

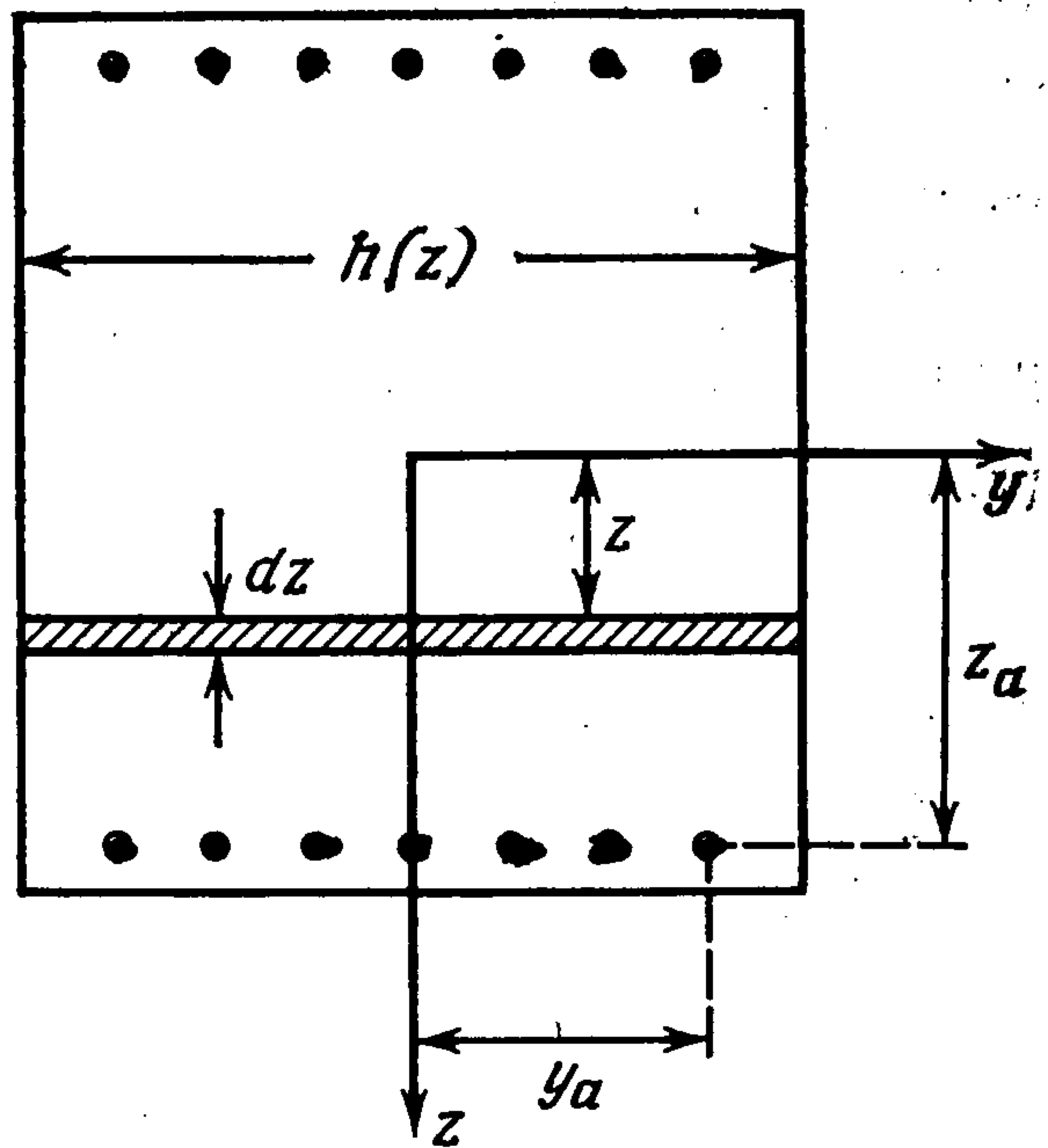
УДК 539.376

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПРОЧНОСТИ ФОРМЫ ВЯЗКОУПРУТОГО НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО АРМИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ

Генкин Л. В., Колмановский В. Б.

Рассматривается задача о выборе формы стержня минимального объема, при которой нормальные напряжения в арматуре и основном материале не превосходят заданных значений. Устанавливаются соотношения, определяющие оптимальную форму. Изучается зависимость оптимальной формы от величины изгибающего момента и функции, характеризующей неоднородность старения. Приводятся результаты численных расчетов. Работа примыкает к исследованиям [1—3].

