Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАСТИНОК

Колпаков А. Г.

Рассматривается задача о построении эффективных жесткостей композиционных пластинок, т. е. жесткостей, гарантирующих близость решений исходной задачи трехмерной теории упругости неоднородного тела к решению некоторой задачи теории квазиоднородных пластинок. Решение проводится методом гомогенизации [1—5]. Существенная особенность используемого ниже варианта теории пластинок состоит в том, что на основании механических гипотез делается переход от трехмерной задачи теории упругости к двумерной задаче теории пластинок. Методы указанного перехода обусловливают различия в методах построения эффективных характеристик.

1. Рассмотрим сначала вопрос устойчивости пластинок, априори подчиняющихся гипотезам Кирхгоффа — Лява. Изгиб таких пластинок рассмотрен в [5].

Пусть неоднородная пластинка, для определенности, жестко закреплена и в ее плоскости действуют напряжения $\lambda\sigma_{11}$, $\lambda\tau$, $\lambda\sigma_{22}$, приводящие при росте параметра λ к потере устойчивости. Уравнение, описывающее момент потери устойчивости пластинки, имеет вид [6]

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon w \equiv {} & [D(w_{,11}+\nu w_{,22})]_{,11} + 2[D(1-\nu)w_{,12}]_{,12} + \\
& + [D(w_{,22}+\nu w_{,11})]_{,22} = \lambda[(\sigma_{11}w_{,1})_{,1} + \\
& + (\tau w_{,2})_1 + (\tau w_{,1})_{,2} + (\sigma_{22}w_{,2})_{,2}] \equiv \lambda M_\varepsilon w
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Упругие постоянные D, ν зависят от параметра $\varepsilon \ll 1$ (абсолютный или относительный размер неоднородностей). Во многих случаях эта зависимость имеет вид $D, \nu = D, \nu\,(\bar{x}/\varepsilon)$ [1—5]. Напряжения в плоскости пластинки σ_{11}, τ, σ_{22} определяются из решения плоской задачи теории упругости неоднородного тела и также являются быстроосциллирующими функциями, зависящими от параметра ε.

Будем исследовать асимптотическое поведение минимального по модулю собственного числа задачи (1.1) (т. е. нижней критической нагрузки) при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 1. Задачи усреднения дифференциальных операторов рассматривались в ряде работ, например [1—5]. В частности, рассматривались [7, 8] некоторые задачи усреднения спектров. Из этих работ следует, что усреднению, понимаемому в механическом смысле как сопоставление с композиционным материалом некоторого «близкого» по механическому поведению однородного материала, соответствует математическое понятие G-предела операторов [9, 4] или Г-, G-предела функционалов [7, 9]. В частности, при произвольных массовых силах смещения исходного и усредненного тел близки тогда и только тогда, когда усредненному телу в качестве упругих характеристик приписаны коэффициенты G-предельного оператора (это следует, с незначительными модификациями, из [9]). Отмечено [10], что и энергии упругой деформации исходного и усредненного тел близки при том же условии. Это поясняет накладываемые далее требования на операторы задачи (1.1).

Задачу (1.1) удобно изучить в абстрактной постановке. Пусть заданы линейные, самосопряженные равномерно по ε ограниченные операторы

$$
\begin{aligned}
& L_\varepsilon, L : H_2^{0m}(Q) \to H_2^{-m}(Q) \quad m, k \in R \\
& M_\varepsilon, M : H_2^{0k}(Q) \to H_2^{-k}(Q) \quad k < m
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Пусть, кроме того, существует число $c > 0$, такое, что для каждого φ из $H_2^{0m}(Q)$ имеем $\langle L_\varepsilon\varphi, \varphi\rangle_m \geqslant c \|\varphi\|_m^2$ ($\langle , \rangle_n$, $\| \|_n$ — операция спаривания и норма в $H_2^{0n}(Q)$) и $M_\varepsilon \not\equiv 0$.

Предложение 1. Если последовательность операторов L_ε G-сходится к оператору L (определение см. в [4]) и для каждого $\varphi \in H_2^{0k}(Q)$ имеем $M_\varepsilon\varphi \to M\varphi$ в $H_2^{-m}(Q)$, причем $M \not\equiv 0$, то $|\lambda_\varepsilon| \to |\lambda_0|$. Здесь λ_ε — минимальное по модулю собственное число задачи

$$L_\varepsilon f = \lambda M_\varepsilon f \tag{1.3}$$

λ_0 — минимальное по модулю собственное число задачи

$$Lf = \lambda Mf \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим на пространстве $H_2^{0k}(Q)$ задачу

$$f = \lambda L_\varepsilon^{-1}M_\varepsilon f \tag{1.5}$$

Проверим, что (1.5) и (1.3) равносильны. Согласно [11], при выполнении условий (1.2) оператор $L_\varepsilon^{-1}: H_2^{-m}(Q) \to H_2^{0m}(Q)$ существует и ограничен равномерно по ε В силу этого из вложения $H_2^{0m}(Q) \subset H_2^{0k}(Q)$, $H_2^{-k}(Q) \subset H_2^{-m}(Q)$ и стандартных неравенств между нормами этих пространств следует, что оператор L_ε^{-1} определен как оператор из $H_2^{-k}(Q)$ в $H_2^{0k}(Q)$ и также равномерно ограничен по ε [11]. Тогда задача (1.5) поставлена корректно и в силу сказанного равносильна (1.3).

