагнитных плоских волн на решетках. При этом правая часть (2.8) представляет собой величину, которую можно непосредственно измерить на пластине.

В условиях однородной задачи тождество (2.8) показывает, что амплитуды всех распространяющихся над ребрами волн равны нулю (за возможным исключением «скользящей волны», для которой $|2\pi n + \alpha| = kd$). Однако этого нельзя утверждать относительно нераспространяющихся волн и, следовательно, в однородной задаче на некоторых частотах появляется, вообще говоря, решение типа волны, бегущей вдоль конструкции и экспоненциально убывающей при удалении от нее. В отсутствие ребер такой волной является поверхностная [1] на тех частотах, на которых ее волновое число k удовлетворяет условию $|2\pi m + \alpha| = kd$ с каким-либо целым m . Отметим еще, что неединственность решения снимается введением поглощения в материал конструкции даже при $\operatorname{Im} k = 0$.

3. В нулевом приближении, когда не учитывается дифракция звука на поверхности ребер жесткости, поле давлений находится элементарно в виде ряда типа (2.7) (ниже отсутствие пределов суммирования означает, что оно проводится по всем целым n)

$$(3.1) \quad p_0(x, y) = -\frac{\nu F}{d} \sum \frac{1}{L_n} \exp(i\lambda_n x - \gamma_n y) (\exp(-i\lambda_n x_0) +$$

$$+ f_1 + i\lambda_n f_2), \quad L_n = (\lambda_n^4 - k_0^4) \gamma_n - \nu$$

$$f_1 = \frac{1}{\Delta(\alpha)} \left\{ U_1(0) U_1(-x_0) - \left(U_2(0) + \frac{d}{Z_2} \right) U_0(-x_0) \right\}$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta(\alpha)} \left\{ U_1(0) U_0(-x_0) - \left(U_0(0) - \frac{d}{Z_1} \right) U_1(-x_0) \right\}$$

$$\Delta(\alpha) = \left(U_0(0) - \frac{d}{Z_1} \right) \left(U_2(0) + \frac{d}{Z_2} \right) - U_1^2(0)$$

$$U_s(x) = \sum \frac{\gamma_n (i\lambda_n)^s}{L_n} \exp(i\lambda_n x) \quad (s = 0, 1, 2)$$

При построении поля p_0 отбрасывается интегральный член в уравнении (1.4) и не учитывается условие (1.3). Такое упрощение характерно для всех предшествующих работ, и одна из задач данного исследования состоит в обсуждении его правомочности.

Поле $q = (p - p_0)/(vF)$, связанное с дифракцией на поверхности ребер жесткости, удовлетворяет условию на пластине

$$(3.2) \quad Lq(x, 0) = \sum B_n \delta(x - nd) + C_n \delta'(x - nd)$$

условию на поверхности ребер $(-\infty < m < \infty)$

$$(3.3) \quad q_x(md, y) + yq_{yx}(md, 0) = g(y) \exp(im\alpha) \quad (0 < y < h)$$

$$g(y) = \frac{1}{d} \sum \frac{i\lambda_n}{L_n} \exp(-\gamma_n y) (\exp(-i\lambda_n x_0) + f_1 + i\lambda_n f_2) - \frac{y}{Z_2} f_2$$

и однородным гранично-контактным условиям (1.4). Для дальнейшего удобно, используя аналог преобразования Ватсона, записать функцию $g(y)$ в виде интеграла

$$(3.4) \quad g(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \frac{i\lambda e^{i\lambda y}}{l(\lambda) S(\lambda)} (G(\lambda, x_0) + f_1 c(\lambda) + f_2 \gamma \operatorname{sh} \gamma d) d\lambda + \frac{y}{Z_2} f_2$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad S(\lambda) = \operatorname{ch} \gamma d - \cos \alpha, \quad G(\lambda, x_0) = \operatorname{ch} \gamma (x_0 - d) - e^{-i\alpha} \operatorname{ch} \gamma x_0, \quad c(\lambda) = e^{i\alpha} - \operatorname{ch} \gamma d, \quad l(\lambda) = i\lambda (\lambda^4 - k_0^4) + v$$

Здесь контур Λ центрально симметричен относительно $\lambda = 0$, [при больших λ проходит по вещественной оси, оставляя ниже себя нули полинома $l(\lambda)$ и нули $\lambda = -i\gamma_n$ функции $S(\lambda)$]. Контур такого типа систематически возникают в исследованиях по акустической дифракции на конструкциях из перекрещивающихся пластин [5, 10].

Почти-периодическая зависимость поля q от координаты x позволяет [4] свести задачу в полупространстве к задаче в полуполосе $\{0 < x < d, \overline{y} > 0\}$. В соответствии с представлением (3.4) будем искать поле в виде (ниже контуром интегрирования является Λ)

$$q(x, y) = \int \frac{u(\lambda) \operatorname{ch} \gamma x + v(\lambda) \operatorname{sh} \gamma x}{l(\lambda) S(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda$$

с неизвестными функциями u и v . Граничное условие на пластине приводит к уравнению

$$\int \frac{u(\lambda) \operatorname{ch} \gamma x + v(\lambda) \operatorname{sh} \gamma x}{S(\lambda)} d\lambda = 0 \quad (0 < x < d)$$

для выполнения которого достаточно считать функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ нечетными.

