УДК 62—50

О ЗАДАЧЕ УБЕГАНИЯ ПО ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

Азамов А.

Рассмотрена дифференциальная игра, в которой преследователь движется по всей плоскости с единичной скоростью, а убегающий — по заданной кривой с ограниченной скоростью, большей единицы. Строится стратегия убегания, обеспечивающая для расстояния между игроками оценку снизу положительной постоянной.

1. Постановка задачи. На плоскости задана регулярная кривая Γ из класса гладкости C^2, по которой движется убегающий со скоростью, не превышающей σ, $\sigma > 1$. Преследователь, скорость которого не превосходит по модулю единицы, движется по всей плоскости и стремится настичь убегающего. Дальнейшее уточнение постановки задачи (информированность и класс допустимых стратегий убегающего, понятие о возможности убегания и др.) можно проследить из доказательства основной теоремы в п. 4.

Цель работы — построение стратегии убегающего, позволяющей избежать поимки, а также вывод оценки для расстояния между преследователем и убегающим. Она примыкает к статьям [1, 2]. В [1] решена задача убегания в случае, когда число преследователей произвольно, а убегающий движется в окрестности произвольно заданной прямой. В [2] доказано существование оптимальных стратегий преследователя и убегающего в случае, когда кривая Г — окружность. Если в рассматриваемой игре кривую Г заменить графом, то снова возникает нетривиальная игра.

2. Предварительные построения. Введем следующие предположения.

Предположение А. Кривизна кривой Г ограничена (по абсолютной величине) числом $1/\rho$, $\rho > 0$.

Если $\rho \geqslant 1$, то очевидно, что кривизна ограничена и числом 1, так что можно положить $\rho = 1$. Поэтому без потери общности можно считать $\rho \leqslant 1$ или ρ заменить на $\min\{1, \rho\}$.

Предположение Б. Кривая Г либо замкнута, либо в обоих направлениях от каждой своей точки имеет бесконечную длину.

Очевидно, что если кривая Г имеет конечную длину хотя бы в одном направлении, то при определенных расположениях игроков в начале игры преследователь настигает убегающего за конечное время. О мотивировке предположения A см. п. 5.

Предположение A позволяет локализовать задачу. Пусть Q_0 — произвольная точка кривой Г, П — прямоугольник, центр которого находится в точке Q_0, две стороны параллельны касательной Г в точке Q_0 и имеют длину $k\rho$, а другая пара сторон в два раза короче. Здесь и в дальнейшем k — положительное число, зависящее только от ρ и σ и выбираемое специальным образом, причем $k \leqslant 1/\sqrt{5}$.

Лемма 1. В окрестности П каждой точки $Q_0 \in \Gamma$ кривая Г в соответствующей системе координат представляется графиком функции $y = f(x)$, $|x| \leqslant k\rho$, где $f \in C^2$, $f(0) = f'(0) = 0$. Для функции $f(x)$ имеют место неравенства

$$(2.1)\qquad |f'(x)| \leqslant |x|\cdot(\rho^2 - x^2)^{-1/2} \leqslant k(1-k^2)^{-1/2}$$

$$|x| \leqslant s(x) = \int_0^x [1 + f'^2(x)]^{1/2}\,dx \leqslant |x|\cdot(1-k^2)^{-1/2}$$

$$|f(x)| \leqslant x^2/\rho$$

Доказательство. Введем декартову систему координат следующим образом: точка Q_0 — начало координат, ось Ox совпадет с касательной Г в точке Q_0, положительная полуось Oy направлена в сторону центра кривизны, если кривизна кривой Г в точке Q_0 отлична от нуля; в противном случае направление оси Oy произвольно (фигура).