Обозначим через $\{f_\varepsilon\}$ собственные функции, соответствующие минимальным по модулю собственным числам (очевидно, эти числа могут различаться только знаком). Для $|\lambda_\varepsilon|$ в силу равномерной по ε ограниченности операторов M_ε (условие (1.2)) и L_ε (см. выше) имеем оценку

$$|\lambda_\varepsilon^{-1}| = \frac{\|L_\varepsilon^{-1}M_\varepsilon f_\varepsilon\|_k}{\|f_\varepsilon\|_k} \leqslant \frac{\|L_\varepsilon^{-1}\|\|M_\varepsilon\|\|f_\varepsilon\|_k}{\|f_\varepsilon\|_k} \leqslant K < \infty \tag{1.6}$$

с постоянной K, не зависящей от ε. Первое равенство в (1.6) — определение собственного числа задачи (1.3).

Введем далее семейство функций $\{g_\varepsilon\} = \{\lambda_\varepsilon^{-1}f_\varepsilon : \|f_\varepsilon\|_k = 1\}$. Последнее равенство в определении $\{g_\varepsilon\}$ всегда может быть получено нормировкой собственных функций. В силу определения $\{g_\varepsilon\}$ имеем $g_\varepsilon = L_\varepsilon^{-1}M_\varepsilon f_\varepsilon$. Из этого равенства, пользуясь тем, что оператор L_ε^{-1} ограничен равномерно по ε как оператор из $H_2^{-k}(Q)$ в $H_2^{0m}(Q)$ [11], получаем, что $\|g_\varepsilon\|_m \leqslant K_1 < \infty$ с постоянной K_1, не зависящей от ε. Тогда последовательность $\{g_\varepsilon\}$ слабо компактна в $H_2^{0m}(Q)$ [11] и в силу $k < m$ компактна в $H_2^{0k}(Q)$ [12]. Последовательность $\{\lambda_\varepsilon^{-1}\}$ в силу (1.6) компактна в R. Тогда из последовательности $\{\lambda_\varepsilon^{-1}, f_\varepsilon\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\lambda_{\varepsilon'}^{-1}, f_{\varepsilon'}\}$.

Пусть $\lambda_{\varepsilon'}^{-1} \to \mu_0$, $g_{\varepsilon'} \to g_0$ в $H_2^{0k}(Q)$. По построению λ_ε, g_ε имеет место равенство

$$\lambda_{\varepsilon'}^{-1}g_{\varepsilon'} = L_{\varepsilon'}^{-1}M_{\varepsilon'}g_{\varepsilon'} \tag{1.7}$$

В силу равномерной по ε непрерывности операторов M_ε имеем, что $M_{\varepsilon'}(g_{\varepsilon'} - g_0) \to 0$ в $H_2^{-k}(Q) \subset H_2^{-m}(Q)$, а в силу условия предложения — $M_{\varepsilon'}g_0 \to Mg_0$ в $H_2^{-m}(Q)$, откуда $M_{\varepsilon'}g_{\varepsilon'} \to Mg_0$ в $H_2^{-m}(Q)$. Тогда в силу равномерной по ε непрерывности L_ε^{-1} как оператора из $H_2^{-m}(Q)$ в $H_2^{0k}(Q)$ (см. выше) и G-сходимости последовательности операторов L_ε и L получаем уравнение для

$$\mu_0 g_0 = L^{-1}Mg_0 \tag{1.8}$$

Покажем теперь, что $g_0 \neq 0$. Для этого в силу $\|g_0\|_k = \lim\|g_{\varepsilon'}\|_k = \lim\|f_{\varepsilon'}/\lambda_{\varepsilon'}\|_k = \lim \lambda_{\varepsilon'}^{-1}$ достаточно показать, что $\mu_0 \neq 0$. Операторы L_ε, M_ε самосопряженные, поэтому самосопряжен $L_\varepsilon^{-1}M_\varepsilon$ и для него имеет место вариационный принцип [11, 12], согласно которому

$$|\lambda_{\varepsilon'}^{-1}| \geqslant \frac{|(L_{\varepsilon'}^{-1}M_{\varepsilon'}\varphi, \varphi)_k|}{\|\varphi\|_k^2}, \quad \forall\varphi \in H_2^{0k}(Q)$$

Отсюда, переходя к пределу при фиксированном φ, получим

$$|\mu_0| \geqslant \frac{|(L^{-1}M\varphi, \varphi)_k|}{\|\varphi\|_k^2}, \quad \forall\varphi \in H_2^{0k}(Q) \tag{1.9}$$

Поскольку L^{-1}, $M \not\equiv 0$, то из (1.9) следует, что $\mu_0 \neq 0$.