Далее, из условия непрерывности при всех $y > 0$ производной $q_x(0, y)$ имеем

$$[q_x(0, y)] = q_x(+0, y) - e^{-i\alpha} q_x(d-0, y) = \int \gamma \frac{Q(\lambda)}{l(\lambda) S(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = 0$$

$$Q(\lambda) = v(\lambda) - e^{-i\alpha} (u(\lambda) \operatorname{sh} \gamma d + v(\lambda) \operatorname{ch} \gamma d)$$

Для выполнения последнего уравнения достаточно положить

$$(3.5) \quad \gamma Q(\lambda) = l(\lambda) S(\lambda) \Phi^+(\lambda); \quad \Phi^+(\lambda) \in W^+(1 + \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 > 0$$

Здесь и ниже через $W^\pm(a)$ обозначаются классы функций, аналитических выше (ниже) Λ с асимптотикой $O(\lambda^{-a})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. При этом вид асимптотики следует из условия Майкснера [4].

Из нечетности u и v находим

$$l(\lambda) \Phi^+(\lambda) = -l(-\lambda) \Phi^+(-\lambda), \quad \lambda \in \Lambda$$

Аналитическое продолжение в последнем соотношении с учетом теоремы Лиувилля дает

$$(3.6) \quad l(\lambda) \Phi^+(\lambda) = p_3(\lambda)$$

с произвольным нечетным полиномом третьей степени $p_3(\lambda)$.

Общее решение функционального уравнения (3.5) с учетом (3.6) запишем в виде]

$$u(\lambda) = \frac{p_3(\lambda)}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma d + p(\lambda) c(\lambda), \quad v(\lambda) = \frac{p_3(\lambda)}{\gamma} c(\lambda) + p_1(\lambda) \operatorname{sh} \gamma d$$

с новой неизвестной нечетной функцией $p(\lambda)$. В итоге приходим к следующему представлению:

$$q(x, y) = \int \frac{e^{i\alpha} \operatorname{ch} \gamma x - \operatorname{ch} \gamma (x-d)}{l(\lambda) S(\lambda)} p(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda + \\ + \int \frac{e^{i\alpha} \operatorname{sh} \gamma x - \operatorname{sh} \gamma (x-d)}{\gamma l(\lambda) S(\lambda)} p_3(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda$$

причем, согласно условию Майкснера]

$$(3.7) \quad p(\lambda) = O(\lambda^{3,5}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Далее, граничные условия [(1.3), (1.4) предполагают отсутствие скачка у функций $q_y(x, 0)$, $q_{yx}(x, 0)$ при $x = 0$ (непрерывность смещений пластины и углов поворота в точках скрепления с ребрами). Имеем

$$(3.8) \quad [q_y(0, 0)] = -2r \int \frac{i\lambda p(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda = 0 \\ [q_{yx}(0, 0)] = -2r \int \frac{i\lambda p_3(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda = 0$$

Символ r здесь и ниже означает регуляризацию. Последняя достигается выделением нечетной части подынтегральной функции [10]. Можно проверить, что

$$r \int \frac{\lambda^4 d\lambda}{l(\lambda)} = -\pi, \quad \int \frac{\lambda^2}{l(\lambda)} d\lambda = 0$$

Тогда из второго уравнения (3.8) находим $p_3(\lambda) = i\lambda a_0$, a_0 — произвольная постоянная. Далее имеем

$$[q_{yxx}(0, 0)] = -2r \int \frac{i\lambda \gamma^2 p(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda \\ [q_{yxxx}(0, 0)] = -2a_0 r \int \frac{(i\lambda)^2 \gamma^2}{l(\lambda)} d\lambda = -2\pi a_0$$

В итоге граничная задача для дифракционного поля сводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$(3.9) \quad \int \frac{\Pi(\lambda) p(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda + a_0 i \sin \alpha \int \frac{i\lambda}{l(\lambda) S(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda + \\ + y\beta = g(y) \quad (0 < y < h) \\ \int \frac{p(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = 0 \quad (y > h)$$

$$(3.10) \quad Z_1 \left(i \sin \alpha \int \frac{i\lambda p(\lambda)}{l(\lambda) S(\lambda)} d\lambda + a_0 \int \frac{(i\lambda)^2 \Pi(\lambda)}{\gamma^2 l(\lambda)} d\lambda \right) = -2\pi a_0 \\ - Z_2 \beta = -2r \int \frac{i\lambda \gamma^2 p(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda - 4v\pi \int \frac{p(\lambda)}{l(\lambda)} \rho(\lambda) d\lambda \\ r \int \frac{i\lambda p(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda = 0$$

Здесь

$$(3.11) \quad \beta = r \int \frac{i\lambda \Pi(\lambda) p(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda + a_0 i \sin \alpha \int \frac{(i\lambda)^2}{l(\lambda) S(\lambda)} d\lambda$$

$$\Pi(\lambda) = \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma d}{S(\lambda)}, \quad \rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^h s e^{i\lambda s} ds$$

Второе уравнение (3.9) описывает отсутствие скачка давления над ребрами.

Система (3.9), (3.10) должна быть решена в классе нечетных функций $p_-(\lambda)$ с асимптотикой (3.7).