1. Постановка задачи. Вязкоупругий армированный стержень длины l расположен в недеформированном состоянии вдоль оси x . В продольной плоскости, являющейся плоскостью его симметрии, на стержень действует изгибающий момент $M(x)$. Введем в поперечном сечении стержня декартову систему координат y, z , начало которой совпадает с центром тяжести поперечного сечения. За ось y примем нейтральную ось, ось z перпендикулярна оси y и лежит в плоскости поперечного сечения (фиг. 1). Обозначим индексами a и 0 величины, относящиеся к арматуре и к основному материалу. Так, $\sigma_a^i(t, x)$ — нормальное напряжение в i -м прутке арматуры в сечении $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ (n — число прутков арматуры). Аналогично, нормальные напряжения в основном материале обозначены $\sigma_0(t, x, z)$, где z — расстояние до нейтральной оси. Требуется площадь поперечного сечения $S(x)$ выбрать так, чтобы объем стержня



Фиг. 1

$$V = \int_0^l S(x) dx$$

был минимален и выполнялись ограничения на нормальные напряжения (числа α_a и α_0 заданы)

$$(1.1) \quad |\sigma_a^i(t, x)| \leq \alpha_a, \quad |\sigma_0(t, x, z)| \leq \alpha_0 \\ 0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Расположение арматуры задано и фиксировано, причем проекции прутков арматуры на плоскость yz заключены в прямоугольнике $|y| \leq y_a, |z| \leq z_a$. Величины y_a и z_a заданы и одинаковы для всех сечений.

Выведем формулы для нормальных напряжений при следующих предположениях: в каждом сечении стержня центр тяжести арматуры совпадает с центром тяжести основного материала; в процессе деформирования

поперечные сечения стержня остаются плоскими и справедлив закон плоских сечений; деформации $\varepsilon_a^i(t, x)$ и напряжения $\sigma_a^i(t, x)$ в арматуре связаны законом Гука

$$(1.2) \quad \sigma_a^i(t, x) = E_a \varepsilon_a^i(t, x)$$

Основной материал предполагается вязкоупругим и неоднородно-старееющим, т. е. [1]

$$(1.3) \quad \varepsilon_0(t, x, z) = \sigma_0(t, x, z) E_0^{-1} - \int_0^t \sigma_0(\tau, x, z) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau$$

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad \gamma > 0, \quad t \geq \tau$$

В (1.2) и (1.3) E_a и E_0 — постоянные модули упругости; кусочно-непрерывная ограниченная функция $\rho(x)$ — возраст элемента с координатой x относительно элемента с координатой $x = 0$; $C(t, \tau)$ — мера ползучести; функция старения $\varphi(\tau) > 0$ непрерывна, монотонно убывает и стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к мере ползучести C_0 основного материала в его старом возрасте.

Согласно закону плоских сечений и (1.2) имеем

$$(1.4) \quad \varepsilon_0(t, x, z) = \omega(t, x) z, \quad \sigma_a^i(t, x) = E_a \omega(t, x) z_i$$

(функция $\omega(t, x)$ — кривизна изогнутой оси стержня, z_i — расстояние от оси y до i -го прутка арматуры в сечении x).

Обозначим через $R(E, t, \tau)$ резольвенту ядра $(\partial/\partial \tau) C(t, \tau)$ с параметром E . Тогда из (1.3), (1.4) вытекает, что

$$(1.5) \quad \sigma_0(t, x, z) = z b(t, x)$$

$$b(t, x) = E_0 \left(\omega(t, x) + E_0 \int_0^t \omega(\tau, x) R(E_0, \tau + \rho(x), t + \rho(x)) d\tau \right)$$

Составим уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^n S_a^i \sigma_a^i(t, x) z_i + \int_{S_0} \sigma_0(t, x, z) z h(z) dz = M(x)$$

Здесь S_a^i — площадь поперечного сечения i -го прутка арматуры, S_0 — поперечное сечение основного материала, $h(z)$ — ширина элемента поперечного сечения. Заменим в уравнении равновесия σ_a^i и σ_0 по формулам (1.4), (1.5). Получим, обозначая через I_a и I_0 соответствующие моменты инерции сечений относительно нейтральной оси, что

$$\omega(t, x) + (1 - \beta) E_0 \int_0^t \omega(\tau, x) R(E_0, t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau =$$

$$= \frac{M(x) \beta}{I_a E_a}, \quad I_a = \sum_{i=1}^n S_a^i z_i^2, \quad I_0 = \int_{S_0} z^2 h(z) dz$$

$$\beta = I_a E_a (I_0 E_0 + I_a E_a)^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

Разрешая последнее интегральное уравнение относительно кривизны ω , на основании второго соотношения (1.4) заключаем, что нормальное напряжение в арматуре дается формулой

$$(1.6) \quad \sigma_a^i(t, x) = \frac{M(x) \beta}{I_a} z_i \left(1 - (1 - \beta) E_0 \times \right. \\ \left. \times \int_0^t R(E_0 \beta, t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau \right)$$

(использовано то, что резольвента ядра $R(E, t, \tau)$ с параметром $(1 - \beta)E$ равняется $R(E\beta, t, \tau)$ (см., например, [4])). Отсюда видно, что наибольшее нормальное напряжение будет в том прутке арматуры, для которого величина $|z_i|$ максимальна, т. е. равна z_a .