Введем теперь $\lambda_0 = \mu_0^{-1}$ и $f_0 = \lambda_0 g_0$. Очевидно, $f_{\varepsilon'} \to f_0$ в $H_2^{0k}(Q)$. Из (1.8) и $g_0 \neq 0$, $\mu_0 \neq 0$ следует, что λ_0, f_0 — соответственно собственное число и собственная функция задачи (1.4). Кроме того

$$(1.10) \qquad \lambda_{\varepsilon'}^{-1} \to \mu_0 = \lambda_0^{-1}$$

В силу (1.9) λ_0 — минимальное по модулю собственное число. Таких чисел может быть не более двух (без учета кратности), и различаться они могут только знаком. Тогда последовательность $\{\lambda_\varepsilon\}$ может иметь не более двух равных по модулю предельных точек. Отсюда, с учетом компактности $\{\lambda_\varepsilon\}$, имеем, что $|\lambda_\varepsilon| \to |\lambda_0|$.

Замечание 2. Результат о сходимости только модулей нижних критических нагрузок в общем случае неулучшаем. В качестве примера можно привести задачу устойчивости пластинки при сдвиге, имеющую спектр, симметричный относительно нуля. В случае однородных пластинок для усиления результата достаточно рассмотреть класс докритических состояний с положительно-определенными тензорами докритических напряжений σ_{11}, τ, σ_{22}. Но в композиционных пластинках возникает докритическое состояние общего вида, и этот путь неприменим. Далее покажем, что для сходимости самих нижних критических нагрузок достаточно требование знакоопределенности отнести к предельному докритическому состоянию, описываемому оператором M.

Предложение 2. Если в условиях предложения 1 оператор M знакоопределен, то $\lambda_\varepsilon \to \lambda_0$.

Доказательство. Согласно (1.9), (1.10), любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\lambda_\varepsilon, f_\varepsilon\}$ может иметь в качестве предела первого аргумента только минимальное по модулю собственное число. В случае знакоопределенности оператора M такое число (без учета кратности) единственно. Отсюда в силу компактности $\{\lambda_\varepsilon\}$, что показано при доказательстве предложения 1, $\lambda_\varepsilon \to \lambda_0$.

Проверим, что операторы, задаваемые (1.1), удовлетворяют условиям (1.2), если положить $m = 2$, $k > 1{,}5$.

При $\infty > C \geqslant D$, $1 - \nu \geqslant C > 0$ оператор L_ε положительно определен [13], ограничен равномерно по ε и, очевидно, самосопряжен. Рассмотрим оператор M_ε. Имеем

$$(1.11) \qquad |\langle M_\varepsilon f, \varphi\rangle_1| = \left|\int_Q \sigma_{ij} f_{,i} \varphi_{,j}\, d\bar{x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\|\sigma_{ij}\|_0| \, \|\nabla f\|_{L_4} \|\nabla\varphi\|_{L_4} \leqslant |\|\sigma_{ij}\|_0| \, \|f\|_k \|\varphi\|_k$$

Последние два неравенства следуют из непрерывности вложения $H_2^{0n}(Q)$ в $H_4^{01}(Q)$ при $n \geqslant 1{,}5$ [12]. Отсюда следует, что при выборе $k \geqslant 1{,}5$ оператор M_ε, заданный (1.1), при условии

$$(1.12) \qquad |\|\sigma_{ij}\|_0| \leqslant K_2 < \infty$$

с постоянной K_2, не зависящей от ε, равномерно по ε ограничен. Кроме того, оператор M_ε, очевидно, самосопряжен.