4. Сформулированную выше систему интегральных уравнений удается свести к бесконечной линейной алгебраической системе, используя метод факторизации [4, 5].

Частное решение первого уравнения (3.9) можно найти, используя представление (3.4), общее решение содержит произвольные функции с предписанными свойствами аналитичности [5]

$$(4.1) \quad \frac{\Pi(\lambda) p(\lambda)}{l(\lambda)} = \frac{i\lambda}{l(\lambda) S(\lambda)} \zeta(\lambda) + \sigma \rho(-\lambda) + F^+(\lambda) + e^{-i\lambda h} F^-(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

$$\zeta(\lambda) = -a_0 i \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} G(\lambda, x_0) + \frac{f_1}{2\pi} c(\lambda) + \frac{f_2}{2\pi} \gamma \operatorname{sh} \gamma d$$

$$\sigma = \frac{f_2}{Z_2} - \beta, \quad F^\pm(\lambda) \in W^\pm(1/2)$$

Решение второго интегрального уравнения (3.9) имеет вид [5]

$$(4.2) \quad p(\lambda) = \psi(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

где $\psi(\lambda)$ — нечетная целая функция порядка h . Используя нечетность функции $p_-(\lambda)$ и привлекая теорему Лиувилля, найдем из уравнения (4.1)

$$(4.3) \quad \sigma \rho(\lambda) l(-\lambda) + l(\lambda) F^+(\lambda) + l(-\lambda) e^{i\lambda h} F^-(\lambda) = N(\lambda)$$

где $N(\lambda) = b_0 i\lambda + b_2 (i\lambda)^3$ — произвольный нечетный полином третьей степени.

Исключая функцию $p(\lambda)$ из (4.1) и (4.2) и учитывая (4.3), приходим к краевой задаче теории аналитических функций

$$(4.4) \quad \frac{\Pi(\lambda) \psi(\lambda)}{l(\lambda)} = \frac{i\lambda}{l(\lambda) S(\lambda)} \zeta(\lambda) + \sigma \left(\rho(-\lambda) - \frac{l(-\lambda)}{l(\lambda)} \rho(\lambda) \right) + \frac{N(\lambda)}{l(\lambda)} + e^{-i\lambda h} F^-(\lambda) - e^{i\lambda h} \frac{l(-\lambda)}{l(\lambda)} F^-(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

Необходимая для дальнейшего факторизация $\Pi(\lambda) = \Pi^+(\lambda) \Pi^-(\lambda)$, где $\Pi^\pm(\lambda) \in W^\pm(-1/2)$, построена, например, в [4]. Используя это разложение, преобразуем краевую задачу (4.4) к виду

$$(4.5) \quad \frac{F^-(\lambda)}{\Pi^-(\lambda)} = \frac{\Pi^+(\lambda) \psi(\lambda)}{l(\lambda)} e^{i\lambda h} - \frac{i\lambda \Pi^+(\lambda)}{l(\lambda) \gamma \operatorname{sh} \gamma d} e^{i\lambda h} \zeta(\lambda) - \sigma \left(\rho(-\lambda) - \frac{l(-\lambda)}{l(\lambda)} \rho(\lambda) \right) e^{i\lambda h} \frac{\Pi^+(\lambda)}{\Pi(\lambda)} - \frac{N(\lambda) \Pi^+(\lambda)}{l(\lambda) \Pi(\lambda)} e^{i\lambda h} + e^{2i\lambda h} \frac{l(-\lambda)}{l(\lambda)} \frac{\Pi^+(\lambda)}{\Pi(\lambda)} F^-(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

Левая часть последнего соотношения принадлежит к классу $W^-(3/2)$, а правая часть имеет выше Λ простые полюса в точках $\lambda = i\Gamma_n$, $\Gamma_n = ((\pi n)^2 - k^2)^{1/2}$ ($n \geq 0$). По обобщенной теореме Лиувилля

$$(4.6) \quad \frac{F^-(\lambda)}{\Pi^-(\lambda)} = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{\lambda - i\Gamma_n}$$

с произвольными постоянными c_n .

Остается потребовать, чтобы соотношение (4.5) определяло целую функцию $\psi(\lambda)$. Выражая ее из (4.5) и (4.6), приходим к необходимости устранения возможных полюсов в точках $\lambda = i\Gamma_n$. Приравнявая нулю соответствующие вычеты, получаем систему уравнений для постоянных c_n ($n \geq 0$)

$$(4.7) \quad c_n + \sum_{p \geq 0} A_{np} c_p + r_{n1} a_0 + r_{n2} (b_0 - k^2 b_2) + r_{n3} b_2 = \sigma_n$$

$$A_{np} = \exp(-2\Gamma_n h) \frac{L_n^\circ}{L_n} \frac{\Pi_n^2 S_n}{\varepsilon_n d \Gamma_n (\Gamma_n + \Gamma_p)}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \geq 1 \\ 2, & n = 0 \end{cases}$$

$$\Pi_n = \Pi^+(i\Gamma_n)$$

$$L_n = -l(i\Gamma_n), \quad L_n^\circ = l(-i\Gamma_n), \quad S_n = 1 - \cos \alpha (-1)^n$$

$$r_{n1} = -\sin \alpha \frac{\Pi_n (-1)^n}{\varepsilon_n d L_n} \exp(-\Gamma_n h)$$

$$r_{n2} = \frac{\Pi_n S_n}{i \varepsilon_n d L_n} \exp(-\Gamma_n h)$$

$$r_{n3} = r_{n2} \left(\left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 + \frac{[\pi}{\Gamma_n} (\rho_n L_n^\circ + \rho(-i\Gamma_n) L_n) \right), \quad \rho_n = \rho(i\Gamma_n)$$

$$\sigma_n^\circ = -\frac{\Pi_n \tau_n(x_0)}{2\pi i \varepsilon_n d L_n} \exp(-\Gamma_n h)$$

$$\tau_n(x_0) = \cos \frac{\pi n x_0}{d} (1 - e^{-i\alpha} (-1)^n) - f_1 (1 - e^{i\alpha} (-1)^n)$$

