Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 62—50

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИМЕНЬШЕЙ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ФИКСИРОВАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Никольский М. С.

Для линейных дифференциальных игр с фиксированной продолжительностью и терминальной платой строится метод приближенного вычисления наименьшей гарантированной оценки игры, дается оценка скорости его сходимости. Статья примыкает к работам [1—9].

Движение n-мерного вектора $z \in R^n$ описывается уравнением

$$z^{\cdot} = A(t)z + u + v, \quad z(t_0) = z_0; \ t \in I = [t_0, T] \ (t_0 < T) \tag{1}$$

$$u \in P(t) \subset R^n, \quad v \in Q(t) \subset R^n; \quad |P(t)| \leqslant a_1(t), \quad |Q(t)| \leqslant a_2(t) \tag{2}$$

Элементы квадратной матрицы $A(t)$ порядка n определены и суммируемы по Лебегу на I; $P(t)$, $Q(t)$ — непустые компакты для каждого $t \in I$, они зависят измеримым образом от $t \in I$ (см. [10]) и удовлетворяют указанным условиям, причем $|X| = \max_{x \in X} |x|$ для непустого компакта $X \subset R^n$, $a_i(t)$ — суммируемая по Лебегу на I функция. Качество пары измеримых функций $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $t \in I$ оценивается величиной $\varphi(z(T))$ ($\varphi(z)$ — напрерывная на R^n скалярная функция). Первый игрок распоряжается выбором u и стремится к минимизации $\varphi(z(T))$. Второй игрок распоряжается выбором вектора v и стремится к максимизации $\varphi(z(T))$. Измеримое управление $v(t) \in Q(t)$ выбирается вторым игроком как программное на I. Измеримое управление $u(t) \in P(t)$ находится в распоряжении первого игрока и строится при $t \in I$ на основании знания уравнения (1), начального состояния $z(t_0) = z_0$ и управления $v(s)$ при $t_0 \leqslant s \leqslant t$ в виде $u(t) = U(t, v_t(\cdot))$, где $v_t(\cdot)$ означает функцию $v(s)$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$, а отображение U определено на множестве измеримых функций $v(t) \in Q(t)$, $t \in I$ и отображает такие функции $v(\cdot)$ в множество измеримых функций $u(t) \in P(t)$, $t \in I$.

Игра (1) рассматривается с точки зрения первого игрока. Предполагается, что он знает уравнение (1), вектор z_0, функцию φ и управление $v_t(\cdot)$ при каждом $t \in I$. Качество данной стратегии U первого игрока естественно характеризовать величиной $\sup_{v(\cdot)} \varphi(z(T))$, где $z(T)$ (см. (1)) соответствует измеримым управлениям $v(t)$, $u(t) = U(t, v_t(\cdot))$, $t \in I$. Важной характеристикой возможностей первого игрока является величина

$$\gamma = \inf_U \sup_{v(\cdot)} \varphi(z(T)) \tag{3}$$

которая называется наименьшей гарантированной оценкой. Вычисление величины γ вызывает большие трудности. Поэтому представляет интерес приближенное вычисление γ с любой наперед заданной точностью.

Обозначим через $\Phi(t, s)$ ($t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$) матрицант (см. [11]) однородного уравнения $x^{\cdot} = A(t)x$. Отметим, что при фиксированных измеримых $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $t \in I$ для решения уравнения (1) справедлива формула Коши

$$z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)(u(s) + v(s))\,ds \tag{4}$$

Положим

$$D = \Phi(T, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T} \Phi(T, s)(P(s) + Q(s))\,ds \tag{5}$$

где интеграл понимается в обычном для теории многозначных отображений смысле (см. [10]), знак плюс означает алгебраическое сложение множеств. Можно доказать, что D — непустой выпуклый компакт.

Доопределим матричную функцию $A(t)$ (см. (1)) на $(T, 2T - t_0]$ нулевой квадратной матрицей порядка n. Теперь матрицант $\Phi(t, s)$ определен при $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant$

$\leqslant 2T - t_0$. Будем считать, что скалярное произведение в R^n произвольных векторов a, b определяется формулой $(a, b) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, где a_i, b_i — координаты векторов a, b. Отметим полезные для дальнейшего соотношения ($|\cdot|$ — операторная норма матрицы)

(6)
$$|\Phi(t, s)| \leqslant E(s, t), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2T - t_0$$
$$|\Lambda^{-1}(t)| \leqslant E(t_0, t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant 2T - t_0$$
$$E(\alpha, \beta) = \exp \int_\alpha^\beta |A(r)|\, dr, \quad t_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2T - t_0$$
$$\Lambda(t) = \Phi(t, t_0), \quad t \in [t_0, 2T - t_0]$$
$$\Phi(t, s) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(s), \quad t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2T - t_0$$

Положим для $r \geqslant 0$

(7)
$$\Omega(r) = \max_{x', x'' \in D, |x' - x''| \leqslant r} |\varphi(x') - \varphi(x'')|$$

Из непрерывности $\varphi(x)$ на D следует, что $\Omega(r) \to 0$ при $r \to +0$. Если $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на D, то $\Omega(r) = O(r)$ при $r \to +0$.

Пусть $N \geqslant 1$ — целое число. Положим

(8)
$$h = \frac{T - t_0}{N}, \quad B_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \Phi(T, s) P(s)\, ds, \quad C_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \Phi(T, s) Q(s)\, ds$$
$$i = 1, \ldots, N$$

где интеграл понимается в обычном для теории многозначных отображений смысле [10]. Отметим, что B_i, C_i — непустые выпуклые компакты.