Из [1] известно представление

$$R(E, t, \tau) = \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\varphi(\tau) e^{\eta(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\eta(s)} ds \right]$$

$$\eta(s) = \gamma s + \gamma E \int_0^s \varphi(s_1) ds_1$$

Поэтому

$$(1.7) \quad \int_0^t R(E_0\beta, t + \rho(x), \tau + \rho(x)) d\tau = J_0(t, \beta) =$$

$$= -\gamma \varphi(\rho(x)) \int_0^t \exp \left[-\gamma s - E_0\beta \gamma \int_0^s \varphi(s_1 + \rho(x)) ds_1 \right] ds$$

Ясно, что функция $J_0(t, \beta)$ отрицательна и монотонно убывает по t . Поэтому соотношение (1.6) позволяет переписать первое из неравенств (1.1) в следующем эквивалентном виде:

$$(1.8) \quad F(\beta, \rho) \leq \frac{\alpha_a I_a}{M(x) z_a} = \bar{\alpha}_a$$

$$F(\beta, \rho) = \beta + \beta(1 - \beta) J(\beta, \rho), \quad J(\beta, \rho) = -E_0 \lim_{t \rightarrow \infty} J_0(t, \beta)$$

Преобразуем аналогичным образом второе из ограничений (1.1). Найдем вначале выражение для функции $b(t, x)$, определенной формулой (1.5). Подставив в уравнение равновесия функции (1.5), (1.6) и используя определение величины β , получим

$$(1.9) \quad b(t, x) = M(x) E_0 E_a^{-1} I_a^{-1} \beta [1 + \beta E_0 J_0(t, \beta)]$$

В силу (1.5), (1.9), (1.7) и монотонного убывания по t функции $J_0(t, \beta)$ второе неравенство (1.1) эквивалентно следующему ($r(x)$ — расстояние от оси y до наиболее удаленной точки основного материала в сечении x)

$$(1.10) \quad \beta r(x) \leq \bar{\alpha}_0, \quad \bar{\alpha}_0 = E_a I_a (M E_0)^{-1} \alpha_0$$

Итак, поставленная задача сведена к определению такой формы поперечного сечения $S_0(x)$, при которой объем V минимален и выполнены ограничения (1.8), (1.10).

2. Оптимальная форма поперечного сечения. Предположим, что форма сечения симметрична относительно осей y и z и в первом квадранте граница ее дается однозначной положительной функцией $f(y)$, т. е. $z = f(y)$ при $z \geq 0, y \geq 0$. Обозначим через β_a наименьший корень уравнения

$$(2.1) \quad F(\beta, \rho) = \bar{\alpha}_a; \quad \bar{\alpha}_a = \alpha_a I_a [M(x) z_a]^{-1}, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

Если уравнение (2.1) не имеет корней при $0 \leq \beta \leq 1$, то положим $\beta_a = 1$. Неравенство (1.8) эквивалентно следующему

$$(2.2) \quad \beta \leq \beta_a$$

Из (1.10), (2.2) и определения β видно, что исходная задача сведена к определению функции $f(y)$ (своей для каждого сечения x), обладающей