(подробности, связанные с вычислением величины σ , опускаем; оказывается, что $\sigma = \pi b_2$, $\beta = f_2/Z_2 - \pi b_2$).

В систему уравнений (4.7) входят наряду с неизвестными c_n величины a_0 , b_0 , b_2 , для определения которых необходимо привлечь контактные условия (3.10). Возникающие при этом интегралы вычисляются по вычетам, причем для регуляризации систематически используется тождество

$$r \int i\lambda \left(\varphi(-\lambda) - \frac{r l(-\lambda)}{l(\lambda)} \varphi(\lambda) \right) d\lambda = -2\nu \int \frac{i\lambda \varphi(\lambda)}{l(\lambda)} d\lambda$$

справедливое при условии существования интеграла справа. В итоге система контактных уравнений принимает вид (суммирование по $n \geq 0$)

$$(4.8) \quad s_{m1} a_0 + s_{m2} (b_0 - k^2 b_2) + s_{m3} b_2 + \sum \omega_{mn} c_n = \sigma_m \quad (m = 1, 2, 3)$$

$$s_{11} d = -\frac{2\pi d}{Z_1} - \sum \frac{\Gamma_n}{\varepsilon_n L_n} (1 + (-1)^n \cos \alpha)$$

$$s_{12} d = 2\pi i \sin \alpha \sum \frac{\Gamma_n}{\varepsilon_n L_n} (-1)^n$$

$$s_{13} d = 2\pi i \sin \alpha \sum \frac{t_n}{\varepsilon_n L_n}, \quad t_n = \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 \Gamma_n + 2\pi \nu \rho_n$$

$$\sigma_1 d = -i \sin \alpha \sum \frac{\Gamma_n (-1)^n}{\varepsilon_n L_n S_n} \tau_n(x_0) - \frac{f_1 d}{Z_1}$$

$$s_{21} = s_{12}, \quad s_{22} d = -2\pi \sum \frac{\Gamma_n S_n}{\varepsilon_n L_n}$$

$$s_{23} d = -2\pi \sum \frac{t_n S_n}{\varepsilon_n L_n}, \quad \sigma_2 d = \sum \frac{\Gamma_n}{\varepsilon_n L_n} \tau_n(x_0)$$

$$s_{31} = s_{13}, \quad s_{32} = s_{23}, \quad s_{33} d = -\pi d Z_2 / 2 -$$

$$-8\pi^2 \nu \sum \frac{\rho_n S_n}{L_n} \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 + \pi (1 - \cos \alpha) - 2\pi \sum \frac{\Gamma_n k^4 + \nu}{L_n} S_n -$$

$$- \pi d \nu \left(\frac{2}{d} \sum \frac{S_n}{\varepsilon_n \Gamma_n^3} \left(1 - \exp(-\Gamma_n h) - \Gamma_n h \exp(-\Gamma_n h) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(\Gamma_n h)^2}{2} \right) + \frac{\cos \alpha - \cos kd}{k \sin kd} \frac{h^3}{3} \right) - 4\pi^3 \nu \sum \frac{\rho_n^2 S_n L_n^\circ}{\varepsilon_n \Gamma_n L_n}$$

$$\sigma_3 d = - \sum \frac{t_n}{\varepsilon_n L_n} \tau_n(x_0), \quad \omega_{mp} = 4\pi \nu \sum \frac{r_{nm}}{\Gamma_n + \Gamma_p}$$

$$(m = 1, 2, 3; \quad p \geq 0)$$

Ускорение сходимости указанных рядов и произведений достигалось выделением главной, медленно сходящейся части [11].

5. Для доказательства эквивалентности бесконечной системы (4.7), (4.8) и исходной краевой задачи следует ввести функцию $F^-(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ согласно (4.5), (4.6) и проверить их принадлежность требуемым классам аналитических функций, затем ввести $p(\lambda)$ согласно (4.1) и проверить выполнение интегральных уравнений (3.9), (3.10). Эквивалентность последних исходной краевой задаче проверяется без труда.

Система уравнений (4.7), (4.8) порождает в пространстве последовательностей l_2 уравнение второго рода

$$(5.1) \quad c + A(k)c = f, \quad c = (a_0, b_0, b_2, c_0, c_1, \dots)$$

причем оператор Гильберта — Шмидта $A(k)$ — аналитическая операторнозначная функция комплексного параметра k . Из единственности решения исходной краевой задачи при $\text{Im } k > 0$ на основании аналитической теоремы Фредгольма [12] следует дискретность и вещественность множества собственных частот задачи.

