УДК 62—50

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА НА РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Анисович В. В.

Рассматривается задача оптимизации нелинейных систем с краевыми условиями общего вида и квадратичным критерием качества. Формулируются условия существования оптимального управления. Оптимальные управления записываются в явном виде как функции фазовой координаты и решений вспомогательных краевых задач. Различные прикладные задачи механики приводят к нахождению оптимальных режимов рассматриваемых систем [1].

1. Рассмотрим управляемую систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + B(x, t)\,u(t),\ t \in [t_0, t_1] \tag{1.1}$$
$$g(x(t_0),\ x(t_1)) = 0$$

Здесь $x(t)$ — n-мерная вектор-функция, $u(t)$ — m-мерная кусочно-непрерывная вектор-функция, $A(t), B(x, t)$ — непрерывные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, $g(y, z)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция.

Заметим, что иногда граничное условие (1.1) состоит из двух соотношений в начале $t = t_0$ и конце $t = t_1$ процесса управления размерности m_0 и m_1 соответственно

$$g_0(x(t_0)) = 0,\ g_1(x(t_1)) = 0,\ m_2 + m_1 = n$$

В частности, если формульно допустить, что одна из величин m_0 или m_1 равна нулю, то уравнения (1.1) имеют вид задачи Коши.

Из всего множества кусочно-непрерывных $u(t) \in R^m$ будем рассматривать такие $u(t) \in U \subseteq R^m$, которым соответствует по крайней мере одно решение $x(t)$ краевой задачи (1.1) и функционал (звездочка означает транспонирование)

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} (u^*Ku + u^*L^*x + x^*Lu + x^*Mx^*)\,dt \tag{1.2}$$

принимает конечное значение. Предполагается, что U — непустое множество. Здесь $K(t),\ L(t),\ M(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей, причем $K(t)$ — положительно-определенная и $K(t),\ M(t)$ симметричны.

Требуется найти такое управление $\bar{u}(t) \in U$ и соответствующее ему решение $\bar{x}(t)$ краевой задачи (1.1), чтобы функционал (1.2) принимал наименьшее значение. Найденное таким образом управление $\bar{u}(t)$ будем называть оптимальным.

В приложениях важно [2] найти оптимальное управление $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t)$ как функцию соответствующего ему решения $\bar{x}(t)$, т. е. решить задачу синтеза оптимального управления. Применение динамического программирования для задач синтеза приводит к нестандартным уравнениям [1, 2], при решении которых возникают известные трудности. Для нахождения синтезирующего оптимального управления $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, t)$ задачи (1.1). (1.2) используем подход [3]. Введем вспомогательную матрицу $N(t)$ размерности $n \times n$ и приведем функционал (1.2) с учетом (1.1) к каноническому виду.

Рассмотрим систему краевых задач

$$\begin{aligned} N^{\circ} &= NBK^{-1}B^*N + N(BK^{-1}L^* - A) + (LK^{-1}B^* - A^*)N + \\ &+ LK^{-1}L^* - M \\ &x^*(t_0)\,N(t_0)\,x(t_0) - x^*(t_1)\,N(t_1)\,x(t_1) = 0,\quad B = B(x, t) \\ x^{\circ} &= Ax - BK^{-1}B^*Nx - BK^{-1}L^*x,\ \ g(x(t_0),\ x(t_1)) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

и предположим, что (1.3) имеет по крайней мере одно решение $(\bar{x}(t),\ \bar{N}(t))$.

