Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 539.376

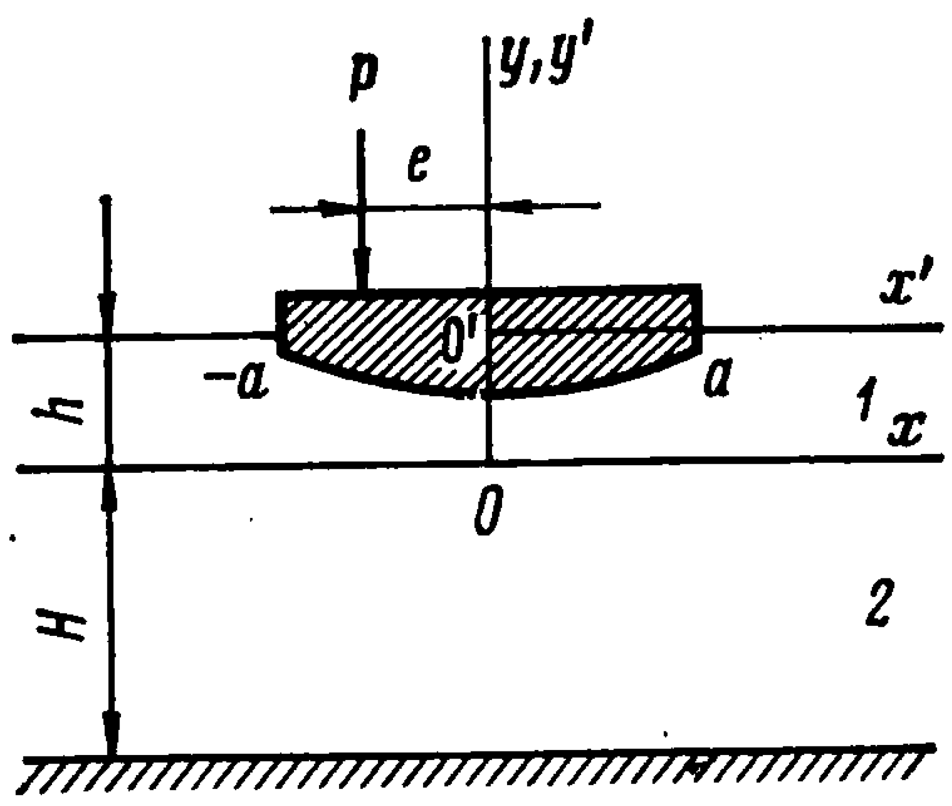
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

Коваленко Е. В., Манжиров А. В.

Дается решение задачи о вдавливании без трения штампа в двухслойную стареющую вязкоупругую полосу в случае плоской деформации. Верхний слой тонкий. Нижний слой шарнирно защемлен по основанию. Предполагается, что слои контактируют между собой без трения, сила, действующая на штамп, и область контакта не изменяются с течением времени, реологические свойства слоев описываются уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов, слои изготовлены в различные моменты времени.

При помощи интегрального преобразования Фурье по продольной координате и принципа соответствия в линейной теории ползучести стареющих сред рассматриваемая задача приводится к определению неизвестных под штампом контактных напряжений из интегрального уравнения второго рода, содержащего операторы Фредгольма и Вольтерра. В общем случае решение полученного уравнения строится асимптотическим методом при относительно большом значении времени. В частности, когда наследственные свойства материалов слоев одинаковы, найдены разложения для основных характеристик явления, справедливые во всем диапазоне изменения времени.

1. Пусть с поверхностью слоя большой толщины H, лежащего без трения на недеформируемом основании, шарнирно сцеплен слой $0 \leqslant y \leqslant \leqslant h$. Предположим, что в верхнюю границу такой составной среды вдавливается без трения силой P с эксцентриситетом приложения e жесткий штамп.



Фиг. 1

Свяжем с двухслойным пакетом систему координат xOy, а со штампом — $x'O'y'$. Поверхность основания штампа в осях $x'y'$ дается функцией $y' = g(x')$, а линия контакта определяется неравенством $|x'| \leqslant a$ (фиг. 1).

Реологические свойства двухслойного основания будем описывать уравнениями линейной теории ползучести стареющих материалов [1] (каждому слою, считая сверху вниз, присвоен номер $k = 1, 2$)

$$e_{ij}^{(k)}(t) = (1+\nu^{(k)})\left[\frac{s_{ij}^{(k)}(t)}{E^{(k)}} - \int_{\tau_0}^{t} s_{ij}^{(k)}(\tau) K^{(k)}(t-\tau_1^{(k)}, \tau-\tau_1^{(k)})\, d\tau\right] \tag{1.1}$$

$$\varepsilon(t) = (1-2\nu^{(k)})\left[\frac{\sigma^{(k)}(t)}{E^{(k)}} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma^{(k)}(\tau) K^{(k)}(t-\tau_1^{(k)}, \tau-\tau_1^{(k)})\, d\tau\right]$$

$$K^{(k)}(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} C^{(k)}(t,\tau)$$