В силу регулярности кривой Г она представляется графиком функции $y = f(x)$, во всяком случае на некотором интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Для значений x, взятых из этого интервала, используя предположение A и интегрируя, находим

$$-x/\rho \leqslant f'(x)[1 + f'^2(x)]^{-1/2} \leqslant x/\rho$$

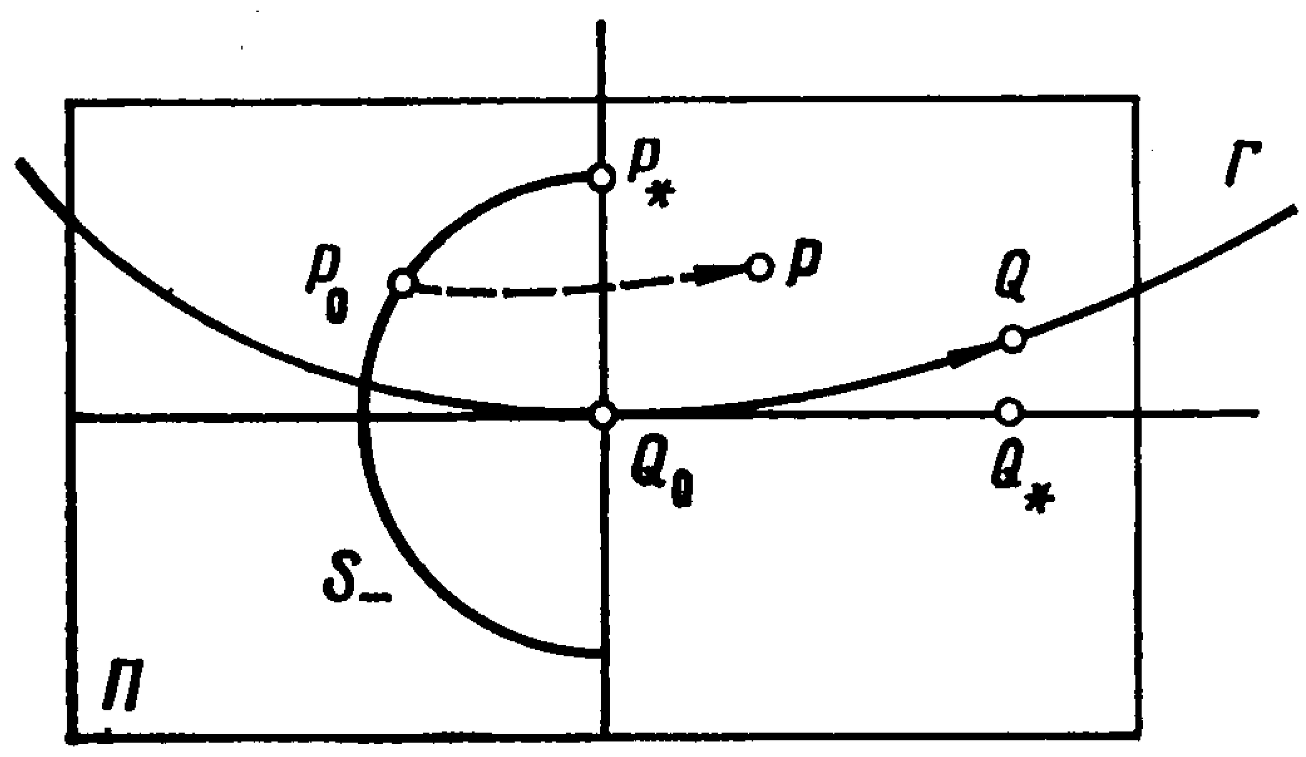
Отсюда следует первое неравенство (2.1) для $|x| < \varepsilon$. Но если на каком-то интервале, содержащем точку $x = 0$, выполнено первое неравенство (2.1), то функция $y = f(x)$

имеет ограниченную производную и кривая Г не может выйти из угла, образованного прямыми

$$y = \pm k (1 - k^2)^{-1/2} x$$

Поэтому представление кривой Г графиком функции $y = f(x)$ можно продолжить на отрезок $|x| \leqslant k\rho$, так как $k \leqslant 1/\sqrt{5}$.