Решение на нерезонансных частотах существует, единственно и может быть найдено методом редукции [11]. Отметим еще, что подстановка $c_n = -r_{n3}b_2 + c_n' \exp(-\Gamma_n h)$ дает для новых неизвестных c_n' систему с экспоненциальной сходимостью, причем $c_n = O(n^{-3/2})$ ($n \rightarrow \infty$).

6. Обратимся к изучению структуры полного поля $p(x, y)$. Внутри гребенки ($0 < x < d$, $0 < y < h$) оно представимо в виде

$$(6.1) \quad p(x, y) = d_0 y (\cos k(x-d) - e^{i\alpha} \cos kx) + \\ + \sum \cos \frac{\pi n x}{d} [g_n \exp(-\Gamma_n(h-y)) + h_n \exp(-\Gamma_n y)]$$

Не приводя выражений для коэффициентов d_0, g_n, h_n , отметим лишь асимптотику $g_n = O(n^{-3/2})$, при помощи которой можно, используя формулу суммирования Эйлера — Маклорена, проверить выполнение условия Майкснера.

Поле над ребрами ($y > h$) представляет набор плоских и квазиплоских волн

$$(6.2) \quad p(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \exp(i(\lambda_n x + \sqrt{k^2 - \lambda_n^2} y))$$

Амплитуды A_n выражаются через решение бесконечной системы (4.7), (4.8), в частности, для основной волны $p_1 = A_1 \exp(i(\alpha x/d + by))$ имеем

$$(6.3) \quad A_0 = -\nu F \frac{2\pi\alpha}{bd^2\Pi^+(b)} e^{-ibh} \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{b - i\Gamma_n}, \quad b = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\alpha}{d}\right)^2}$$

Полное число распространяющихся над ребрами волн можно определить как число целых чисел в промежутке $(-(kd + \alpha)/(2\pi), (kd - \alpha)/(2\pi))$. При $2\pi - kd > \alpha > kd$ распространяющихся волн нет вообще (источники приложены к пластине «слишком часто» и до известной степени компенсируют излучение друг друга).

В случае $\alpha < kd < \pi$ распространяется лишь основная волна p_1 . Если при этом конструкция возбуждается синфазно ($\alpha = 0$), то, как показывает анализ бесконечной системы, амплитуда A_0 совпадает со значением, вычисленным по нулевому приближению, и, таким образом, учет телесности ребер не изменяет излученной мощности.

