УДК 539.3

ДВЕ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ИЗОТРОПНОГО ГИПЕРУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Александров В. М., Брудный С. Р.

В рамках нелинейной теории упругости рассматривается равновесие слоя из несжимаемого изотропного гиперупругого материала при плоской деформации под действием силы тяжести и приложенных на бесконечности сил P. Исследуются линеаризованные уравнения, порожденные данным напряженно-деформированным состоянием. Показано, что при некоторых соотношениях между параметрами материала, толщиной слоя и силой P положение равновесия может стать неустойчивым. Рассматриваются две задачи: контактная задача для полосы и задача о вертикальной трещине конечной длины, выходящей на границу полуплоскости. Действие штампа и трещины рассматривается как малое возмущение напряженно-деформированного состояния, вызванного действием собственного веса и силы P.

1. Обозначим через x_1, x_2 декартовы координаты недеформированного состояния, а через y_1, y_2 — декартовы координаты деформированного состояния. Ось x_1 направим по верхней границе полосы вправо, а ось x_2 — внутрь полосы. Пусть полоса находится под действием собственного веса и приложенных на бесконечности сил P (P_1, P_2); P_1 и P_2 — соответствующие проекции на оси x_1, x_2. Тогда данное напряженно-деформированное состояние опишется следующей системой уравнений (соответственно уравнения равновесия, состояния и условие несжимаемости):

$$\sigma_{ij,j}+\delta_{2i}\gamma^*=0,\quad \sigma_{ij}AF_{ij}+pF_{ji}^{-1},\quad J=\det(F_{ij})=1;\quad A=2\frac{dW}{dI} \tag{1.1}$$

Граничные условия при $x_2=0$ имеют вид

$$\sigma_{12}=0,\quad \sigma_{22}=0 \tag{1.2}$$

На нижней границе полосы рассматриваются два типа граничных условий, соответствующих гладкому жесткому основанию (задача A) и жесткому сцеплению полосы с основанием (задача $Б$), т. е. при $\sigma_{12}=0$, $y_2=h$ (задача A) $y_1=x_1$, $y_2=h$ (задача $Б$)

$$\left(P_i=\int_0^h\sigma_{i1}\,dx_2,\quad i=1,2\right)$$

Здесь σ_{ij} — тензор Пиола, γ^* — удельный вес, $F_{ij}=y_{i,j}$ — тензор градиента деформации, $I=F_{ij}F_{ij}$, $W(I)$ — потенциал гиперупругого материала, p — гидростатическое давление, F_{ji}^{-1} — транспонированный тензор, обратный к F_{ij}, δ_{ij} — символ Кронекера, h — толщина полосы.

Решение будем искать в виде

$$y_1=Rx_1+\varphi(x_2),\quad y_2=f(x_2),\quad R=\text{const} \tag{1.3}$$

Тогда из системы (1.1), (1.2) получим следующие соотношения:

$$A\varphi'=0,\quad Af'+Rp=-\gamma^*x_2,\quad Rf'=1 \tag{1.4}$$

Из первого уравнения (1.4) следует, что $\varphi'=0$. При $A(I)\equiv 0$ нарушается условие эллиптичности уравнений равновесия [1] и неравенство Бейкера — Эриксена [2]. В силу $\varphi'=0$ решение типа (1.3) существует только при $P_2=0$, что в дальнейшем и предполагаем.

Рассмотрим задачу A. Учитывая (1.4), имеем

$$p=R^{-1}(-\gamma^*x_2-A_0R^{-1}),\quad A_0=A(I_0),\quad I_0=R^2+R^{-2}$$
$$(hA_0(R-R^{-3})=R^{-2}\gamma^*h^2/2+P_1)$$

где R определяется из уравнения в скобках. Граничные условия задачи $Б$ определяют $R=1$. При этом закрепление бесконечно удаленной точки автоматически определяет величину силы $P_1=-\gamma^*h^2/2$.