3. Стратегия убегающего. Введем в рассмотрение число $\delta > 0$ следующим образом $P_0Q_0 \leqslant k^2\rho$, то $\delta = P_0Q_0$, в противном случае $\delta = P_0Q_0$. Рассмотрим окружность $S : x^2 + y^2 = \delta^2$. Если для начальных положений P_0, Q_0 соответственно преследователя и убегающего имеет место неравенство $P_0Q_0 > k^2\rho$, то положим скорость убегающего равной нулю до тех пор, пока не окажется $PQ = k^2\rho$. Здесь и в дальнейшем P, Q — положения игроков в текущий момент времени t, PQ — расстояние между точками P и Q. Если же $P_0Q_0 \leqslant k^2\rho$, то по определению $P_0 \in S$. Итак, можно считать $P_0 \in S$.



Для определения направления убегания окружность S разделим нормалью к кривой Г в точке Q_0 на две полуокружности $S_\pm : x = \pm (\delta^2 - y^2)^{1/2}$. Пусть для определенности $P_0 \in S_-$. Тогда убегающему предпишем двигаться из точки Q_0 в сторону возрастания x, т. е. по части $y = f(x)$, $x \geqslant 0$ кривой Г (до точки $k\rho$, $f(k\rho)$).

4. Оценка расстояния PQ. *Лемма 2.* Пусть $P_0 = (x_0, y_0)$. Положим $P_* = (0, \delta)$ при $y_0 \geqslant 0$ и $P_* = (0, -\delta)$ при $y_0 < 0$. Тогда $P_0Q \geqslant P_*Q$ для любой точки $Q = (x, f(x)) \in Г$, $0 \leqslant x \leqslant k\rho$.

Доказательство. Ввиду полной аналогии впредь будем считать, что $y_0 \geqslant 0$. Имеем $|f(x)| \leqslant x$ (см. последнее неравенство (2.1)) и

$$|y_0 - \delta| = \delta - (\delta^2 - x_0^2)^{1/2} \leqslant -x_0, x_0 \leqslant 0$$

Поэтому $f(x)(y_0 - \delta) = |f(x)||y_0 - \delta| \leqslant -xx_0$, $xx_0 + f(x) y_0 \leqslant f(x)\delta$. Последнее неравенство равносильно требуемому.

Лемма 3. Пусть момент времени T определен условием: $Q = (k\rho, f(k\rho))$ при $t = T$. Тогда

(4.1) $$PQ \geqslant \delta^2 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \quad PQ \leqslant \delta \text{ при } t = T$$

Доказательство. С учетом леммы 2 имеем

$$PQ \geqslant P_0Q - PP_0 \geqslant P_*Q - PP_0$$

Но из леммы 1 вытекает, что

$$PP_0 \leqslant t = \frac{s(x)}{\sigma} \leqslant \frac{x}{\sigma}(1 - k^2)^{-1/2} \leqslant \frac{1+k}{\sigma} x$$

поскольку $1 \leqslant (1 + k)^2 (1 - k^2)$. Кроме того

$$P_*Q \geqslant P_*Q_* - QQ_*, \quad Q_* = (x, 0)$$

Следовательно, для доказательства первого неравенства (4.1) достаточно вывести

(4.2) $$(x^2 + \delta^2)^{1/2} - (1 + k)\sigma^{-1}x - f(x) \geqslant \delta^2$$

Учитывая условия $|x| \leqslant k\rho \leqslant 1/\sqrt{5}$ и $\delta \leqslant k^2\rho \leqslant 1/5$, можно показать, что $(x^2 + \delta^2)^{1/2} \geqslant x + \delta^2$. Поэтому неравенство (4.2) следует из соотношения

$$x \geqslant (1 + k)\sigma^{-1}x + x^2\rho^{-1}$$

которое, в свою очередь,— следствие условия $k \leqslant (\sigma - 1)/(\sigma + 1)^{-1}$.