Здесь $s_{ij}^{(k)}(t)$, $e_{ij}^{(k)}(t)$ — девиаторы тензоров напряжений и деформаций, $3\varepsilon^{(k)}(t)$ — объемная деформация, $\sigma^{(k)}(t)$ — среднее гидростатическое давление, $K^{(k)}(t,\tau)$ — ядро ползучести при одноосном напряженном состоянии, $C^{(k)}(t,\tau)$ — мера ползучести, τ_0 — момент приложения напряжений к элементу стареющей вязкоупругой среды, $\tau_1^{(k)}$ — момент изготовления этого элемента. В (1.1) учтено, что $\nu^{(k)}$ — коэффициент Пуассона и $E^{(k)}$ — модуль упругомгновенной деформации материала k-го слоя от времени не зависят.

Остановимся на свойствах функции $C^{(k)}(t, \tau)$. Известно [1], что мера ползучести $C^{(k)}(t, \tau)$ в условиях естественного старения, когда процесс старения материала считается не зависящим от процесса деформаций, может быть представлена в виде произведения двух функций

$$C^{(k)}(t, \tau) = C^{(k)}(t-\tau, \tau) = \varphi^{(k)}(\tau) f^{(k)}(t-\tau) \tag{1.2}$$

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \lim_{t\to\infty} C^{(k)}(t, \tau), \quad \forall\tau, \quad C^{(k)}(t, t) \equiv 0$$

одна из которых, $\varphi^{(k)}(\tau)$, учитывает процесс старения материала, а другая, $f^{(k)}(t-\tau)$ — влияние длительности его загружения. Функция старения $\varphi^{(k)}(\tau)$ непрерывна, ограничена и монотонно убывает с увеличением возраста, стремясь к некоторой постоянной $C_0^{(k)}$, где $C_0^{(k)}$ — предельное значение меры ползучести материала в его старом возрасте. Функция $f^{(k)}(t-\tau)$, характеризующая наследственные свойства материала, должна в интервале $0 \leqslant t-\tau < \infty$ изменяться в пределах $0 \leqslant f^{(k)}(t-\tau) \leqslant 1$. Аппроксимируя $f^{(k)}(t-\tau)$ конечной суммой экспоненциальных функций

$$f^{(k)}(t-\tau) = \sum_{j=0}^{N} B_j^{(k)} \exp[-\gamma_j^{(k)}(t-\tau)]$$

$$B_0^{(k)} = 1, \quad \sum_{j=0}^{N} B_j^{(k)} = 0, \quad \gamma_0^{(k)} = 0, \quad \gamma_j^{(k)} > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

где $B_j^{(k)}$, $\gamma_j^{(k)}$ — постоянные параметры, подобранные надлежащим образом для данного материала, запишем согласно (1.1), (1.2)

$$\lim_{t\to\infty} K^{(k)}(t, \tau) = [\varphi^{(k)}(\tau)]' \tag{1.3}$$

Используя теперь результаты работы [2] и принцип соответствия [1], получим интегральное уравнение относительно неизвестных под штампом контактных давлений $q(x, t)$. С учетом малости величины ha^{-1} и обозначений

$$\xi^* = \xi a^{-1}, \quad x^* = xa^{-1}, \quad t^* = t\tau_0^{-1}, \quad \theta^{(k)} = 0{,}5E^{(k)}[1-(\nu^{(k)})^2]^{-1}$$
$$c = 0{,}5ha^{-1}\pi\theta^{(2)}(\theta^{(1)})^{-1}, \quad (\tau_1^{(k)})^* = \tau_1^{(k)}\tau_0^{-1}, \quad q^*(x^*, t^*) =$$
$$= (\theta^{(2)})^{-1} q(x, t), \quad E^{(k)}C^{(k)}(t, \tau) = [C^{(k)}(t^*, \tau^*)]^*, \quad g(x) = ag^*(x^*)$$

звездочку далее опустим), запишем его в виде

$$c\left[q(x,t) - \int_1^t q(x,\tau) K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)}, \tau-\tau_1^{(1)})\, d\tau\right] + \tag{1.4}$$
$$+ \left\{\int_{-1}^{1} q(\xi, t)[-\ln|\xi - x| + D]\, d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_1^t K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)}, \tau-\tau_1^{(2)})\, d\tau \int_{-1}^{1} q(\xi,\tau)[-\ln|\xi - x| + D]\, d\xi\right\} =$$
$$= \pi[\delta(t) + \alpha(t)x - g(x)]$$
$$|x| \leqslant 1, \ 1 \leqslant t \leqslant T < \infty, \ D = \ln(Ha^{-1}) - 0{,}352$$

[1] *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, М., 1981, № 170, 75 с.

Здесь $\delta(t)+\alpha(t)x$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы P и момента $M = Pe$.