2. Проведя стандартную процедуру линеаризации согласно методу малых возмущений [2], получим следующую систему уравнений в безразмерных переменных, записанную в координатах деформированного состояния:

$$\tau_{ij,j}=0,\quad u_{1,1}+u_{2,2}=0 \tag{2.1}$$

$$\tau_{11}=(Q+T+\gamma x_2)u_{1,1}+p,\quad \tau_{12}=(T+\gamma x_2)u_{2,1}+Tu_{1,2} \tag{2.2}$$

$$\tau_{22} = (Q + T + \gamma x_2)u_{2,2} + p, \quad \tau_{21} = (T + \gamma x_2)u_{1,2} + Eu_{2,1}$$
$$Q = R^2 (1 + m), \quad T = R^{-2}, \quad E = R^2, \quad G = R^{-2} (1 - m)$$
$$m = L (R^2 - R^{-2}) / A_0, \quad L = 4d^2W / dI^2, \quad I = I_0, \quad \gamma = \gamma^* a / A_0$$

Размерные переменные (со звездочкой) выражаются через безразмерные следующим образом: возмущение тензора Пиола $\tau_{ij}^* = A_0\tau_{ij}$, вектор возмущения перемещений $u_i^* = au_i$, возмущение давления $p^* = A_0p$, координаты деформированного состояния $x_i^* = ax_i$, a — некоторый параметр, имеющий размерность длины. Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$Qu_{1,11} + Tu_{1,22} + \theta_{,1} = 0, \quad u_{1,1} + u_{2,2} = 0 \tag{2.3}$$
$$Eu_{2,11} + Gu_{2,22} + \theta_{,2} = 0, \quad \theta = p + \gamma u_2$$

Применяя соотношения, полученные в [1], условие эллиптичности для системы (2.3) можно представить в форме $G + Q > -2$. Как известно [1, 2], с потерей эллиптичности связана потеря устойчивости положения равновесия, возможность появления решений со слабыми разрывами.

3. Будем рассматривать действие гладкого штампа на верхнюю границу тяжелого слоя из несжимаемого гиперупругого материала как малое возмущение напряженно-деформированного состояния, вызванного действием силы тяжести и приложенных на бесконечности сил P. Отождествим параметр a из п. 2 с полушириной штампа. Применяя преобразование Фурье по переменной x_2 к системе (2.3) и соответствующим граничным условиям, получим следующую систему:

$$-\alpha^2Q\bar{u}_1 + T\bar{u}_1'' - i\alpha\bar{\theta} = 0, \quad -i\alpha\bar{u}_1 + \bar{u}_2' = 0 \tag{3.1}$$
$$-\alpha^2E\bar{u}_2 + G\bar{u}_2'' + \bar{\theta}' = 0, \quad \bar{\theta} = \bar{p} + \gamma u_2$$
$$\bar{u}_1' - i\alpha\bar{u}_2 = 0, \quad (G + T)\,\bar{u}_2' + p = \bar{q}, \quad x_2 = 0$$
$$\bar{u}_1' - i\alpha\bar{u}_2 = \bar{u}_2 = 0, \quad x_2 = \lambda \ (\text{задача } A)$$
$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \quad x_2 = \lambda \quad (\text{задача } Б)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по x_2, чертой — трансформанта соответствующей функции, $q\,(x_1)$ — контактное давление, λ — безразмерная толщина полосы. Обозначим через $v\,(x_1)$ форму штампа. Решая соответствующие граничные задачи, получим интегральные уравнения для контактного давления в форме

$$\pi v\,(x) = \int_{-1}^{1} q\,(t)\,K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)dt, \quad K\,(t) = \int_0^\infty L\,(u)\,\cos ut\,du \tag{3.2}$$

Вид $L\,(u)$ в задаче A определяется корнями η_1, η_2 уравнения

$$T\eta^2 - (G + Q)\eta + E = 0, \quad G + Q > -2 \tag{3.3}$$

Если они различны ($\eta_1 \neq \eta_2$), то

$$L\,(u) = (\omega^2 - \nu^2)\,((\omega^2 - \nu^2)\gamma_0 + Tu\,(d\,(\nu, \omega)\,\mathrm{cth}\,\nu u - d\,(\omega, \nu)\,\mathrm{cth}\,\omega u))^{-1} \tag{3.4}$$
$$\omega = \sqrt{\eta_1}, \quad \nu = \sqrt{\eta_2}, \quad d\,(a, b) = a\,(1 + b^2)^2, \quad \gamma_0 = \gamma\lambda$$

а если они равны, то $\eta_1 = \eta_2 = \nu = \sqrt{E}$ и

$$L\,(u) = (\mathrm{ch}\,2u - 1)\,/\,(Au\,\mathrm{sh}\,2u + Bu^2 + \gamma_0\,(\mathrm{ch}\,2u - 1)) \tag{3.5}$$
$$A = (3\nu + 2\nu^{-1} - \nu^{-3})\,/\,2, \quad B = \nu + 2\nu^{-1} + \nu^{-3}$$