Таким образом, при

$$k \leqslant \min\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sigma + 1}{\sigma + 1}\right\}$$

выполняется оценка $PQ \geqslant \delta^2$ для $t \subset [0, T]$.

Аналогично изложенному выше доказательство второго неравенства (4.1) сводится к проверке неравенства

(4.3) $$(x^2 + \delta^2)^{1/2} \geqslant T + \rho^{-1}s^2 + \delta$$

Учитывая что

$$x = k\rho,\ T = \sigma^{-1}s(k\rho) \leqslant k\rho\sigma^{-1}$$

(см. второе неравенство (2.1)), (4.3) заменим более сильным неравенством

$$(k^2\rho^2 + \delta^2)^{1/2} \geqslant k\sigma^{-1}(1 - k^2)^{-1/2}\rho + k^2\rho + \delta$$

Это неравенство возводим в квадрат и вместо δ подставим большую величину $k^2\rho$. Тогда после сокращений будем иметь

$$1 \geqslant \sigma^{-2}(1 - k^2)^{-1} + 3k^2 + 4k\sigma^{-1}(1 - k^2)^1$$

Полученное неравенство — следствие следующего:

$$1 \geqslant \sigma^{-2} + 4k^2 + 4k\sigma^{-1}$$

которое, в свою очередь, вытекает из условия $k \leqslant (\sigma - 1)(2\sigma)^{-1}$.

Таким образом, для завершения доказательства леммы 3 достаточно принять

$$h = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sigma - 1}{2\sigma}\right\} \tag{4.4}$$

5. **Заключение.** Если убегающий применяет построенную в п.3 стратегию, то в момент времени $t = T$ обеспечивается вторая оценка (4.2). Это позволяет продолжить процесс убегания дальше. Поскольку каждый раз убегающий пройдет путь длины $s(k\rho)$, ограниченный снизу постоянной $k\rho$ (см. второе неравенство (2.2)), то в силу предположения *Б* убегание возможно при всех $t \geqslant 0$. Тем самым доказана следующая теорема (см. определение δ и примечание к предположению *А*).

Теорема. Пусть в рассматриваемой игре выполнены предположения *А* и *Б*. Тогда возможно убегание из любых начальных положений P_0, Q_0, $P_0 \neq Q_0$. При этом процесс убегания можно вести так, что соблюдается следующая оценка для расстояния PQ между убегающим и преследователем:

$$PQ \geqslant (P_0Q_0)^2, \text{ если } P_0Q_0 < k^2 \min\{1, \rho\}$$
$$PQ \geqslant k^4 \min\{1, \rho^2\}, \text{ если } P_0Q_0 \geqslant k^2 \min\{1, \rho\}$$

где k определено формулой (4.4).

Из доказательства второго неравенства (4.1) леммы 3 можно заметить, что и в случае $P_0Q_0 < k^2 \min\{1, \rho\}$, начиная с момента времени $T = s(k\rho)/\sigma$, можно обеспечить оценку

$$PQ \geqslant k^4 \min\{1, \rho^2\}$$

Если кривизна кривой Г не ограничена, то убегающий не всегда сможет обеспечить для расстояния PQ оценку снизу положительной постоянной. Например, если в качестве Г взять гиперболическую спираль или график функции $y = x \sin(1/x)$, $x > 0$, то, исходя из многих начальных положений, преследователь может подойти к убегающему сколь угодно близко.

С другой стороны, доказательство теоремы сохраняет силу для регулярных кривых, имеющих самопересечения. Аналогичная теорема может быть доказана и для пространственных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* Одна задача уклонения от многих преследователей.— ПММ, 1976, т. 40, вып. I, с. 14—24.
2. *Flynn J. O.* Lion and Man: the boundary constraint.— SIAM J. Control, 1973, v. 11, No. 3, p. 397—411.

Ташкент

Поступила в редакцию
18.V.1981