Замечание 3. Рассматривается случай, когда докритические напряжения в плоскости пластинки σ_{11}, τ, σ_{22} определяются из решения первой краевой задачи плоской теории упругости неоднородного тела

$$(1.13) \qquad A_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon = 0 \text{ или } \lambda F \qquad \sigma_{ij}^{\varepsilon} = a^{\varepsilon}_{ijkl} (\operatorname{def} \bar{u}_\varepsilon)_{kl}$$

$$\bar{u}_\varepsilon|_{\partial Q} = \lambda \bar{u}^\circ \text{ или } 0$$

Задача (1.13) рассматривалась в работах [1—3], из результатов которых, в частности следует, что напряжения, являющиеся a^{ε}_{ijkl}-градиентами [4] решения, сходятся слабо в $L_2(Q)$ к напряжениям σ_{ij}, определяемым из решения сильно G-предельной по отношению к (1.13) задачи. Этот факт позволяет построить оператор M. Отметим, что отсюда следует выполнение условия (1.12)

Предложение 3. Если $\sigma_{11} = \sigma_{11}^\varepsilon$, $\tau = \sigma_{12}^\varepsilon = \sigma_{21}^\varepsilon$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}^\varepsilon$, то оператор M есть

$$M = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Доказательство. Для $f \in H_2^{0k}(Q) \subset H_4^{01}(Q)$

$$\|M_\varepsilon f - Mf\|_{-2} = \sup_{\|\varphi\|_2 \leqslant 1} |((\sigma_{ij}^\varepsilon - \sigma_{ij}) f_{,i}, \varphi_{,j})_0| \tag{1.14}$$

Введем множество $F = \{\overline{\psi} : \overline{\psi} = \nabla\varphi, \|\varphi\|_2 \leqslant 1\} \subset L_4(Q)$. В силу теоремы вложения [12], F компактно в $L_q(Q)$ для любого $q < \infty$. Равенство (1.14) можно переписать в виде

$$\|M_\varepsilon f - Mf\|_{-2} = \sup_{\overline{\psi} \in F} |((\sigma_{ij}^\varepsilon - \sigma_{ij}), f_{,j}\psi_j)_0| \tag{1.15}$$

Введем в F конечную «δ-сеть» [11], что возможно в силу компактности F в $L_4(Q)$. В силу $\sigma_{ij}^\varepsilon \to \sigma_{ij}$ в $L_2(Q)$ слабо, получаем, что правая часть (1.15) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ на δ-сети. В силу равномерной по ε непрерывности операторов M_ε отсюда следует сходимость к нулю на всем множестве F. Доказательство закончено.

Аналогично предыдущему можно рассмотреть случаи шарнирного и смешанного (жесткого и шарнирного) опирания пластинки. В первом случае решение (1.1) ищется на множестве V — замыкание множества $\{f \in C^\infty(Q): f(\bar{x}) = 0,\ \bar{x} \in dQ\}$ по норме $H_2^2(Q)$ [13]. При этом оператор L_ε положительно определен равномерно по ε, если $\infty > C \geqslant D$, $1 - \nu \geqslant c > 0$, что можно показать следуя [13]. В силу этого все предыдущие результаты переносятся без изменений на рассматриваемый случай. Таким же образом может быть изучен случай смешанного опирания.

Отметим, что в случае шарнирного опирания пластинки быстроосциллирующие упругие постоянные входят в граничные условия (в условие для моментов). В этом случае происходит усреднение граничного условия. Именно, если предельное решение гладкое, то граничное условие для него получается интегрированием по частям в следующем из вариационного принципа равенстве $\langle Lw, \varphi\rangle_2 = \lambda\langle Mw, \varphi\rangle_1$ для каждого $\varphi \in H_2^{02}(Q)$. При этом видно, что те же граничные условия можно получить интегрированием по частям равенства $\langle Lw, \varphi\rangle_2 = 0$, поскольку на V выражение $\langle Mw, \varphi\rangle_1$ не дает интегралов по ∂Q.

Предыдущие рассуждения проведены для пластинки, имеющей постоянную толщину h и занимающей постоянную область Q. К нулю при этом стремятся абсолютные размеры неоднородностей. Такой случай характерен для композиционных материалов [5]

В ряде задач представляет интерес рассматривать относительные размеры неоднородностей. Обозначим через T и t характерные размеры пластинки и неоднородностей. Обезразмеривание проведем по следующим формулам (штрихом обозначены безразмерные переменные):

$$\bar{x}' = \bar{x}/T, \quad h' = h/T^{1/2}, \quad w' = w, \quad \bar{u}_\varepsilon' = \bar{u}_\varepsilon,\ \bar{u}^{0\prime} = \bar{u}^0 \tag{1.16}$$

Можно проверить, что уравнения плоской теории упругости (1.13) без массовых сил и уравнение (1.1) с условиями жесткого опирания после замены (1.16) содержат T только в коэффициентах. Причем, если в исходных переменных $E, \nu = E^0,\ \nu^0(\bar{x}/t)$, то в новых переменных $E,\ \nu = E^0, \nu^0(\bar{x}/(t/T))$, где через E^0, ν^0 обозначены функции, имеющие характерный размер изменения, равный единице. Тогда в качестве малого параметра можно взять относительный размер неоднородностей $\varepsilon = t/T$.