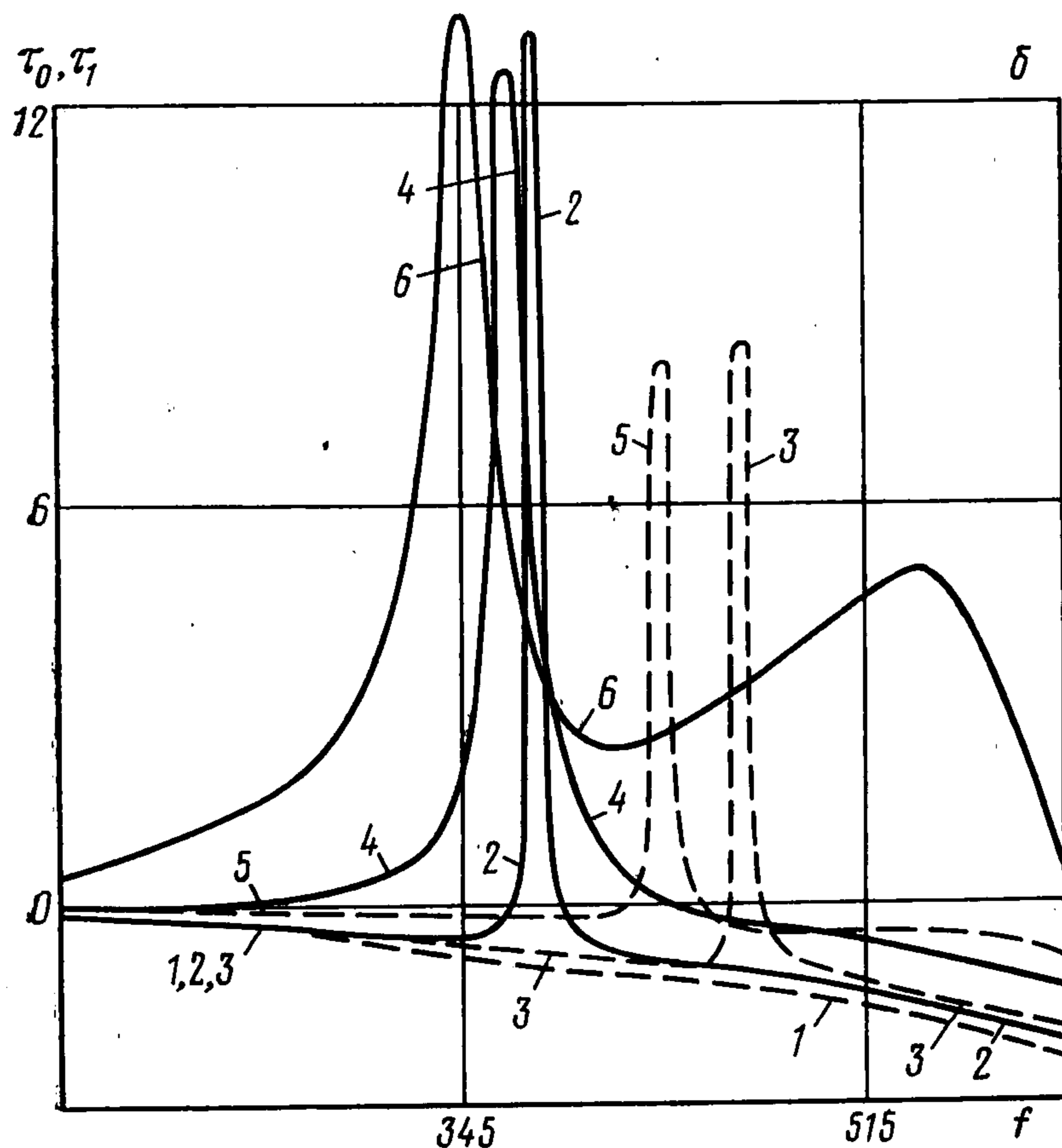
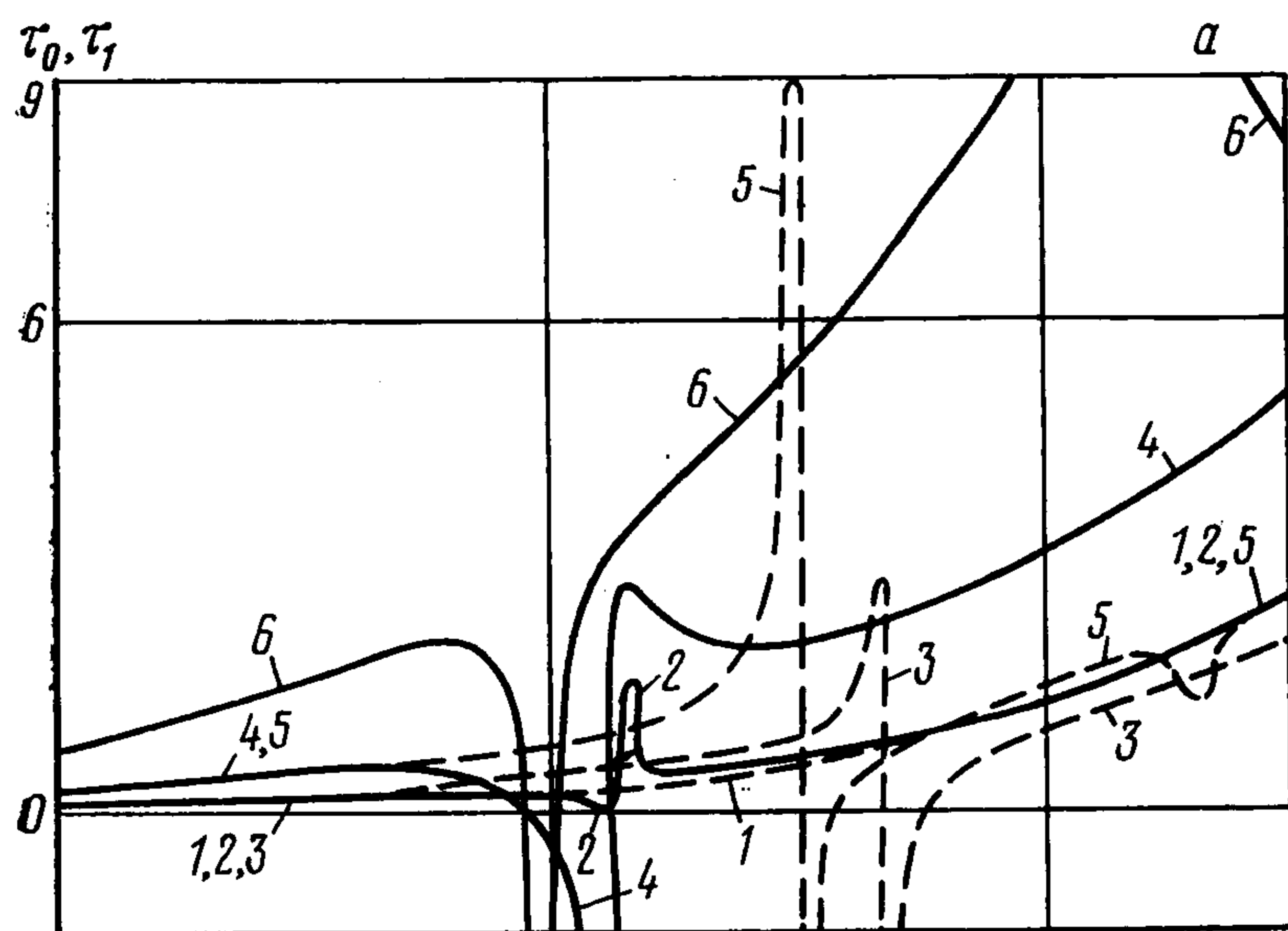
Введем в рассмотрение средние за период потоки энергии π , переносимые в вертикальном направлении волнами p_1, p_{10} (основная волна в нулевом приближении). Имеем последовательно]

$$\pi_1 = \frac{1}{2\rho_0\omega} \text{Im} \left(\bar{p}_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = \frac{b}{2\rho_0\omega} |A_0|^2 \\ \pi_{10} = \frac{b}{2\rho_0\omega} |A_{10}|^2, \quad \pi_{00} = \frac{b}{2\rho_0\omega} |A_{00}|^2 \\ A_{00} = -\frac{\nu F}{dL_0} \exp\left(-\frac{i\alpha x_0}{d}\right), \quad A_{10} = A_{00} \left(1 + \exp\frac{i\alpha x_0}{d} \left(f_1 + \frac{i\alpha}{d} f_2\right)\right)$$