Сопоставим с числом N величину

(9)
$$\gamma_N = \max_{\eta_1 \in C_1} \min_{\xi_1 \in B_1} \ldots \max_{\eta_N \in C_N} \min_{\xi_N \in B_N} \varphi\Big(\Phi(T, t_0) z_0 + \sum_{i=1}^N (\xi_i + \eta_i)\Big)$$

Используя формулы (3), (8), (9), можно показать, что

(10)
$$\gamma_N \leqslant \gamma$$

Получим оценку $\gamma - \gamma_N$ при $N \geqslant 1$.

Рассмотрим интеграл ($v(s) \in Q(s)$, $s \in I$ — произвольная измеримая функция; $v(s - h) = 0 \in R^n$, $t_0 \leqslant s < t_0 + h$)

(11)
$$J(v(\cdot)) = \int_{t_0}^T \Lambda^{-1}(s)(v(s) - v(s - h))\, ds$$

Имеем

(12)
$$\int_{t_0}^T \Lambda^{-1}(s) v(s - h)\, ds = \int_{t_0}^T \Lambda^{-1}(s + h) v(s)\, ds - \int_{T-h}^T \Lambda^{-1}(s + h) v(s)\, ds =$$
$$= \int_{t_0}^T \Lambda^{-1}(s) v(s)\, ds + \int_{t_0}^T (\Lambda^{-1}(s + h) - \Lambda^{-1}(s)) v(s)\, ds - \int_{T-h}^T \Lambda^{-1}(s+h) v(s)\, ds$$

Отметим, что $d(\Lambda^{-1}(t))^*/dt = -A^*(t)(\Lambda^{-1}(t))^*$, где звездочка означает транспонирование. Отсюда и из (6) вытекает следующее неравенство:

(13)
$$|\Lambda^{-1}(s + h) - \Lambda^{-1}(s)| \leqslant \alpha(s, h) = \int_s^{s+h} |A(t)| E(t_0, t)\, dt, \quad t_0 \leqslant s \leqslant T$$

Из (2), (6), (11)—(13) следует, что

(14)
$$|J(v(\cdot))| \leqslant \beta(h) = \int_{t_0}^T \alpha(s, h) a_2(s)\, ds + \int_{T-h}^T E(t_0, s + h) a_2(s)\, ds$$

Положим функцию $H(s, h)$ равной хаусдорфову расстоянию между компактами $Q(s)$, $Q(s - h)$ при $t_0 \leqslant s \leqslant T$, где $Q(r) = \{0\}$ при $t_0 - h \leqslant r < t_0$. Можно доказать, что функция $H(s, h)$ при $s \in I$ суммируема по Лебегу и

(15)
$$\int_{t_0}^T H(s, h)\, ds \to 0, \quad h \to 0$$

Очевидно

$$Q(s-h) \subset Q(s) + H(s, h) S_1, \quad s \in I \tag{16}$$

где S_1 — n-мерный шар единичного радиуса с центром в нулевой точке.

При данных $s \in I$, $x \in Q(s-h)$ рассмотрим следующее уравнение относительно $\zeta = (\xi^*; \eta^*)$:

$$\xi + \eta = x, \quad \xi \in Q(s), \quad \eta \in H(s, h) S_1$$

Среди решений ζ выделим лексикографический минимум $\zeta(s, x) = (\xi^*(s, x); \eta^*(s, x))$. При произвольной измеримой функции $v(s) \in Q(s)$, $s \in I$ положим

$$v_0(s, h) = \xi(s, v((s-h))), \quad v(s) = 0 \in R^n, \ t_0 - h \leqslant s < t_0$$

Отметим, что в силу определения $v_0(s, h)$ и (16) имеет место неравенство

$$|v_0(s, h) - v(s-h)| \leqslant H(s, h), \quad s \in I$$

Отсюда из (6), (11), (14) следует

$$\left|\int_{t_0}^{T} \Phi(T, s)(v(s) - v_0(s, h))\, ds\right| \leqslant \mu(h) = \tag{17}$$

$$= E(t_0, T)\left[\beta(h) + \int_{t_0}^{T} H(s, h) E(t_0, s)\, ds\right]$$

где в силу (13)—(15) каждое из слагаемых в квадратных скобках стремится к нулю при $h \to 0$.

Используя формулы (4), (10), (17), можно доказать справедливость неравенства

$$\gamma_N \leqslant \gamma \leqslant \gamma_N + \Omega(\mu(h)), \quad h = (T - t_0)/N$$

где $\Omega(r)$, $\mu(h)$ определяются формулами (7), (17).

Если функция $A(t)$ равномерно ограничена по норме на I, $Q(t)$ удовлетворяет условию Липшица (в смысле метрики Хаусдорфа) на I и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на D (см. (5)), то из (7), (13), (14), (17) следует, что $\Omega(\mu(h)) = O(h)$ при $h \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданнный момент времени.— Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 394—420.
3. *Чистяков С. В.* К решению игровых задач преследования.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 825—832.
4. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
5. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978, 270 с.
6. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
7. *Friedman A.* Differential Games. New York: Wiley-Interscience, 1971. 350 p.
8. *Полищук Е. Г.* Оценка сверху для цены линейной дифференциальной игры.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 254—257.
9. *Никольский М. С.* О некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 2, с. 272—275.
10. *Castaing Ch.* Sur les multi-applications mesurables.— Rev. franc. inform. et rech. oper., 1967, No. 1, p. 91—126.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.V.1981