отмеченными свойствами, для которой

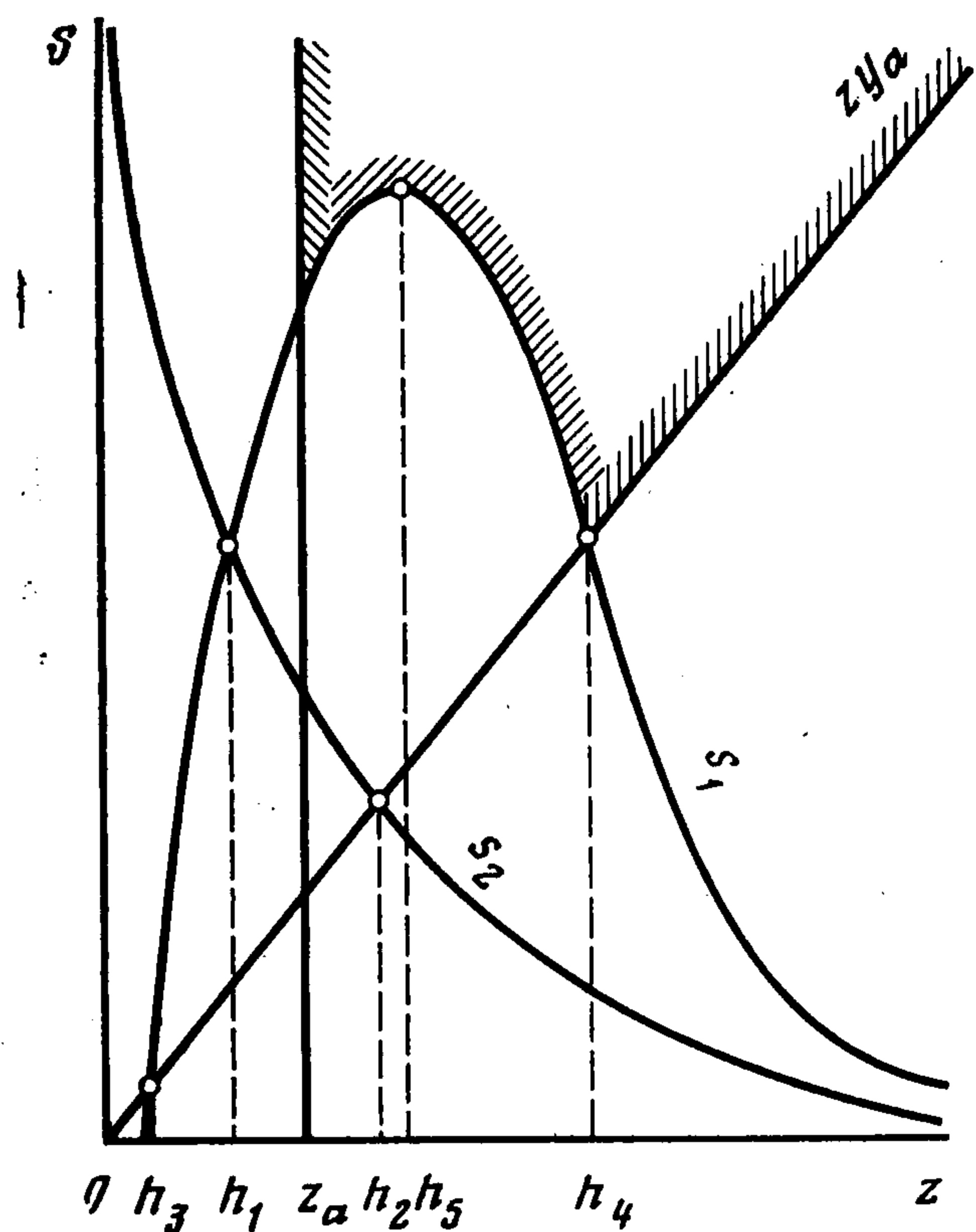
$$(2.3) \quad S_0(x) \rightarrow \min, I_0(x) \geq C_1$$

$$S_0(x) = 4 \int_0^{y_0} f(y) dy, \quad I_0(x) = \frac{4}{3} \int_0^{y_0} f^3(y) dy$$

$$C_1 = \frac{I_a E_a}{E_0} \left(\max \left(\frac{1}{\beta_a}, \frac{r(x)}{\alpha_0} \right) - 1 \right)$$

В ряде случаев оптимальной формой сечения является прямоугольник. Пусть, например, балка неармированная и ограничения снизу на форму сечения отсутствуют. Предположим, что в некотором сечении x задачу

(2.3) разрешает функция $f_0(y)$, $0 \leq y \leq y_0$, и рассмотрим наряду с ней прямоугольник со сторонами, параллельными осям y, z , симметричный относительно этих осей. Высота этого прямоугольника $2r(x)$, а ширина $2l$, где l определяется из условия $l = 3I_0(x) (4r^3(x))^{-1}$. При этом моменты инерции относительно нейтральной оси прямоугольника и фигуры, определяемой функцией $f_0(y)$, равны между собой. Площадь же прямоугольника, равная $4r(x)l$, в силу условия $f_0(y) \leq r(x)$ не превосходит площади $S_0(x)$, определяемой функцией $f_0(y)$. Поэтому в рассмотренном случае оптимальная форма сечения — прямоугольник. Будем и в общем случае оптимальную форму сечения искать среди прямоугольников.