Сделанное замечание позволяет применять предложения 1,2 к оребренным пластинкам, для которых условие малости абсолютного размера ребер приводит к противоречию с гипотезами, применяемыми при выводе уравнения (1.1) [6]. Малость же относительных размеров ребер позволяет проводить усреднение, не противореча гипотезам теории пластинок [6], при условии, что ширина ребер имеет порядок характерной толщины пластинки.

Замечание 4. Хотя G-пределы существуют у широкого класса операторов (например, с быстропериодическими коэффициентами) [1—5], аналитические выражения для G-пределов операторов вида (1.1), (1.13) получены в настоящее время только для случая одномерного распределения неоднородностей [5, 4].

Пример. Рассмотрим прямоугольную пластинку, подкрепленную системой ребер, параллельных оси Ox_2, при условии шарнирного опирания. В этом случае D, ν =

$= D$, $\nu(x_1/\varepsilon)$; $Q = [0, M) \times [0, L]$. Докритическое напряженное состояние в плоскости пластинки пусть определяется из решения уравнения (1.13) с краевым условием $\sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j = \sigma_i^{\circ}$ на ∂Q. Как будет показано ниже, предложение 3 остается при этом в силе (см. также анализ задачи теории пластинок в [5]). Предельное напряженное состояние есть $\sigma_{ij} = \sigma_i^{\circ}\delta_{ij}$. Можно найти, что

$$|\lambda_0| = \pi^2 \left\{ \frac{\alpha}{L^4} + 2\,\frac{\alpha\langle\nu\rangle + \langle D(1-\nu)\rangle}{M^2L^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\langle D\rangle - \langle D\nu^2\rangle + \langle D\nu\rangle\langle\nu\rangle}{M^4} \right\} \left\{ \frac{\sigma_1^{\circ}}{L^2} + \frac{\sigma_2^{\circ}}{M^2} \right\}^{-1}$$

Здесь $\alpha = \langle D^{-1}\rangle^{-1}$, $\langle\ \ \rangle$ — операция вычисления среднего по периоду, если функции D, ν периодические; в общем случае $\langle\ \ \rangle$ — операция взятия слабого предела в $L_2(Q)$. При $\nu = \mathrm{const}$ формула упрощается и принимает вид

$$|\lambda_0| = \pi^2\langle D\rangle \left\{ \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{\langle D\rangle}\right)\left(\frac{1}{L^2} + \frac{2\nu}{M^2}\right)\frac{1}{L^2} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\sigma_1^{\circ}}{L^2} + \frac{\sigma_2^{\circ}}{M^2} \right\}^{-1}$$

2. Рассмотрим теперь вопрос об определении эффективных характеристик пластинок, существенно неоднородных по толщине, к которым гипотезы Кирхгоффа — Лява априори неприменимы.

Задача в данном случае ставится в виде: построить по A_ε-оператору теории упругости неоднородного тела (при смешанных граничных условиях), оператор теории квазиоднородных пластинок L, такой, что решение первой задачи (теории упругости неоднородного тела) совпадает при $\varepsilon \to 0$ с решением второй задачи (теории пластинок) с некоторой заданной точностью.

Покажем, что поставленная задача может быть решена путем введения промежуточного усреднения согласно диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A_\varepsilon & \to & A & \to & L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon & \to & \bar{\mathbf{u}} & \to & w \end{array}$$

Переход $A_\varepsilon \to A$ состоит в вычислении G-предела последовательности функционалов, соответствующих последовательности операторов A_ε [9]; A — оператор, соответствующий G-предельному функционалу. Через $\bar{\mathbf{u}}$ обозначено решение G-предельной задачи.

Переход $A \to L$ выполняется следующим образом: как будет показано ниже, для широкого класса неоднородностей оператор A существует и имеет вид (2.1), с заменой коэффициентов a_{ijkl}^{ε} на некоторые гомогенизированные коэффициенты a_{ijkl}, обладающие свойствами упругих постоянных (симметричность и положительная определенность) [14]. Эти коэффициенты не зависят от ε, в силу чего они могут быть рассмотрены как упругие постоянные некоторого квазиоднородного упругого материала. Поступим следующим образом: исходя из механических характеристик материала, соответствующего полученным гомогенизированным коэффициентам a_{ijkl}, выберем кинематическую модель и построим методами [6, 15, 14] задачу теории пластинок с некоторым оператором L, решение которой w аппроксимирует $\bar{\mathbf{u}}$ в $L_2(Q)$ с требуемой точностью $\alpha(h, R)$ (h — толщина, R — характерный размер пластинки в плане).