Если в (3.4) $d\,(\omega, \nu) > d\,(\nu, \omega)$, а в (3.5) $A < 0$ то $L\,(u)$ имеет полюса на действительной оси. Это свидетельствует о неустойчивости преднапряженного состояния. При $d\,(\nu, \omega) = d\,(\omega, \nu)$ или $A = 0$ уравнение (3.2) представляет из себя интегральное уравнение Фредгольма второго рода и полоса ведет себя как квазивинклеровское основание, а в пределе при $\lambda \to \infty$ — как чистое винклеровское основание. Для задачи $Б$

$$L\,(u) = u^{-1}\,(\mathrm{sh}\,2u - 2u)\,/\,(2u^2 + \mathrm{ch}\,2u + 1 + \gamma_0\,(\mathrm{sh}\,2u/2u - 1)) \tag{3.6}$$

Можно показать, что для $L\,(u)$, представляемых формулами (3.4) при $d\,(\nu, \omega) > d\,(\omega, \nu)$, (3.5) при $A > 0$ и (3.6), справедливо следующее асимптотическое поведение при $u \to \infty$:

$$L\,(u) \sim c_0\,(1 + c_1u^{-1} + c_2u^{-2} + c_3u^{-3} + O\,(u^{-4})); \quad c_i = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

а при $u \to 0$ асимптотическое поведение $L\,(u)$ в задачах A и $Б$ соответственно имеет вид

$$L\,(u) \sim c + O\,(u^2); \quad c = \mathrm{const} \tag{3.8}$$
$$L\,(u) \sim cu^2\,(1 + O\,(u^2)); \quad c = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

Представления (3.7) — (3.9) дают возможность применить для решения уравнения (3.2) асимптотические методы больших и малых лямбда, развитые в [3, 4]. Численные расчеты, проведенные в задаче A для материала с потенциалом вида $W = \mu / 2b\ ((1 + b/n\ (I - 2)^n - 1)$; μ, $b > 0$ [5], показали, что значение λ_*, при котором данные асимптотические методы сопрягаются, зависит от параметра растяжения R. Например, при $b = 10$, $n = 2$ для $R = 0{,}8$, $\lambda_* = 2{,}8$, а для $R = 1{,}6$, $\lambda_* = 1{,}3$.

4. Пусть в тяжелой полуплоскости из несжимаемого гиперупругого изотропного материала вырезана вертикальная узкая шахта длины a. Шахта укреплена жесткими горизонтальными крепями, компенсирующими напряжения от собственного веса, которые действуют на вертикальные стороны шахты. Такая узкая шахта в дальнейшем будет рассматриваться как трещина. Полуплоскость считается предельным случаем слоя, жестко сцепленного с основанием. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем считать, что нагрузка приложена только к берегам трещины, причем касательные усилия отсутствуют. Действие нагрузки на берега трещины будем рассматривать как малое возмущение напряженно-деформированного состояния, вызванного действием сил тяжести. Отождествим параметр a из п. 2 с длиной трещины. Тогда система уравнений и граничных условий, описывающая данное напряженно-деформированное состояние, имеет вид

$$u_{i,11} + u_{i,22} + \theta_{,i} = 0, \quad u_{1,1} + u_{2,2} = 0; \quad \theta = p + \gamma u_2, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

$$2u_{2,2} + \theta - \gamma u_2 = 0; \quad 0 \leqslant x_1 < \infty, \quad x_2 = 0 \tag{4.2}$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = 0; \quad 0 \leqslant x_1 < \infty, \quad x_2 = 0$$

$$u_{2,1} + (1 + \gamma x_2)u_{1,2} = 0, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leqslant x_2 < \infty \tag{4.3}$$

$$\theta - 2u_{2,2} - (\gamma x_2 u_2)_{,2} = 2f\ (x_2), \quad x_1 = 0, \quad 0 \leqslant x_2 < 1$$

$$u_1 = 0; \quad x_1 = 0, \quad 1 < x_2 < \infty$$

Из уравнений (4.1) получим, что u_1 и u_2 — бигармонические функции, а θ — гармоническая функция. Бигармоническую функцию u_2 ищем в специальном виде (всюду далее интегрирование по α и β ведется в пределах от 0 до ∞)