Фиг. 2

При этом естественно считать, что в каждом сечении арматура объята основным материалом, т. е.

$$(2.4) \quad z \geq z_a, y \geq y_a$$

Значит, задача (2.3) сводится к минимизации произведения yz при ограничениях (2.4) и условии $4yz^3 \geq 3C_1$, где C_1 определено в (2.3). Высоту оптимального прямоугольника обозначим $2z_0$, а ширину — $2y_0$. Удобно ввести новую переменную $s = yz$. В переменных s, z поставленная задача принимает вид

$$(2.5) \quad s \rightarrow \min, s \geq \max [s_1(z), s_2(z), zy_a], z \geq z_a$$

$$s_1(z) = \frac{3}{4} \frac{E_a}{E_0} I_a (z\alpha_0^{-1} - 1) z^{-2}$$

$$s_2(z) = \frac{3}{4} \frac{E_a}{E_0} I_a (\beta_a^{-1} - 1) z^{-2}$$

Отметим, что оптимальное значение $s_0 = y_0 z_0$ удовлетворяет также равенству

$$(2.6) \quad s_0 = \min_{z \geq z_a} \max [s_1(z), s_2(z), zy_a]$$

Введем в рассмотрение числа h_1, \dots, h_5 , смысл которых ясен из фиг. 2. При этом корень h_1 — точка пересечения кривых s_1 и s_2 , который всегда существует и единствен. Единственный корень h_2 также всегда существует.

Можно проверить, что

$$(2.7) \quad h_1 = \bar{\alpha}_0 \beta_a^{-1}, \quad h_2 = \left[\frac{3}{4} \frac{a}{E_0 y_a} I_a (\beta_a^{-1} - 1) \right]^{1/2}$$

$$h_5 = 2\bar{\alpha}_0 = 2\alpha_0 E_a I_a (ME_0)^{-1}$$

Наконец, h_3 и h_4 — два положительных корня кубического уравнения $s_1(z) = y_a z$; они могут сливаться, а также могут не существовать. Исследование формул (2.5), (2.6) показывает, что в зависимости от параметров задачи возможны следующие варианты:

1) пусть либо $h_2 \leq h_3 \leq z_a \leq h_4$, либо $h_3 \leq h_2 \leq h_4$ и $h_1 \leq z_a$. Тогда

$$z_0 = z_a, \quad y_0 = s_1(z_a)/z_a \text{ при } s_1(z_a) \leq y_a h_4$$

$$z_0 = h_4, \quad y_0 = y_a \text{ при } s_1(z_a) > y_a h_4$$

2) пусть $h_3 \leq h_2 \leq h_4$ и $h_1 \geq z_a$. Тогда

$$z_0 = h_1, \quad y_0 = s_2(h_1)/h_1 \text{ при } s_2(h_1) \leq y_a h_4$$

$$z_0 = h_4, \quad y_0 = y_a \text{ при } s_2(h_1) > y_a h_4$$

Во всех остальных случаях (например, если $h_2 < h_3$ и $z_0 < h_3$, если $h_2 > h_4$ и т. д.) будет

$$z_0 = \max(z_a, h_2), \quad y_0 = y_a$$

Таким образом, оптимальная форма основного материала — прямоугольник, который в зависимости от параметров задачи может иметь минимальную возможную либо ширину, либо высоту.

3. Оптимальная форма сечения при больших значениях момента $M(x)$. Установим формулы для чисел h_i при $M \rightarrow \infty$. В силу (2.7) имеем

$$(3.1) \quad h_5 \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty$$

Изучим поведение h_1 . Для этого ввиду (2.7) достаточно изучить поведение β_a при $M \rightarrow \infty$. Число β_a определяется как корень уравнения (2.1), в котором величина $\bar{\alpha}_a \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Значит, используя теорему обращения Лагранжа ([5], с. 507), получаем

$$\beta_a = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \bar{\alpha}_a^j, \quad \gamma_1 = [1 + J(0, \rho)]^{-1} = [1 + E_0 \varphi(\rho(x))]^{-1} > 0$$

$$\gamma_j = \frac{1}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\beta^{j-1}} \left[\frac{1}{1 + (1 - \beta) J(\beta, \rho)} \right]^j \Big|_{\beta=0}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\gamma_1 \bar{\alpha}_a} - \frac{1}{\beta_a} = \frac{1}{\gamma_1} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{j+1} \bar{\alpha}_a^j \right] \left[\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \bar{\alpha}_a^j \right]^{-1}$$

Сходимость рядов в правой части означает, что

$$\frac{1}{\beta_a} = \frac{1}{\gamma_1 \bar{\alpha}_a} + O(1) = \frac{1 + E_0 \varphi(\rho(x))}{\alpha_a I_a} z_a M + O(1), \quad M \rightarrow \infty$$

Отсюда и из (2.7), (1.10) вытекает, что

$$(3.2) \quad h_1 \sim \frac{\alpha_0 E_a}{\alpha_a E_0} [1 + E_0 \varphi(\rho(x))], \quad z_a, \quad M \rightarrow \infty$$

$$h_2 \sim \left[\frac{3E_a I_a}{4E_0 y_a} \left(\frac{1 + E_0 \varphi(\rho(x))}{\alpha_a I_a} \right) M \right]^{1/2}, \quad M \rightarrow \infty$$