К уравнению (1.4) необходимо добавить условия статики

$$(1.5)\qquad R_1 = P(a\theta^{(2)})^{-1} = \int_{-1}^{1} q(x,t)\,dx,\quad R_2 = Pe(a^2\theta^{(2)})^{-1} = \int_{-1}^{1} xq(x,t)\,dx$$

Заметим, что при $t = 1$ уравнение (1.4) и условия (1.5) приобретают известный из теории классических контактных задач вид и соответствуют задаче о вдавливании штампа в упругую полосу большой толщины, покрытую винклеровскими пружинами [3]

$$(1.6)\qquad cq(x,1)+\int_{-1}^{1} q(\xi,1)[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi = \pi[\delta(1)+\alpha(1)x-g(x)]\quad (|x|\leqslant 1)$$

$$(1.7)\qquad R_1 = \int_{-1}^{1} q(x,1)\,dx,\quad R_2 = \int_{-1}^{1} xq(x,1)\,dx$$

Кроме того, показано [3], что если функция $g(x)\in L_2(-1,1)$, то решение интегрального уравнения (1.6) в пространстве $L_2(-1,1)$ существует и единственно при любых значениях параметра $c\in(0,\infty)$.

2. Построим решение уравнения (1.4) поставленной задачи в случае $P = \text{const}$. Не нарушая общности рассуждений, изучим только четный вариант ($g(x)$ — четная функция x, $\alpha(t)\equiv 0$), имея в виду, что для нечетного случая все можно сделать аналогично.

В соответствии с алгоритмом, изложенным в [4], рассмотрим вместо (1.4) эквивалентное ему интегральное уравнение

$$(2.1)\qquad c\left[q(x,t)-q(x,1)-\int_1^t q(x,\tau)K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)},\tau-\tau_1^{(1)})\,d\tau\right]+$$
$$+\left\{\int_{-1}^{1}[q(\xi,t)-q(\xi,1)][-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi-\right.$$
$$\left.-\int_1^t K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)},\tau-\tau_1^{(2)})\,d\tau\int_{-1}^{1} q(\xi,\tau)[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi\right\}=$$
$$=\pi[\delta(t)-\delta(1)]\quad(|x|\leqslant 1,\quad 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

и будем искать его решение в форме

$$(2.2)\qquad q(x,t) = q_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty} z_i(t)q_i(x)$$

Представляя функцию $\delta(t)$, характеризующую жесткое перемещение штампа, в виде [4]

$$(2.3)\qquad \delta(t) = \delta y(t)+\delta_0+\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i y_i(t)$$

где δ, δ_j ($j = 0, 1, \ldots, \ldots$) — постоянные, получим

$$(2.4)\qquad cq_0(x)\int_1^t K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)},\tau-\tau_1^{(1)})\,d\tau+$$
$$+\int_1^t K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)},\tau-\tau_1^{(2)})\,d\tau\int_{-1}^{1} q_0(\xi)[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi=$$
$$=\pi\delta[y(1)-y(t)]$$

$$(2.5)\qquad \int_1^t z_i(\tau)\,[K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)},\tau-\tau_1^{(2)})+\alpha_i c K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)},\tau-\tau_1^{(1)})]\,d\tau= \\ =(1+c\alpha_i)\,[z_i(t)-z_i(1)]$$

$$(2.6)\qquad y_i(t)-y_i(1)=z_i(t)-z_i(1)-\int_1^t z_i(\tau)\,K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)},\tau-\tau_1^{(2)})\,d\tau$$

$$(2.7)\qquad \alpha_i A q_i=q_i+\pi\alpha_i\delta_i,\quad A\varphi=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi$$

$$|x|\leqslant 1,\quad 1\leqslant t\leqslant T<\infty,\quad i\geqslant 1$$

Отметим, что при таком выборе решения задачи (см. формулы (2.2), (2.3)) в общем случае уравнению (2.4) точно удовлетворить не удается. Принимая во внимание поведение ядер ползучести при большом времени (1.3), удовлетворим уравнению (2.4) в асимптотическом смысле при $t\to\infty$. Положим

$$\int_1^t K^{(2)}(t-\tau_1^{(2)},\tau-\tau_1^{(2)})\,d\tau\approx F(\tau_1^{(1)},\tau_1^{(2)})\int_1^t K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)},\tau-\tau_1^{(1)})\,d\tau$$

$$F(\tau_1^{(1)},\tau_1^{(2)})=\varphi^{(2)}(1-\tau_1^{(2)})\,[\varphi^{(1)}(1-\tau_1^{(1)})]^{-1}$$

(данное соотношение выполняется точно, если наследственные свойства материалов слоев одинаковы). Тогда

$$(2.8)\qquad y(t)=-\int_1^t K^{(1)}(t-\tau_1^{(1)},\tau-\tau_1^{(1)})\,d\tau,\quad y(1)=0$$

а $q_0(x)$ определяется из интегрального уравнения типа (1.6)

$$(2.9)\qquad cq_0(x)+F(\tau_1^{(1)},\tau_1^{(2)})\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,[-\ln|\xi-x|+D]\,d\xi=\pi\delta\quad(|x|\leqslant 1)$$

метод решения которого детально изложен в [3].