Здесь A_{00}, A_{10} — амплитуды волн p_{00} и p_{10} соответственно (см. (3.1)). Введем также нормированные потоки (в дБ)

$$\tau_1 = 10 \lg (\pi_1/\pi_{00}), \tau_0 = 10 \lg (\pi_{10}/\pi_{00})$$

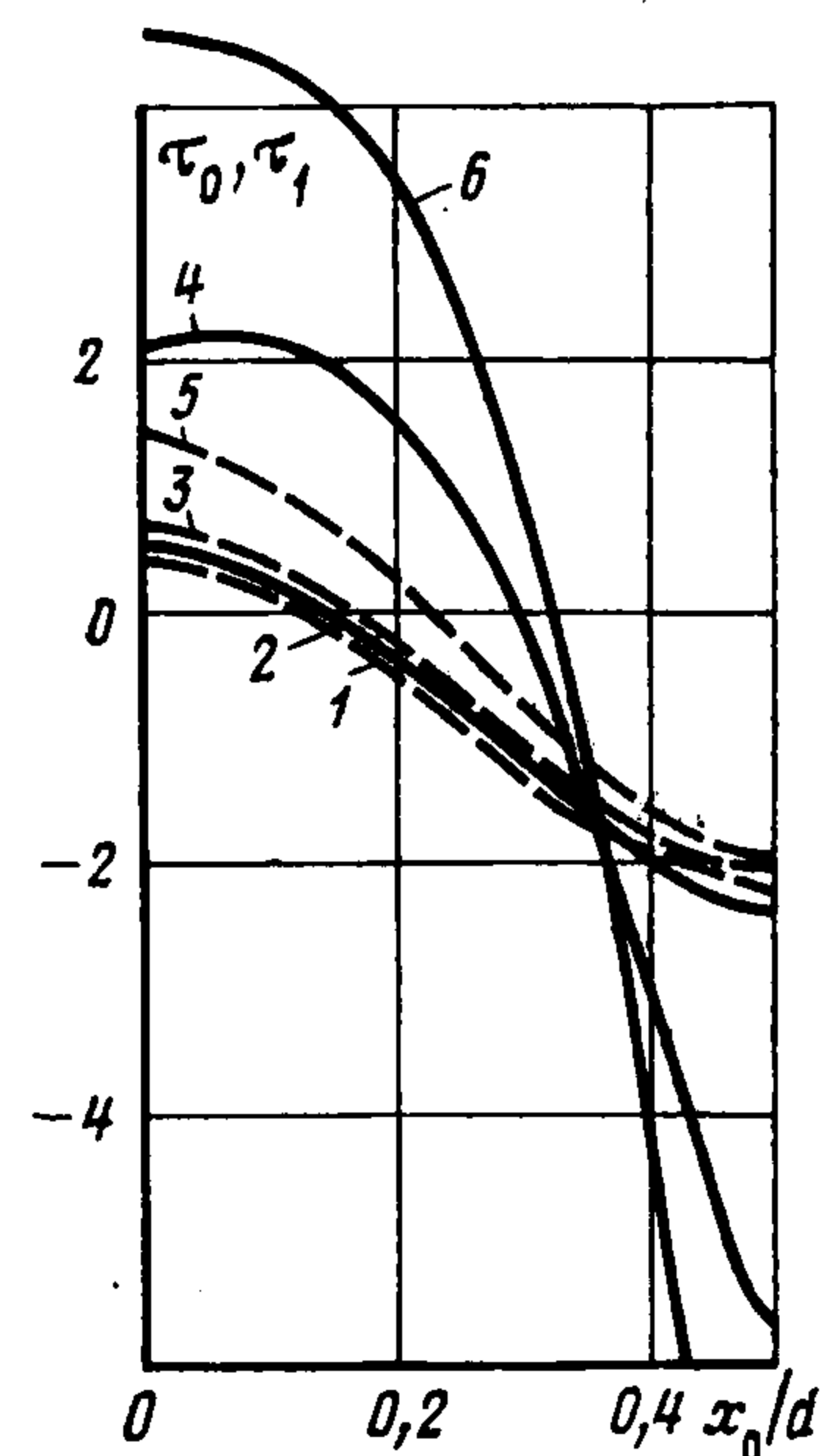
Зависимости τ_1 и τ_0 от частоты f (в Гц) изображены на фиг. 1 при $x_0 = 0$ (а) и $x_0 = 0,25 d$ (б), а от точки приложения силы x_0 — на фиг. 2 ($f = 400$ Гц; все зависимости от x_0/d симметричны относительно оси $x_0/d = 0,5$). Линия 1 и 2 соответствуют фазе $\alpha = 0,1 kd$, 3 и 4 — $\alpha = 0,5 kd$, 5 и 6 — $\alpha = 0,9 kd$. При этом линии 1, 3 и 5 относятся к бестелесному приближению (τ_0), а 2, 4 и 6 — к полному полю (τ_1). Расчеты проводились для стальной пластины толщиной 4 см, подкреплённой стальными ребрами толщиной 3 см и находящейся в воде; $d = 60$ см, $h = 30$ см.