$$\begin{aligned} u_2\ (x_1, x_2) = {} & \int B\ (\alpha)\alpha x_1 e^{-\alpha x_1} \cos \alpha x_2 d\alpha + \\ & + \int K\ (\alpha)\ (1 - \alpha x_1)e^{-\alpha x_1} \sin \alpha x_2 d\alpha + \\ & + \int (C\ (\beta) + \beta x_2 D\ (\beta))e^{-\beta x_2} \sin \beta x_1 d\beta \end{aligned} \tag{4.4}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_1\ (x_1, x_2) = {} & - \int B\ (\alpha)\ (1 + \alpha x_1)e^{-\alpha x_1} \sin \alpha x_2 d\alpha - \\ & - \int K\ (\alpha)\alpha x_1 e^{-\alpha x_1} \cos \alpha x_2 d\alpha + \int (C\ (\beta) - D\ (\beta) + \beta x_2 D\ (\beta))e^{-\beta x_2} \cos \beta x_1 d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = 2\ \{ & \int B\ (\alpha)\alpha e^{-\alpha x_1} \sin \alpha x_2 d\alpha + \\ & + \int K\ (\alpha)\alpha e^{-\alpha x_1} \cos \alpha x_2 d\alpha - \int D\ (\beta)\beta e^{-\beta x_2} \cos \beta x_1 d\beta\} \end{aligned}$$

Граничные условия при $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$ соответственно примут вид

$$\int \beta\ (D\ (\beta) - C\ (\beta)) \sin \beta x_1 d\beta = \int \alpha x_1 B\ (\alpha)e^{-\alpha x_1}\, d\alpha; \quad 0 \leqslant x_1 < \infty \tag{4.5}$$

$$\int C\ (\beta)\ (\beta + \varkappa) \cos \beta x_1 d\beta = \int ((2 - \alpha x_1)\alpha K\ (\alpha) - \varkappa \alpha x_1 B\ (\alpha))e^{-\alpha x_1}\, d\alpha; \quad 0 \leqslant x_1 < \infty$$

$$\int \alpha K\ (\alpha) \sin \alpha x_2 d\alpha + \varkappa x_2 \int \alpha B\ (\alpha) \cos \alpha x_2 d\alpha = 0; \quad 0 \leqslant x_2 < \infty \tag{4.6}$$

$$\int \alpha B\ (\alpha) \sin \alpha x_2 d\alpha - \varkappa x_2 \int K\ (\alpha) d/dx_2\ (x_2 \sin \alpha x_2)\, d\alpha = f\ (x_2) + F\ (D, C); \quad 0 \leqslant x_2 < 1$$

$$\int B\ (\alpha) \sin \alpha x_2 d\alpha = 0; \quad 1 < x_2 < \infty$$

$$F\ (D, C) = \int \{D\ (\beta)\beta e^{-\beta x_2} + d/dx_2\ ((C\ (\beta) + \beta x_2 D\ (\beta))\ (1 + \varkappa x_2)e^{-\beta x_2}\} d\beta, \quad \varkappa = \gamma/2$$

Использовав в (4.5) и (4.6) формулы для синус- и косинус-преобразования Фурье [6], получим

$$\alpha K\ (\alpha) = \varkappa \frac{d}{d\alpha}(\alpha B\ (\alpha)) \tag{4.7}$$

$$\beta\ (D\ (\beta) - C\ (\beta)) = \frac{4}{\pi} \int B\ (\alpha)\ \alpha^3 \beta\ (\alpha^2 + \beta^2)^{-2}\, d\alpha$$

$$C\ (\beta)\ (\beta + \varkappa) = \frac{4}{\pi} \varkappa \int B\ (\alpha)\ \alpha\ (\alpha^2 + \beta^2)^{-3}\ (3\alpha^2\beta^2 - \beta^4)\, d\alpha$$

$$(4.8)\qquad \int \alpha \left(B(\alpha) + \varkappa^2 \frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^{-1}\frac{d}{d\alpha}(\alpha B(\alpha))\right)\right)\sin \alpha x_2\, d\alpha =$$

$$= f(x_2) + \int B(\alpha) K(\alpha, x_2)\, d\alpha; \quad 0 \leqslant x_1 < 1$$

$$\int B(\alpha) \sin \alpha x_2\, d\alpha = 0; \quad 1 < x_2 < \infty$$

$$K(\alpha, u) = \frac{2}{\pi}\int \alpha e^{-\beta u}(\alpha^2 + \beta^2)^{-3}(\beta + \varkappa)^{-1}\{\alpha^2\beta(\alpha^2 +$$