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма (2.7) и будем искать его решение в форме ряда Фурье по ортонормированной системе полиномов Лежандра

$$(2.10)\qquad q_i(x)=\pi\sqrt{2}\,\alpha_i\delta_i\sum_0^\infty a_j^{(i)}P_{2j}^*(x),\quad P_j^*(x)=\sqrt{\frac{1+2j}{2}}\,P_j(x)$$

Известно [5], что они составляют базис в $L_2(-1,1)$. Разлагая далее ядро (2.7) в двойной ряд по указанной системе многочленов

$$(2.11)\qquad -\ln|\xi-x|+D=\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty r_{mn}P_{2m}^*(\xi)\,P_{2n}^*(x)$$

подставляя (2.10), (2.11) в (2.7), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим (δ_{0n} — символ Кронекера)

$$(2.12)\qquad \alpha_i\sum_{j=0}^\infty a_j^{(i)}r_{nj}=a_n^{(i)}+\delta_{0n}\quad(i\geqslant 1,\,n=0,1,\ldots)$$

Согласно неравенству

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty r_{mn}^2=B_1<\infty,\quad B_1=\mathrm{const}$$

вытекающему из (2.11), можно утверждать, что оператор в левой части (2.12) действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 и является там вполне непрерывным. Таким образом, если основной определитель системы (2.12) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [5] о ее разрешимости. Кроме того, с учетом (2.10) из (1.5) найдем

$$R_1 = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i z_i(t), \quad P_0 = \int_{-1}^{1} q_0(x)\,dx \tag{2.13}$$

$$P_i = \int_{-1}^{1} q_i(x)\,dx = \pi\sqrt{2}\,\alpha_i\delta_i a_0^{(i)} = 0, \quad a_0^{(i)} = 0 \quad (i \geqslant 1)$$

Второе из условий (2.13) служит для определения неизвестных величин α_i. Действительно, из системы (2.12) имеем $a_0^{(i)} = \Delta_1\Delta^{-1}$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из Δ заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $\alpha = \alpha_i$ $(i \geqslant 1)$ вещественны. Определив числа α_i, найдем затем из бесконечной алгебраической системы (2.12) $a_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и, таким образом, построим последовательность функций $\{q_i(x)(\pi\sqrt{2}\alpha_i\delta_i)^{-1}\}$.

Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных δ_i и $z_i(1)$ $(i \geqslant 1)$ интегральному уравнению (1.6) $(\alpha(1) \equiv 0)$. Предполагая, что $g(x) \in L_2(-1, 1)$, представим ее в виде

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_{2n}^*(x) \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14), (2.11) в (1.6), получим

$$cX_j + \sum_{n=0}^{\infty} r_{jn} X_n = \pi[\sqrt{2}\,\delta(1)\,\delta_{0j} - g_j] \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{2.15}$$

$$X_j = \int_{-1}^{1} q(x, 1)\,P_{2j}^*(x)\,dx \tag{2.16}$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (2.15), из соотношения (2.16) с учетом формулы

$$q(x, 1) = q_0(x) + \pi\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\delta_i z_i(1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} P_{2j}^*(x)$$

будем иметь

$$\mathbf{B}\mathbf{z}(1) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in l_2 \tag{2.17}$$

$$\mathbf{B} = \pi\sqrt{2}\,\|\alpha_i\delta_i a_j^{(i)}\|, \quad \mathbf{b} = \left\{X_j \Big| - \int_{-1}^{1} q_0(x)\,P_{2j}^*(x)\,dx\right\}$$

$$\mathbf{z}(1) = \{z_i(1)\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Остановимся на решении системы (2.17). Во-первых, принимая во внимание результаты работы [6], можно утверждать, что $\beta_i < \alpha_i < \beta_{i+1}$ $(i \geqslant 1)$, где β_i — простые характеристические числа оператора A (2.7). А тогда $\alpha_i = O[i(\ln i)^{-1}]$ при $i \to \infty$. Во-вторых, полагая $\delta_i = \alpha_i^{-3/2}$ (будет обосновано ниже), в силу (2.12)

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i\delta_i a_j^{(i)}]^2 < \infty$$

т. е. оператор B вполне непрерывен из l_2 в l_2.