Теорема. При выполнении всех приведенных выше условий синтезирующее оптимальное управление задачи (1.1), (1.2) существует и вычисляется по формуле

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = -K^{-1}[B^*(\bar{x}, t)\,\bar{N} + L^*]\,\bar{x} \tag{1.4}$$

причем $\inf J(x, u) = J(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

Доказательство. В силу симметрии первой краевой задачи системы (1.3) матрица $N(t)$ симметрична. Действительно, транспонируя первую краевую задачу в (1.3) и вычитая, получаем

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} & d(N - N^*)/dt = (N - N^*)BK^{-1}B^*N + N^*BK^{-1}B^*(N - N^*) + \\ & + (N - N^*)(BK^{-1}L^* - A) + (LK^{-1}B^* - A^*)(N - N^*) \\ & x^*(t_0)[N(t_0) - N^*(t_0)]x(t_0) = x^*(t_1)[N(t_1) - N^*(t_1)]x^*(t_1) \end{aligned}$$

Задача (1.5) имеет очевидное решение $N(t) - N^*(t) = 0$, следовательно, $N(t) = N^*(t)$.

Так же как и в [4], выражая M из первого уравнения системы (1.3), а затем Ax из (1.1) и учитывая симметричность матриц K, M, N, получаем

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} & x^*Mx = x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBK^{-1}L^*x + \\ & + x^*NBu + x^*LK^{-1}B^*Nx + u^*B^*Nx + \\ & + x^*LK^{-1}L^*x - d(x^*Nx)/dt \end{aligned}$$

Используя (1.6), функционал (1.2) запишем в каноническом виде

$$(1.7)\qquad J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} G^*KG\,dt, \quad G = u + K^{-1}L^*x + K^{-1}B^*(x, t)Nx$$

В силу положительной определенности матрицы K имеем $J(x, u) \geqslant 0$, следовательно, наименьшее значение функционала (1.7) достигается на векторе $G = 0$. Таким образом, оптимальное управление вычисляется по формуле (1.4). Подставляя (1.4) в (1.1), получаем вторую краевую системы (1.3), которая дает возможность из (1.3) определить $(\bar{x}(t), \bar{N}(t))$. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Требование существования решения краевой задачи (1.3) сужает рассматриваемый класс задач (1.1), (1.2), так как в общем случае минимальное значение функционала (1.2) может быть как положительным (при $L = 0$, $M \geqslant 0$), так и отрицательным (при норме $\| L \|$ достаточно большой). Однако, хотя полученное решение и не исчерпывает всех возможных случаев, представление управления в виде (1.4) имеет известные преимущества [1, 2]. Применение необходимых условий оптимальности 1, 2] совместно с полученным достаточным условием позволяет уменьшить число подозрительных на оптимальность решений. Вопрос о существовании по крайней мере одного решения (1.3) решается при помощи известных критериев [5]. При наличии малого параметра в правой части уравнения (1.1) применяются асимптотические методы [6].

2°. Вычисление оптимального управления (1.4) сводится к решению системы краевых задач (1.3), которые в приложениях решаются численно.

3°. При наличии нескольких оптимальных управлений (1.4) и соответствующих им решений задачи (1.1), доставляющих нулевое значение (1.2), возникают вопросы выбора практически осуществимого устойчивого режима, выделения областей захвата каждого из режимов и т. д. В этом случае проводятся дополнительные исследования с использованием физических свойств управляемого объекта.

4°. Как отмечалось в [7], вопрос синтеза систем, обладающих оптимальными периодическими, почти периодическими, и в частности квазипериодическими движениями, почти не изучен. Системы такого типа описывают ряд важных прикладных задач механики, химической технологии, кардиологии и др. (см. [7]) и приведенную там библиографию). Очевидно [6], указанные системы могут быть записаны в виде (1.1). Для проверки условия (1.3), например, в почти периодическом случае существует ряд критериев [8]. При наличии малого параметра в правой части уравнений (1.3) могут быть использованы теоремы существования, приведенные в [6].

2. Пусть управляемый процесс с критерием качества (1.2) описывается краевой задачей

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} & x^\circ(t) = A(t)x(t) + u(t) + \varphi(x, t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad g(x(t_0) \\ & x(t_1)) = 0 \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция. Будем искать такое управление $\bar{u}(t) \in U$, чтобы функционал (1.2) на решениях $\bar{x}(t)$ задачи (2.1) принимал наименьшее значение.