Чтобы убедиться, что оператор L — искомый, достаточно теперь показать, что $\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon \to \bar{\mathbf{u}}$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, а оператор A действительно обладает перечисленными свойствами. Рассмотрим исходную задачу, описывающую композиционную пластинку как трехмерное неоднородное тело

(2.1) $[a^{\varepsilon}_{ijkl}\ u^{k}_{\varepsilon,l}]_{,j} = f_i(\bar{x})$

(2.2) $\bar{u}_{\varepsilon} = 0$ на $\Gamma_u = \partial Q_1 \times [-h, h]/2$

(2.3) $\bar{a}^{\varepsilon}_{ijkl}\ (\mathrm{def}\ \bar{u}_{\varepsilon})_{kl} n_j = 0$ на $\Gamma_{\text{б}} = \{\bar{x} \in Q : x_3 = \pm h/2\}$

Полагаем, что упругие постоянные $a^{\varepsilon}_{ijkl} \in L_{\infty}(Q)$ и существуют положительные ограниченные постоянные C, c, такие, что $C \mid e_{ij} \mid^2 \geqslant \geqslant a^{\varepsilon}_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \geqslant c \mid e_{ij} \mid^2$ для всех ε и $e_{ij} = e_{ji}$. Решение задачи (2.1) — (2.3) ищется на V-замыкании по норме $H_2{}^1(Q)$ множества функций из $C^{\infty}(Q)$, обращающихся в нуль в окрестности части границы Γ_u [13].

Покажем, что у семейства решений задач (2.1) — (2.3), вообще говоря, имеются предельные точки.

Лемма. Семейство $\{\bar{u}_{\varepsilon}\}$ слабо компактно в V.

Доказательство. Достаточно показать, что $\{\bar{u}_{\varepsilon}\}$ ограничено в V, для чего, в свою очередь, достаточно проверить (см. например, [13] с. 82), что при краевых условиях (2.2), (2.3) имеет место неравенство Корна, из которого следует требуемое.

Покажем, что любая предельная точка последовательности $\{\bar{u}_{\varepsilon}\}$ — решение G-предельной задачи. Для этого заметим, что задача (2.1)—(2.3) равносильна задаче минимизации ($\langle,\rangle$ — операция спаривания в V)

(2.4) $\bar{u}_{\varepsilon} \in V : J_{\varepsilon}(\bar{v}) + \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle \to \min, \quad \bar{v} \in V$

$$J_{\varepsilon}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_Q a^{\varepsilon}_{ijkl}\,(\mathrm{def}\ \bar{v})_{ij}\,(\mathrm{def}\ \bar{v})_{kl}\, d\bar{x}$$

Приведем один признак G-сходимости функционалов в смысле Марчеллини [9]: последовательность функционалов J_{ε} G-сходится к функционалу J тогда и только тогда, когда: 1°. Для каждого $\bar{v} \in V$ существует последовательность $\{\bar{v}_{\varepsilon}\} \subset V$, такая, что $\bar{v}_{\varepsilon} \to \bar{v}$ слабо в V и $J_{\varepsilon}(\bar{v}_{\varepsilon}) \to J(\bar{v})$.

2°. Для каждой последовательности $\{\bar{v}_{\varepsilon}\} \subset V$, такой, что $\bar{v}_{\varepsilon} \to \bar{v}$ слабо в V, $J(\bar{v}) \leqslant \underline{\lim}\ J_{\varepsilon}(\bar{v}_{\varepsilon})$.

Предложение 4. Если $\bar{u}$ — предельная точка семейства $\{\bar{u}_{\varepsilon}\}$, то $\bar{u}$ решает задачу минимизации на V функционала $J(\bar{v}) + \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle$.

Доказательство. Пусть $\bar{u}_{\varepsilon} \to \bar{u}$ слабо в V. Множество V слабо замкнуто (в силу замкнутости и выпуклости [12]), поэтому $\bar{u}$ принадлежит V. Пользуясь приведенным выше признаком G-сходимости, можно записать следующую цепочку соотношений: для любого $\bar{v} \in V$

$$J(\bar{v}) + \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle = \lim [J_{\varepsilon}(\bar{v}_{\varepsilon}) + \langle \bar{f}, \bar{v}_{\varepsilon} \rangle] \geqslant \underline{\lim} \min_{\bar{v} \in V} [J_{\varepsilon}(\bar{v}) + \langle \bar{f}, \bar{v} \rangle] =$$

$$= \lim [J_{\varepsilon}(\bar{u}_{\varepsilon}) + \langle \bar{f}, \bar{u}_{\varepsilon} \rangle] \geqslant J(\bar{u}) + \langle \bar{f}, \bar{u} \rangle$$

Здесь $\{\bar{v}_{\varepsilon}\}$ — последовательность, определяемая для данного элемента $\bar{v}$ условием 1° Из полученного неравенства имеем требуемое.