Элемент $\mathbf{z}^{(1)}(1) \in M$ (множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в l_2 последовательностей) назовем квазирешением [7, 8] уравнения (2.17) на M, если

$$\inf\{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^{(1)}(1)-\mathbf{b}\|_{l_2}: \mathbf{z}^{(1)}(1)\in M\}$$

Наряду с (2.17) введем урезанную систему

$$\mathbf{B}^*\mathbf{z}^*(1) = \mathbf{b}^* \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B}^* = \pi\sqrt{2}\,\|\alpha_i\delta_i a_j^{(i)}\|, \quad \mathbf{b}^* = \left\{X_j \Big| -\int_{-1}^{1} q_0(x)\,P_{2j}^*(x)\,dx\right\}$$

$$\mathbf{z}^*(1) = \{z_i(1)\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Доказано [7, 8], что если оператор $\mathbf{B}^{-1}$ (не обязательно ограниченный) существует, то квазирешение уравнения (2.17) на компакте M также существует, единственно и непрерывно зависит от правой части $\mathbf{b}$. Кроме того

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{z}^{(1)}(1)-\mathbf{z}^*(1)\|_{l_2} = 0$$

и $\mathbf{z}^*(1)$ может быть найдено, например, методами работ [7, 8].

Далее из формулы (2.10) следует

$$(q_i, q_j)_{L_2(-1,1)} = 2\pi^2(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}a_n^{(j)} \leqslant \tag{2.19}$$

$$\leqslant 2\pi^2(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[a_n^{(i)}]^2\sum_{n=0}^{\infty}[a_n^{(j)}]^2\right\}^{1/2} \leqslant 2\pi^2(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2}B_2$$

$$B_2 = \mathrm{const}; \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что в системе (2.15) $\delta(1)$ можно считать независимым от δ_i $(i \geqslant 1)$, ибо

$$\delta(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i y_i(1)$$

и определяется в ходе решения задачи через значение вдавливающей силы R_1 при помощи первого условия статики (1.7) [3]. Здесь уместно отметить, что в силу первого условия (2.13) постоянная δ также связана с R_1 (ср. (2.9) с (1.6)).

3. Перейдем к исследованию интегрального уравнения Вольтерра второго рода (2.5). Согласно ограничениям, наложенным на его ядро в п. 1, оно однозначно разрешимо [5] в пространстве непрерывных на $[1, T]$ функций-$C(1, T)$ при любых значениях параметров α_i и c. Для построения приближенного решения (2.5) ограничимся в выражениях для $\varphi^{(k)}(\tau)$ и $f^{(k)}(t-\tau)$ двумя первыми членами [1], т. е. примем

$$f^{(k)}(t-\tau) = 1 - \exp[-\gamma^{(k)}(t-\tau)] \tag{3.1}$$

$$\varphi^{(k)}(\tau) = C_0^{(k)} + A^{(k)}\exp(-\beta^{(k)}\tau), \quad \beta^{(k)} = \mathrm{const}$$

Известно [1], что решение интегрального уравнения (2.5), (3.1) может быть получено сведением последнего к некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Полагая далее для простоты $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma$, $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta$, $A^{(1)} = A^{(2)} = A^*$, $C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = C_0$, будем иметь

$$z_i^{\cdot\cdot}(t) + \gamma\,[1 + C_0 + \mu_i(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)})\,e^{-\beta t}]\,z_i^{\cdot}(t) = 0 \tag{3.2}$$

$$z_i^{\cdot}(1)\,z_i^{-1}(1) + \gamma C_0 + \gamma e^{-\beta}\mu_i(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}) = 0$$

$$\mu_i(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}) = A^*(1+\alpha_i c)^{-1}[\exp(\beta\tau_1^{(2)}) + \alpha_i c\exp(\beta\tau_1^{(1)})]$$

или

$$z_i(t) = z_i(1) - z_i(1)\gamma[C_0 + e^{-\beta}\mu_i(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)})] \times \times \int_1^t \exp\left\{-\frac{\gamma}{\beta}[\beta(1 + C_0)(\tau - 1) + e^{-\beta}\mu_i(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)})(1 - e^{-\beta(\tau-1)})]\right\} d\tau \tag{3.3}$$

Определив функции $z_i(t)$ согласно (3.3), можно построить последовательность $\{y_i(t)\}$ по формуле (2.6), которую с учетом соотношений (1.1), (1.2) запишем в виде

$$y_i(t) = z_i(t) + z_i(1)C^{(2)}(t - \tau_1^{(2)}, 1 - \tau_1^{(2)}) + \int_1^t z_i^{\cdot}(\tau)C^{(2)}(t - \tau_1^{(2)}, \tau - \tau_1^{(2)})\,d\tau, \quad y_i(1) = z_i(1) \tag{3.4}$$

т. е. вместе с тем можно выписать и решение поставленной задачи $q(x, t)$ и $\delta(t)$. Для окончательного обоснования построенного решения следует доказать сходимость рядов (2.2), (2.3), а также линейную независимость системы функций $\{y_i(t)\}$.

Теорема 1. Система функций $\{y_i(t)\}$ линейно независима.