Рассматриваемую задачу (1.2), (2.1) заменим следующей эквивалентной задачей оптимизации:

(2.2) $$x^\circ(t) = A(t)\,x(t) + B(x,\ t)\,v(t),\quad t \in [t_0,\ t_1],\quad g(x(t_0),\ x(t_1)) = 0$$

$$I(x, v) = \int_{t_0}^{t_1} (v^*Kv + x^*Lv + v^*Lx + x^*Mx)\,dt \to \inf$$

$$B(x(t),\ t)\,v(t) = u(t) + \varphi(x(t),\ t)$$

Скалярная функция $B = B(x,\ t)$ определяется на основании равенства

(2.3) $$u^*Ku + x^*Lu + u^*Lx = v^*Kv + x^*L^*v + v^*Lx$$

Соотношение (2.3) обеспечивает равенство подынтегральных функций в (1.2), (2.2) за счет выбора $B = B(x,\ t)$, следовательно, $\inf J(x,\ u) = \inf I(x,\ v)$, т. е. введение n-мерной вектор-функции $v(t)$ и скалярной функции B посредством последнего равенства (2.2) и (2.3) позволяет задачи (1.2), (2.1) записать в форме (1.1), (1.2).

Оптимальное управление задачи (2.2) при выполнении условий теоремы вычисляется по формуле (1.4).

Из последнего равенства (2.2) находим

(2.4) $$u(x,\ t) = -B(x,\ t)\,K^{-1}[B(x,\ t)\,N + L^*]\,x - \varphi(x,\ t)$$

При помощи (2.3) получаем уравнение относительно B. Пусть $B = \Phi(x,\ N,\ t)$ — решение (2.3). Тогда, подставляя $B = \Phi(x,\ N,\ t)$ в систему (1.3), определяем $(\bar{x}(t),\ \bar{N}(t))$, при помощи которых находим оптимальное управление задачи (1.2), (2.1)

$$\bar{u}(\bar{x},\ t) = -\,\Phi(\bar{x}, \bar{N},\ t)\,K^{-1}[\Phi(\bar{x},\ \bar{N},\ t)\,N + L^*]\,\bar{x} - \varphi(\bar{x},\ t)$$

В технических задачах, например в задаче об ориентации деталей переменным магнитным полем [9], в следящих системах с люфтом [10] и т. д., «внешние» обобщенные силы являются силами трения, например вязкого [9, 10]. Динамика таких систем описывается безразмерным скалярным уравнением первого порядка $x^a + x = uB(x)$, где $x(t)$ — обобщенная скорость, $u(t)$ — управляющее воздействие, $B(x(t))$ — характеристика внешних сил. Если внешняя сила $B(x) = \sqrt{x}$, то задачу оптимизации системы с периодической скоростью и энергетическим критерием качества можно сформулировать в виде

$$x^\circ = -x + u\sqrt{x},\quad x(0) = x(T),\quad J(x,\ u) = \int_0^T (u^2 - x^2)\,dt \to \inf$$

Используя теорему п. 1, получаем оптимальное решение $\bar{x}(t) = 1$, $\bar{u}(t) = 1$ (тривиальный случай покоя $x(t) = u(t) = 0$ не рассматривается).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брайсон А., Хо Юши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.
3. *Анисович В. В., Крюков Б. И., Мадорский В. М.* Об одном подходе к решению задач оптимального управления.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 2, с. 265—268.
4. *Анисович В. В.* Синтез оптимального управления в одной минимаксной задаче оптимизации периодических процессов.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 11, с. 184—186.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
6. *Акуленко Л. Д.* Асимпототическое решение двухточечных краевых задач.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 632—639.
7. *Тонков Е. Л.* Оптимальные периодические движения управляемой системы.— В кн.: Математическая физика. Вып. 21. Киев: Наукова думка, 1977, с. 45—59.
8. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти-периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
9. *Ветюков М. М., Ходжаев К. Ш.* Уравнения медленных движений систем с квазициклическими координатами и электромеханических систем.— В кн.: Динамика систем. Вып. 9. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1976, с. 92—106.
10. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.

Брест

Поступила в редакцию
13.V.1981