Покажем теперь, что для широкого класса распределения неоднородностей G-предельный оператор A существует и обладает перечисленными выше свойствами (т. е. является оператором теории упругости квазиоднородного тела). Для этого покажем, что если последовательность операторов A_{ε} с областью определения $\bar{\varphi} + H_2{}^{01}(Q)$ имеет G-предел при любом $\bar{\varphi} \in V$, то она имеет G-предел как последовательность операторов с областью определения V и эти G-пределы совпадают. Этим вопрос будет решен, поскольку G-предел операторов на $\bar{\varphi} + H_2{}^{01}(Q)$ существует и обладает требуемыми свойствами для широкого класса распределения неоднородностей (например, при выполнении условий типа N из [3]; см. также [1—5]).

Предложение 5. Если последовательность функционалов J_ε вида (2.4) с областью определения $\bar{\varphi} + H_2^{01}(Q)$ при любом $\bar{\varphi}$ из V G-сходится к функционалу J, то эта же последовательность J_ε с областью определения V G-сходится к функционалу J (также определенному на V).

Доказательство. Проверим, что для функционалов J_ε, J с областью определения V выполняется признак G-сходимости функционалов ([9], с. 143).

Пусть $\{\bar{u}_\varepsilon\}$ — семейство решений задач (2.4), $\bar{u}$ — решение задачи, получающейся из (2.4) заменой функционала J_ε на J. Отметим, что функционал J, будучи определен на $\bar{\varphi} + H_2^{01}(Q)$ для всех $\bar{\varphi}$ из V, определен на V.

Покажем сначала, что $\underline{\lim}\, J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \geqslant J(\bar{u})$.

Для этого введем $\bar{U}_\varepsilon$ как решение задачи минимизации

$$\bar{U}_\varepsilon \in \bar{u} + H_2^{01}(Q) : J_\varepsilon(\bar{v}) + \langle \bar{f}, \bar{v}\rangle \to \min, \quad \bar{v} \in \bar{u} + H_2^{01}(Q); \ \bar{f} \in V^*$$

В силу включения $\bar{u} + H_2^{01}(Q) \subset V$ задача поставлена корректно, причем как на $\bar{u} + H_2^{01}(Q)$, так и на V. Имеем

$$J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) = J_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon) + A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon - \bar{U}_\varepsilon) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon - \bar{U}_\varepsilon) \tag{2.5}$$

$$A_\varepsilon(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \int\limits_Q a_{ijkl}^\varepsilon (\det \bar{\varphi})_{ij} (\operatorname{def} \bar{\psi})_{kl}\, d\bar{x}$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части (2.5) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ По построению $\bar{u}_\varepsilon$ имеем, что для любого $\bar{\varphi}$ из V, в частности, для $\bar{U}_\varepsilon \in V$

$$A_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon) = -\langle \bar{f}, \bar{U}_\varepsilon\rangle$$

Отсюда, пользуясь симметричностью формы A_ε, получим

$$A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon - \bar{U}_\varepsilon) = A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon) - A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon) = -\langle \bar{f}, \bar{u}_\varepsilon\rangle - A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon) \tag{2.6}$$

Далее, в силу G-сходимости J_ε и J на $\bar{u} + H_2^{01}(Q)$ [7]

$$\bar{U}_\varepsilon \to \bar{u} \text{ слабо в } V, \ J_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon) \to J(\bar{u}) \tag{2.7}$$

В силу последнего предела (2.7) $A_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon) = A(\bar{u}, \bar{u})$ (здесь воспользовались тем, что оператор A имеет вид (2.4) с коэффициентами a_{ijkl}; форма A определена аналогично A_ε). Применяя (2.7) к (2.6) получаем требуемое, поскольку в силу сказанного видно, что предел правой части (2.6) равен $-\langle \bar{f}, \bar{u}\rangle - A(\bar{u}, \bar{u}) = 0$. Последнее равенство следует из того, что $\bar{u}$ — решение G-предельной задачи.

Переходя теперь в (2.5) к нижнему пределу, с учетом (2.7) получим

$$\underline{\lim}\, J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \geqslant \underline{\lim}\, J_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon) = J(\bar{u})$$

Отсюда, пользуясь уравнением Эйлера, имеем

$$\underline{\lim}\, [J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) + \langle \bar{f}, \bar{u}_\varepsilon\rangle] \geqslant J(\bar{u}) + \langle \bar{f}, \bar{u}\rangle \tag{2.8}$$

С другой стороны, так как $\bar{U}_\varepsilon$ принадлежит V, то

$$J(\bar{u}_\varepsilon) + \langle \bar{f}, \bar{u}_\varepsilon\rangle \leqslant J_\varepsilon(\bar{U}_\varepsilon) + \langle \bar{f}, \bar{U}_\varepsilon\rangle \tag{2.9}$$

Переходя в (2.9) с использованием (2.7) к верхнему пределу и объединяя получающееся неравенство с (2.8), приходим к равенству

$$\lim\, [J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) + \langle \bar{f}, \bar{u}_\varepsilon\rangle] = J(\bar{u}) + \langle \bar{f}, \bar{u}\rangle$$

При произвольном $\bar{f}$ из V^*. Полученное равенство является упоминавшимся выше признаком G-сходимости функционалов [9].