$$+ \beta^2)(\beta + \varkappa)(1 + \varkappa u)(2 - \beta u) + \varkappa(3\alpha^2\beta^2 - \beta^4)((1 + \beta u)(\beta + \varkappa) -$$

$$- \beta^2 u(2 + \varkappa u))\}\, d\beta, \quad \delta = 1/\varkappa$$

Решение системы (4.8) будем искать в виде

$$(4.9)\qquad B(\alpha) = \int_0^1 \varphi(t)\, \delta^2(\delta^2 - t^2)^{-1} J(\alpha t)\, dt; \quad J(\alpha t) = \begin{cases} J_1(\alpha t), & \delta > 1 \\ J_1(\alpha t) - J_1(\alpha\delta), & \delta \leqslant 1 \end{cases}$$

где $J_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка. Таким образом, можно автоматическ: удовлетворить второму уравнению (4.8), а из первого, дифференцируя под знаком интеграла, имеем

$$(4.10)\qquad \int_0^\infty \alpha \sin \alpha x_2\, d\alpha \int_0^1 \varphi(t) J_1(\alpha t)\, dt = f(x_2) + \int_0^1 \varphi(t) S(x_2, t)\, dt$$

$$S(x_2, t) = \int_0^\infty K(\alpha, x_2)\, \delta^2(\delta^2 - t^2)^{-1} J(\alpha t)\, d\alpha$$

Сводя известным методом [7] уравнение (4.10) к уравнению Фредгольма второго рода, получим

$$(4.11)\qquad \varphi(x_2) = F(x_2) + \int_0^1 R(x_2, t)\, \varphi(t)\, dt$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x f(t)\, t\, (x^2 - t^2)^{-1/2}\, dt$$

$$R(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^x S(t_1, t)\, t_1\, (x^2 - x_1{}^2)^{-1/2}\, dt_1$$

$$R(x, t) = \frac{\delta^2}{\delta^3 - t^2}\int_0^\infty d\beta \Big\{ s\,[\varkappa x\,(sF(s))' - (sF(s))'']\,Q +$$

$$+ \varkappa x\left[\varkappa[\Phi(s)(s^2 + 2) - sF(s) + 2] + \left(1 - \frac{2\beta}{\beta + \varkappa}\right)(sF(s) -\right.$$

$$\left. - \Phi(s) - 1) - \Phi(s))\right] T \Big\}$$

$$z = \beta t, \quad s = \beta x, \quad u = \beta\delta; \quad F(z) = I_0(z) - L_0(z), \; \Phi(z) = I_1(z) - L_1(z) - 2/\pi$$

$$Q = \begin{cases} (zF(z))'', & \delta > 1 \\ (zF(z))'' - (uF(u))^\circ, & \delta \leqslant 1 \end{cases}, \quad T = \begin{cases} z(zF(z))', & \delta > 1 \\ z(zF(z))' - u(uF(u))', & \delta \leqslant 1 \end{cases}$$

Здесь I_i и L_i — соответственно модифицированные функции Бесселя и Струве. Можно показать, что норма оператора, определяемого уравнением (4.11), ограничена в пространстве $C(0, 1)$ для любого $\varkappa$, причем существует такое значение $\varkappa_* < 1$, что при $\varkappa < \varkappa_*$ оператор (4.11) является оператором сжатия.

Коэффициент концентрации напряжений в угле трещины определяется значением функции $\varphi(x)$ в точке $x = 1$. Численные расчеты, проведенные для значений $\varkappa < 1$, показывают, что величина коэффициента интенсивности напряжений уменьшается с ростом δ.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hill R.* On the theory of plane strain in finitely deformed compressible materials. — Math. Proc. Camb. Philos Soc., 1979, v. 86, No. 1, p. 161—178.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений, встречающихся при изучении смешанных задач математической физики для областей с цилиндрическими границами.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 401—413.
4. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел.— ПММ, 1967; т. 31, вып. 4, с. 704—710.
5. *Knowles J. K.* The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids.— Internat. J. Fract., 1977, v. 13, No. 5, p. 611—639.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 343 с.
7. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1981

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.05.82 Подписано к печати 19.07.82 Т-13181 Формат бумаги 70×108[1]/16
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 36,5 тыс. Уч.-изд. л. 15,5 Бум. л. 5,5
Тираж 2343 экз. Зак. 1711

Издательство «Наука», 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 10