Рассуждения будем вести для любой конечной системы функций $\{z_i(t)\}$ и допустим, что она линейно зависима, т. е. существуют такие постоянные D_j, среди которых есть отличные от нуля, и выполняется равенство

$$\sum_{j=1} D_j z_j(t) \equiv 0 \tag{3.5}$$

Тогда с учетом формулы (2.5) и поведения ядер ползучести при достаточно большом времени запишем

$$\sum_{j=1} \frac{F(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}) + c\alpha_j}{1 + c\alpha_j} D_j z_j(t) \equiv 0 \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) будем иметь

$$\sum_{j=n} \frac{F(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}) + c\alpha_j}{1 + c\alpha_j} D_j z_j(t) \equiv 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Последнее равенство выполняется только тогда, когда все $D_j \equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает линейную независимость системы функций $\{z_i(t)\}$.

Линейная независимость функций $\{y_i(t)\}$ следует из формул (3.3), (3.4).

Теорема 2. Ряд (2.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на $[1, T]$ при всех $T > 1$ и определяет обобщенное решение уравнения (1.4).

Действительно, оценим остаток ряда

$$\left\| \sum_{n=j}^{\infty} z_n(t) q_n(x) \right\|_{L_2(-1,1)}^2 \leqslant \sum_{m,n=j}^{\infty} z_n(t) z_m(t) (q_m, q_n)_{L_2(-1,1)} \leqslant \leqslant 2\pi^2 B_2 \sum_{n=j}^{\infty} |\alpha_n^{-1/2} z_n(t)| \sum_{m=j}^{\infty} |\alpha_m^{-1/2} z_m(t)| \leqslant \varepsilon \quad (j \to \infty) \tag{3.7}$$

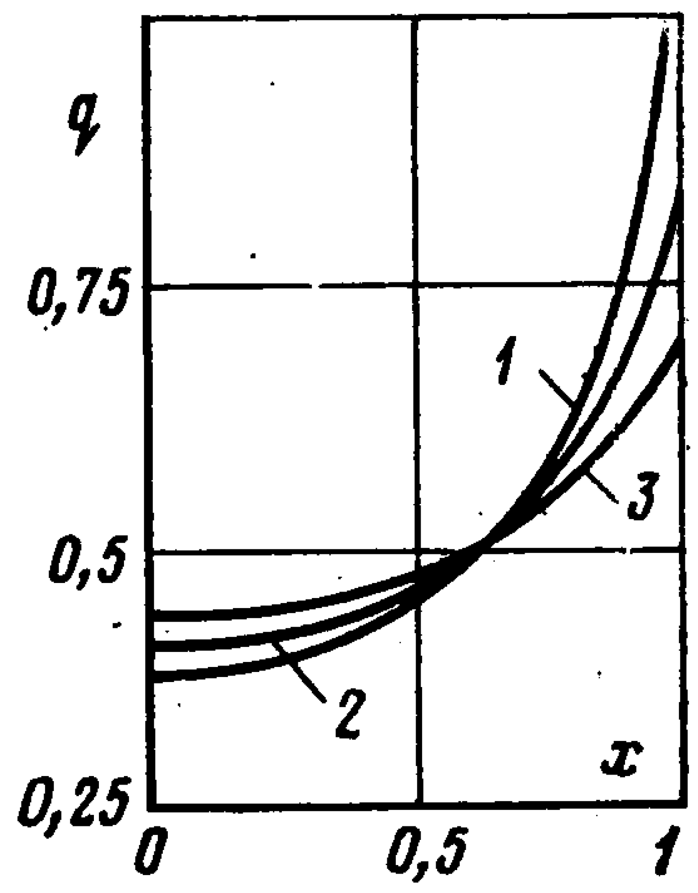
где ε — сколь угодно малое число. Здесь использовано неравенство (2.19), факт ограниченности $z_i(t)\,[z_i(1)]^{-1}$, а также рассуждения, приведенные в конце п. 2.

Если выполнено неравенство (3.7), то ряд (2.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равновмерно по $t \in [1, T]$ $(T \geqslant 1)$ и первое свойство обобщенного решения (см. [9], с. 500) выполнено. Как следует из рассуждений п. 2, остальные его свойства также соблюдены. Теорема доказана. (Сходимость ряда (2.3) устанавливается аналогично.)

4. В качестве примера приведем решение поставленной задачи в случае, когда $g(x) \equiv 0$ (штамп имеет плоское основание); $e = \alpha(t) \equiv 0$; $R_1 = 1$; $Ha^{-1} = 6$, $c = 0{,}5$; $C_0 = 0{,}5522$; $A^* = 4$; $\gamma = 6$, $\beta = 3{,}1$; $\tau_0 = 100$ сут. Такие значения параметров встречаются при расчетах сооружений из бетона.