Наконец, при достаточно больших M у кубического уравнения $s_1(z) = y_a z$ существует два положительных корня h_3 и h_4 . Наибольший из них,

h_4 , в силу формул Кардано удовлетворяет соотношению

$$(3.3) \quad h_4 \sim \frac{z_a}{3} \left[\frac{3E_0}{4y_a z_a^2 E_a \alpha_0} M \right]^{1/3}, \quad M \rightarrow \infty$$

Соотношения (3.2), (3.3) и (2.7) позволяют установить оптимальную форму сечения при достаточно больших значениях момента M . Приведем ее. Для достаточно больших M ввиду (3.1), (3.2) будет

$$(3.4) \quad h_5 < h_1 < h_2$$

Введем в рассмотрение функцию

$$s_3(z) = \max(s_1(z), s_2(z)) = \begin{cases} s_2(z), & z \leq h_1 \\ s_1(z), & z \geq h_1 \end{cases}$$

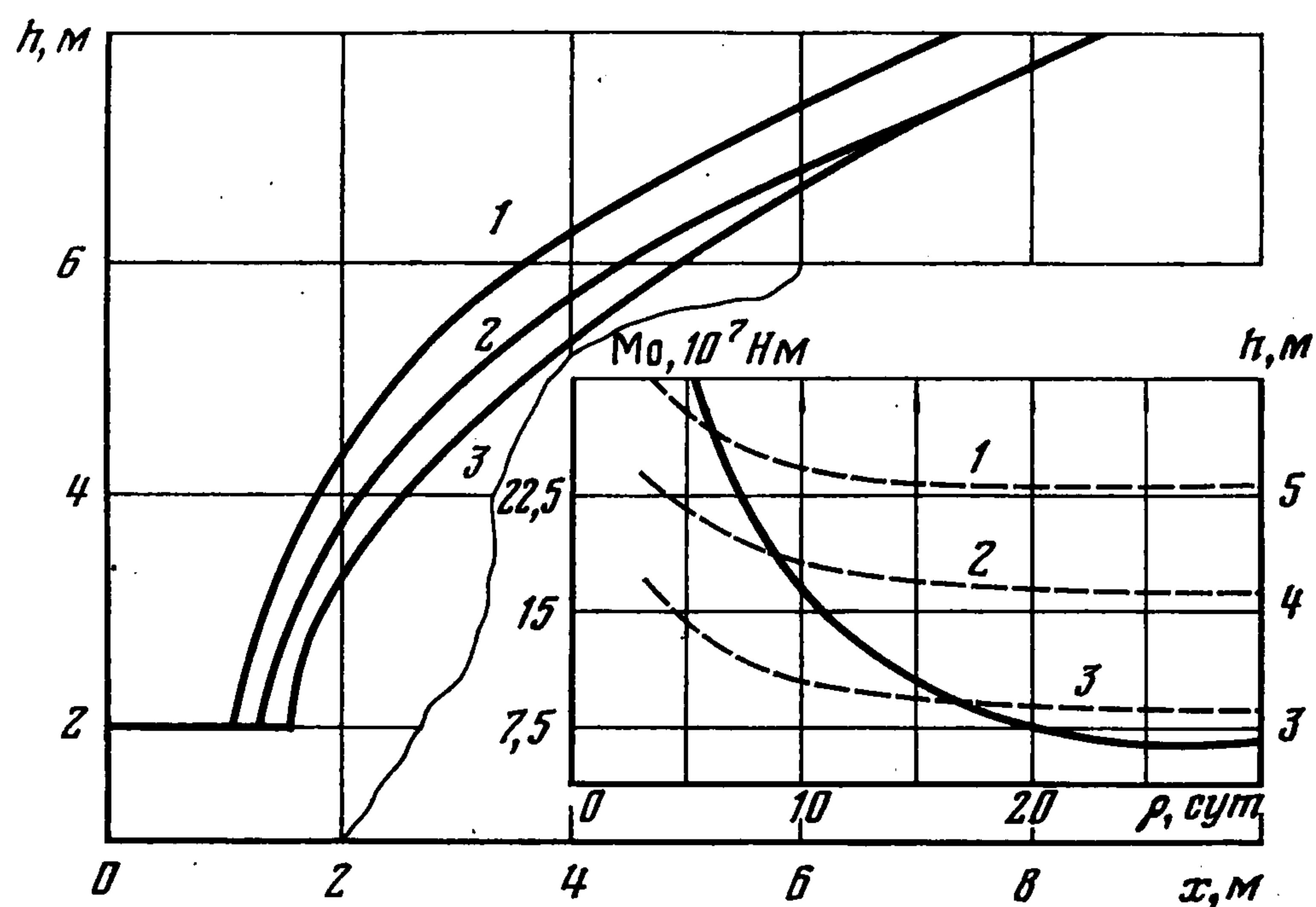
Напомним, что $s_2(z)$ монотонно убывает, а $s_1(z)$ монотонно убывает при $z \geq h_5$. Значит, в силу (3.4) функция $s_3(z)$ также монотонно убывает. Следовательно, на основании (2.6) заключаем, что оптимальное значение $s_0 = \max(y_a h_2, y_a h_4)$. Однако $h_2 \leq h_4$ (в противном случае из-за убывания функции $s_2(z)$ было бы $h_1 > h_2$, что противоречит (3.4)). Поэтому при достаточно больших M оптимальное значение $s_0 = h_4 y_a$. Значит, при больших M