Фиг. 1

к бестелесному приближению (τ_0), а 2, 4 и 6 — к полному полю (τ_1). Расчеты проводились для стальной пластины толщиной 4 см, подкреплённой стальными ребрами толщиной 3 см и находящейся в воде; $d = 60$ см, $h = 30$ см.

Отметим, что величина излученной энергии управляется взаимодействием двух факторов. С одной стороны, присоединение к пластине ребер и соколеблющейся массы жидкости приводит к увеличению сопротивления системы, что обуславливает уменьшение вводимой в нее энергии. Но с другой стороны, переотражение



Фиг. 2

волн на каждом ребре — дополнительный источник излучения, так как при этом происходит перераспределение полной энергии между энергией вибрации конструкции и энергией, излученной в жидкость.

Излученное поле претерпевает резкие изменения в зависимости от частоты и точки приложения силы, при этом изменения x_0 могут приводить к замене максимумов излучения на минимумы и наоборот. Сходная зависимость излученной мощности от x_0 отмечалась и в случае одиночного ребра [2]. Возникающие там зависимости типа затухающей синусоиды здесь, грубо говоря, складываются для каждой пары «ребро — сила», порождая весьма сложные кривые.

Обратимся к изучению характерных частот, на которых происходят резкие изменения излученного поля. Указанные частоты не зависят от x_0 , они определяются лишь знаменателем Фредгольма уравнения (5.1), иначе говоря, на этих частотах резко уменьшается определитель бесконечной системы уравнений. Представляет интерес динамика частот по параметрам задачи. Как известно, увеличение волнового числа κ пластины в жидкости по сравнению с вакуумом обусловлено влиянием присоединенной массы

жидкости. В задаче нулевого приближения характерные частоты определяются из уравнения $|2\pi n + \alpha| = \kappa d$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). На расчетный диапазон приходится лишь одно решение $f = 565$ Гц при $n = -1, \alpha = 0,9 \kappa d$. На всех кривых 5 отмечается всплеск около этой частоты.

Однако указанная частота — верхняя граница возможных характерных частот, поскольку добавление ребер к пластине также создает присоединенную массу, увеличивающую эффективное волновое число конструкции κ^0 . В результате характерные частоты — корни уравнения $2\pi - \alpha = \kappa^0 d$ — сдвигаются в сторону уменьшения, причем сдвиг возрастает с фазой α .

Учет телесности ребер приводит к увеличению присоединенной массы за счет жидкости, соколеблющейся с ребрами. Этим объясняется сдвиг по частоте влево кривых 2, 4 и 6 относительно кривых 1, 3 и 5. Концепция присоединенной массы объясняет также наблюдавшуюся в расчетах обратную зависимость характерных частот от отношения θ массы ребра к массе пролета пластины.

Эффект телесности зависит также от высоты ребра, при $h/d \leq 0,25$ телесность можно не учитывать. Далее, этот эффект зависит от степени фазированности набора, при $\alpha \leq 0,1 \kappa d$ его также можно не учитывать. Качественно это обстоятельство объясняется с привлечением направления волнового вектора \mathbf{n} распространяющейся волны: $\mathbf{n} = (t, (1 - t^2)^{1/2})$, $t = 0,1, 0,5, 0,9$. С ростом фазового множителя t направление распространения становится все более пологим, так что, по-видимому, поверхности ребер в большей степени вовлекаются в процесс формирования поля, а при малых фазах роль телесности меньше.

Обсудим, наконец, влияние массы ребер на величину излученной мощности. При значениях параметра $\theta \geq 10$ (весьма тяжелые ребра) учет телесности не дает поправку более 2 дБ. При этом, если сила действует под ребром ($x_0 = 0$), диапазон по частоте усиления излучения весьма мал, поскольку тяжелые ребра слабо раскачиваются, тормозя излучение близко расположенных сил. Уже при $\theta \geq 6$ частотные зависимости перестают носить резонансный характер. Напротив, при малых θ легкие ребра могут сильно раскачиваться, вовлекая в колебания присоединенную к ним жидкость, при этом роль телесности возрастает.

Автор благодарит Д. П. Коузова за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Белинский Б. П. Излучение звука пластиной, подкрепленной выступающим ребром жесткости. — Акуст. ж., 1978, т. 24, вып. 3, с. 326—332.
3. Белинский Б. П. Дифракция звука на пластине, подкрепленной выступающим ребром жесткости. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 486—493.
4. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 432 с.
5. Белинский Б. П. Дифракция коротких волн на протяженном ребре жесткости в упругой пластине. — Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 1974, вып. 12, с. 26—31.
6. Коузов Д. П. О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 164—170.
7. Коузов Д. П. Энергетический принцип единственности граничных задач акустики. Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 89, вып. 10, с. 124—133.
8. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
9. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 287 с.
10. Белинский Б. П., Коузов Д. П., Чельцова В. Д. О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 291—299.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 696 с.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 357 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.XI.1981