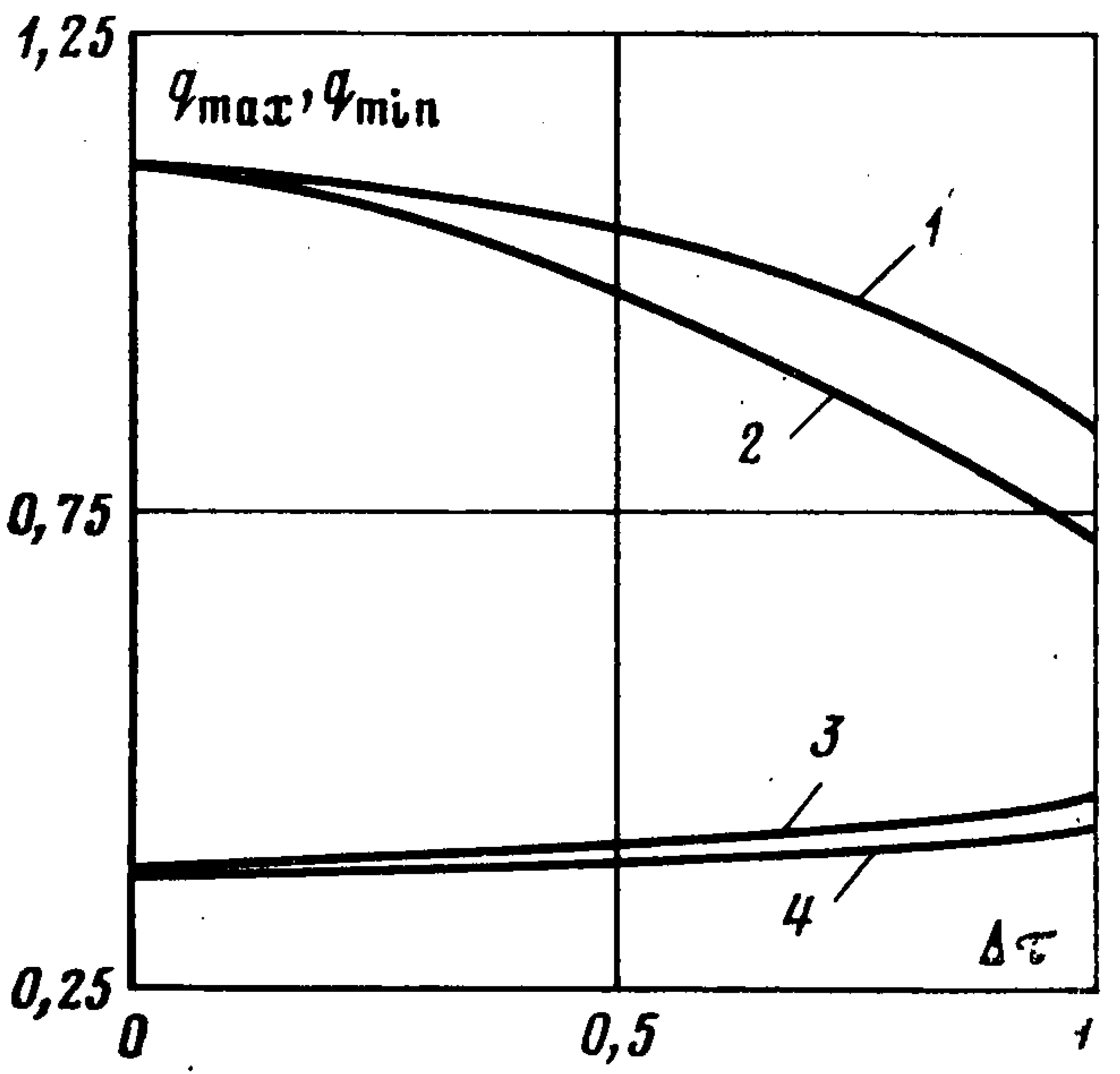
На фиг. 2 приведены графики распределения контактных давлений $q(x, t)$ при $\Delta\tau = \tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)} = 1$ и $t = 1$ (1), $t = 1{,}05$ (2), $t = 2$ (3). Видно, что с ростом времени при прочих неизменных факторах нормальные напряжения под штампом стремятся к некоторому предельному значению.

На фиг. 3 изображены зависимости между $q_{\max}(t, \Delta\tau) = q(1, t, \Delta\tau)$, $q_{\min}(t, \Delta t) = q(0, t, \Delta\tau)$ и $\Delta\tau$ при различных фиксированных значениях t ($q_{\max}(1{,}05, \Delta\tau)$—(1), $q_{\max}(2, \Delta\tau)$—(2), $q_{\min}(2, \Delta\tau)$—(3), $q_{\min}(1{,}05, \Delta\tau)$—(4)). Можно заметить, что с ростом $\Delta\tau$ максимальные контактные давления уменьшаются, а минимальные — увеличиваются.