$$(3.5) \quad z_0 = h_4, \quad y_0 = y_a$$

При этом зависимость оптимальной высоты z_0 от момента M дается формулой (3.3). Из соотношений (3.5) видно, что для достаточно больших моментов M оптимальная форма не зависит от возраста материала. Однако то критическое значение момента M_0 , начиная с которого оптимальная форма сечения дается формулами (3.5), уже зависит от возраста материала, причем M_0 уменьшается с увеличением возраста.

На фиг. 3 численно построен график зависимости M_0 от ρ для функции старения вида

$$(3.6) \quad \varphi(\rho) = a_0/(\gamma\rho) + C_0$$



Фиг. 3

при следующих значениях параметров: $I_a = 5,2 \text{ м}^4$, $z_a = 2 \text{ м}$; $y_a = 2 \text{ м}$; $C_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$; $a_0 = 1,42 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$; $\gamma = 0,03 \text{ сут}^{-1}$; $\alpha_a = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$; $\alpha_0 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$; $E_a = 1,96 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_0 = 2,54 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Численно получена также оптимальная форма консольной армированной балки, нагруженной сосредоточенной силой на свободном конце (сплошные кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям ρ , равным 3, 5, 20 сут). Штриховыми кривыми 1, 2, 3 показана зависимость высоты оптимального сечения от возраста ρ при значениях момента $12 \cdot 10^7$, $9 \cdot 10^7$ и $6 \cdot 10^7 \text{ Нм}$ соответственно.

Отметим еще, что

$$(3.7) \quad \partial \beta_a / \partial \rho \geq 0$$

Отсюда и из (2.6) вытекает, что при фиксированном значении момента $M(x)$ зависимость оптимальной формы поперечного сечения от возраста $\rho(x)$ убывает с увеличением ρ . Более того, площадь оптимального сечения также убывает с ростом ρ .

Докажем формулу (3.7). Если $\bar{\alpha}_a \geq 1$, то $\beta_a = 1$, т. е. $\partial \beta_a / \partial \rho = 0$. Значит, для $\bar{\alpha}_a \geq 1$ неравенство (3.7) выполняется. Пусть теперь $\bar{\alpha}_a < 1$. Тогда $\beta_a < 1$ и справедливо неравенство

$$(3.8) \quad \partial J(\beta, \rho) / \partial \rho < 0$$

Действительно, дифференцируя и интегрируя по частям выражение (1.8) для $J(\beta, \rho)$, получим

$$\partial J(\beta, \rho) / \partial \rho = \gamma J(\beta, \rho) [\varphi'(\rho) / \gamma \varphi(\rho) + \beta E_0 \varphi(\rho) + 1] - \gamma E_0 \varphi(\rho), \quad \varphi' = \partial \varphi / \partial \rho$$

Отсюда и из положительности интеграла в (1.8) видно, что

$$(3.9) \quad \text{sign } \partial J(\beta, \rho) / \partial \rho = \text{sign} \left[\beta + \psi(\rho) - \frac{1}{J(\beta, \rho)} \right]$$

$$\psi(\rho) = \frac{1}{E_0 \varphi(\rho)} \left(1 + \frac{\varphi'(\rho)}{\gamma \varphi(\rho)} \right)$$

Из свойств функции $\varphi(\rho)$ следует, что $1/\varphi(\rho)$ и $\varphi'(\rho)$ — монотонно возрастающие функции, а предел $\varphi'(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ равен нулю. Поэтому $\psi(\rho)$ — монотонно возрастающая функция и

$$(3.10) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi(\rho) = (E_0 C_0)^{-1}$$

Если $\beta + \psi(\rho) \leq 0$, то в силу (3.9) неравенство (3.8) выполнено. Пусть теперь $\beta + \psi(\rho) > 0$. Перепишем (3.9) в следующем эквивалентном виде:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \text{sign } \partial J(\beta, \rho) / \partial \rho &= \text{sign} [J(\beta, \rho) - J_1(\beta, \rho)] \\ J_1(\beta, \rho) &= (\beta + \psi(\rho))^{-1} \end{aligned}$$