Замечание 5. Предложение 5 обосновывает рассмотренный выше пример (при этом надо привлечь результаты [5]).

Замечание 6. В предложение 5 наиболее сильным является требование независимости G-пределов последовательности функционалов J_ε с областью определения $\bar{\varphi} + H_2^{01}(Q)$ от функции $\bar{\varphi}$. Это условие выполнено, если коэффициенты a_{ijkl}^ε удовлетворяют условиям работы [3], охватывающим широкий класс распределения неоднородностей (в частности, случаи периодического и квазипериодического армирования [1, 3]).

Замечание 7. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда на часть пластинки Γ_σ действуют поверхностные силы $\overline{\mathbf{g}}$.

Если функция $\overline{\mathbf{g}}$ гладкая, G-предельная задача получается заменой в (2.1)—(2.3) коэффициентов a_{ijkl}^{ε} на a_{ijkl}.

Следствие. Замечанию 1 применительно к пластинкам можно придать следующий вид: пусть каким-либо образом осуществлен переход от композиционной пластинки к однородной, описываемой оператором L'. Чтобы при произвольных массовых силах имело место совпадение прогибов или энергий упругой деформации исходной композиционной пластинки и усредненной, с точностью порядка α (h, R) при $\varepsilon \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор L' совпадал с построенным выше оператором L с точностью до членов, дающих поправки к решению порядка α (h, R).

Замечание 8. При сравнении $\overline{\mathbf{u}}_\varepsilon$, $\overline{\mathbf{u}}$ с w под w понимаются смещения, восстановленные по решению задачи теории пластинок w $(\overline{\mathbf{x}})$, $\overline{\mathbf{x}} \in Q_1$ во всей области Q на основании принятых кинематических гипотез.

Пример. Как указывалось, для материалов с одномерным распределением неоднородностей известны аналитические выражения для коэффициентов G-предельных операторов [5]. Это позволяет на основании полученных результатов провести полное исследование многослойных композиционных пластинок. Приведем некоторые выводы, получающиеся непосредственным применением изложенных в работе методов.

Для эффективной изгибной жесткости D многослойной пластинки из изотропных компонент имеет место формула

$$D = h^3E/[12(1-\nu^2)] \equiv (h^3/12) \langle E_\varepsilon/(1-\nu_\varepsilon^2)\rangle$$

(E_ε, ν_ε — модуль Юнга и коэффициент Пуассона компонент, E, ν — соответствующи гомогенизированные характеристики).

Для пластинок из сильно разномодульных компонент отношение гомогенизированного модуля сдвига G к E мало и при переходе $A \to L$ должны использоваться модели, учитывающие поперечный сдвиг пластинки. При этом коэффициенты при функциях, описывающих поперечный сдвиг, пропорциональные в рамках моделей [15] h^5 могут иметь даже для тонких пластинок ($h \ll 1$) величину порядка D (пропорциональной h^3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bensoussan A*., *Lions J.-L*. Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland: Publ., Comp., 1978, 700 p.
2. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1046—1048.
3. *Ха Тьен Нгоан*. О сходимости решений краевых задач для последовательности эллиптических систем.— Вестн. Моск. ун-та, 1977, № 5, с. 83—92.
4. *Жиков В. В*., *Козлов С. М*., *Олейник О. А*., *Ха Тьен Нгоан*. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— Успехи матем. наук, 1979, т. 34, № 5, с. 65—133.
5. *Дюво Ж*. Функциональный анализ и механика сплошной среды.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика. М.: Мир, 1979, с. 323—345.
6. *Тимошенко С. П*., *Войновский-Кригер С*. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1964. 635 с.
7. *Boccardo L*., *Marsellini P*. Sulla convergenza della solutioni di disequazioni variazionali.— Ann. Math. Pure Appl., 1976, v. 55, No. 4, p. 137—159.
8. *Mignot F*., *Puel J.-P*., *Suquet P.-M*. Homogenization and bifurcation of perforated plates.— Internat. J. Engng. Sci., 1980, v. 18, p. 409—414.
9. *Marcellini P*. Su una convergenza di funzioni convesse.— Boll. Unione Math. Ital., 1973, v. 8, No. 1, p. 137—158.
10. *Колпаков А. Г*. К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов.— В кн.: V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма—Ата: Наука, 1981, с. 202.
11. *Иосида К*. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
12. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544 с.
13. *Фикера Г*. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
14. *Работнов Ю. Н*. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
15. *Амбарцумян С. А*. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1977. 266 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
25.III.1981