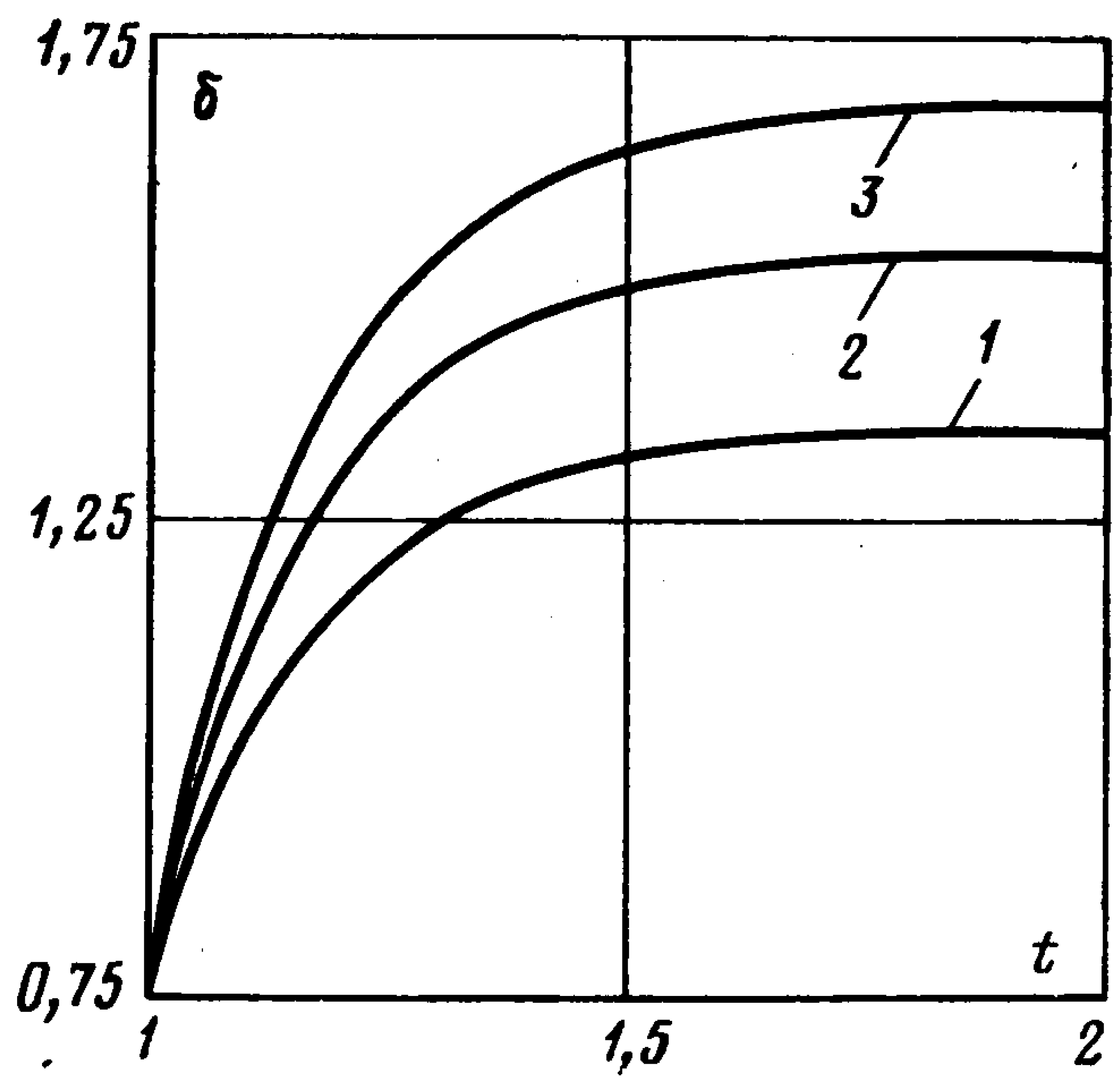


Фиг. 2

Зависимость $\delta(t)$, при фиксированных значениях $\Delta\tau$ приведена на фиг. 4 ($\Delta\tau = 0$ — (1), $\Delta\tau = 0{,}8$—(2), $\Delta\tau = 1$ — (3)). Видно, что с ростом времени t функция $\delta(t)$ возрастает и стремится к предельному значению, которое тем больше, чем больше $\Delta\tau$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Замечания. 1°. В случае, когда слои изготовлены из одного материала и имеют один и тот же возраст, а сила, действующая на штамп с плоским основанием, от времени не зависит, с учетом результатов работы [2] и принципа соответствия [1] получим, что распределение контактных давлений будет таким же, как в упругой задаче, т.е. ползучесть в этом случае не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

2°. Решение интегрального уравнения (2.5), (3.1) может быть получено в замкнутом виде и для произвольных функций старения $\varphi^{(k)}(\tau)$. В частности, при $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma$ будем иметь

$$z_i(t) = z_i(1)\left[1 + \int_1^t R_i(t, \tau)\, d\tau\right]$$

где $R_i(t, \tau)$ — резольвента ядра Н. Х. Арутюняна

$$K_i(t, \tau) = \frac{1}{1 + c\alpha_i} \frac{\partial}{\partial\tau} \{(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) [\varphi^{(2)}(\tau - \tau_1^{(2)}) + \alpha_i c \varphi^{(1)}(\tau - \tau_1^{(1)})]\}$$

вид которой приведен в [10].

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
2. *Александрова Г. П.* Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1, с. 97—106.
3. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 76—82.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 324—328.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
7. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
8. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
10. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972, с. 155—202.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1981