Зафиксируем β . Предположим, что существует такой возраст ρ_0 , что $J(\beta, \rho_0) \geq J_1(\beta, \rho_0)$. Докажем, что для любого $\rho > \rho_0$

$$(3.12) \quad J(\beta, \rho) > J_1(\beta, \rho_0)$$

Предположим противное. Пусть ρ_1 — первый возраст, больший ρ_0 , для которого $J(\beta, \rho_1) \leq J_1(\beta, \rho_0)$. Рассмотрим отрезок $[\rho_0, \rho_1]$. Поскольку $J(\beta, \rho_0) \geq J(\beta, \rho_1)$, то в силу дифференцируемости функции (1.8) по ρ существует $\rho_2 \in (\rho_0, \rho_1)$, такое, что $\partial J(\beta, \rho_2) / \partial \rho \leq 0$. Тогда на основании (3.11) будет $J(\beta, \rho_2) \leq J_1(\beta, \rho_2)$. Из свойств $\psi(\rho)$ вытекает, что $J_1(\beta, \rho)$ непрерывна и монотонно убывает по ρ . Поэтому из предыдущего неравенства следует $J(\beta, \rho_2) < J_1(\beta, \rho_0)$, что противоречит определению ρ_1 , поскольку $\rho_2 < \rho_1$. Таким образом, предположение о существовании ρ_1 неверно. Соотношение (3.12) доказано.

На основании (3.10) имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} J_1(\beta, \rho) = q, \quad q = \left(\beta + \frac{1}{E_0 C_0} \right)^{-1}$$

В то же время из (1.8) вытекает неравенство

$$J(\beta, \rho) < \varphi(\rho) q / C_0$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\rho_3 > \rho_0$, что при $\rho > \rho_3$ будет $J(\beta, \rho) < q + \varepsilon$. Полагая $\varepsilon = J_1(\beta, \rho_0) - q > 0$, получим

$$J(\beta, \rho) < q + (J_1(\beta, \rho_0) - q) = J_1(\beta, \rho_0), \quad \rho > \rho_3$$

Это неравенство противоречит (3.12). Поэтому предположение о существовании ρ_0 неверно. Значит, для всех ρ будет $J(\beta, \rho) < J_1(\beta, \rho)$. Отсюда и из (3.11) следует (3.8).

Рассмотрим теперь решение β_a уравнения (2.1) как функцию возраста, т. е. $\beta_a = \beta_a(\rho)$. Запишем равенство

$$\frac{d}{d\rho} F(\beta_a(\rho), \rho) = \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta, \rho) \Big|_{\beta=\beta_a(\rho)} \cdot \frac{\partial \beta_a(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} F(\beta, \rho) \Big|_{\beta=\beta_a(\rho)}$$

Из (2.1) по определению β_a имеем $F(\beta_a(\rho), \rho) = \bar{\alpha}_a$, т. е.

$$\frac{d}{d\rho} F(\beta_a(\rho), \rho) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta, \rho) \Big|_{\beta=\beta_a} \geq 0$$

Вследствие (3.8) с учетом (1.8) имеем $(\partial/\partial \rho)F(\beta, \rho) < 0$. Поэтому для достижения записанного выше равенства необходимо $\partial \beta_a(\rho)/\partial \rho \geq 0$. Формула (3.7) установлена.

Из предыдущего вытекает, что $J(\beta, \rho) < J_1(\beta, \rho)$ и

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} J(\beta, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} J_1(\beta, \rho) = q$$

Отсюда получаем оценки

$$q < J(\beta, \rho) < [\beta + \psi(\rho)]^{-1}$$

Эти оценки тем точнее, чем больше ρ . Из этих неравенств и (2.1) следуют оценки для β_a

$$\bar{\alpha}_a \left[\frac{1 - \bar{\alpha}_a}{\psi(\rho)} + 1 \right]^{-1} < \beta_a < \bar{\alpha}_a [(1 - \bar{\alpha}_a) E_0 C_0 + 1]^{-1}$$

удобные при больших ρ , а также при больших моментах, когда $\bar{\alpha}_a$ мало.

Для функции старения вида (3.6) имеем из (1.8)

$$J(\beta, \rho) = E_0 (a_0 + \rho C_0) \int_0^{\infty} \exp[-\gamma s \rho (1 + \beta_1)] (s + 1)^{-\beta_1} ds$$

$$\beta_1 = \beta E_0 C_0$$

Интеграл в этой формуле — вырожденная гипергеометрическая функция Шлемилха. В данном случае неравенство (3.7) можно установить непосредственно, интегрируя выражение для $J(\beta, \rho)$ по частям.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Задача оптимизации в теории ползучести для неоднородных балок, подверженных старению. — Прикл. механика, 1979, т. 15, № 10, с. 97—106.
3. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих стержней. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 709—721.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, М.: Физматгиз, 1959. 807 с.