Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 539.3

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ПОЛЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИКИ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ

Канаун С. К.

Рассматривается композитная среда, состоящая из однородной матрицы, в которой содержится случайное однородное в пространстве множество эллипсоидальных включений с другими физико-механическими свойствами. Исследуются статические поля (электрические, упругие, стационарные температурные и т. д.), которые индуцируются в такой среде под действием различных детерминированных внешних полей. Задача состоит в определении статистических моментов случайных функций типа тензоров плотности потока и напряженности поля в рассматриваемом композите. К решению этой задачи сводится проблема описания многих важных физических и механических свойств неоднородных материалов.

Предлагается приближенный метод решения, основанный на замене локальных внешних полей, в которых находятся отдельные включения, эффективным полем заданной структуры. По известному эффективному полю, которое предполагается случайно изменяющимся от включения к включению, тензоры плотности потока и напряженности поля в неоднородной среде восстанавливаются однозначно. Решение рассматриваемой стохастической задачи сводится к построению статистических моментов эффективного поля. Показано, что моменты различных порядков связаны между собой бесконечной последовательностью зацепляющихся уравнений. Чтобы оборвать эту цепочку и получить замкнутую систему уравнений относительно нескольких первых моментов, вводятся дополнительные предположения о статистических свойствах эффективного поля. Получены выражения первых двух статистических моментов искомых случайных функций через соответствующие моменты эффективного поля.

Рассматривается оператор, связывающий математические ожидания тензоров плотности потока и напряженности поля в композитной среде (оператор эффективных свойств). В общем случае этот оператор оказывается нелокальным. Таким образом однородная среда, которой можно заменить исходный неоднородный материал при определении средних значений искомых полей по заданному внешнему полю, обладает пространственной дисперсией. Для достаточно гладких внешних полей оператор эффективных свойств можно аппроксимировать дифференциальным оператором конечного порядка. При этом в случае упругой неоднородной среды уравнения, которым удовлетворяет осредненный потенциал поля (вектор перемещений), в первом приближении совпадают с уравнениями одного из известных вариантов моментной теории упругости.

Предложенный в работе подход является развитием метода самосогласованного поля, который использовался в [1—7] для построения эффективных упругих постоянных композитных материалов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим композитный материал, составленный из однородных компонент: матрицы и множества включений, занимающих систему изолированных областей V_k, характеристические функции которых $V_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть свойства среды в произвольной точке $x\,(x_1, x_2, x_3)$ задаются тензорной функцией

$$c(x) = c_0 + \sum_k c_1^{(k)} V_k(x) \tag{1.1}$$

где c_0 — тензор свойств матрицы, $c_0 + c_1^{(k)}$ — то же для k-го включения.

Конкретный смысл тензора $c(x)$ может быть различным. В задаче электропроводности — это двухвалентный тензор электропроводящих свойств среды, при рассмотрении стационарного температурного поля компоненты тензора $c(x)$ — коэффициенты теплопроводности, в случае упругой задачи под $c(x)$ будет пониматься четырехвалентный тензор модулей упругости.

Система уравнений, которой описывается статическое поле со скалярным потенциалом u в неоднородной среде, в ряде важных случаев имеет вид

$$\operatorname{div}\sigma(x) = q(x), \quad \sigma(x) = c(x)\cdot\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \nabla u(x) \tag{1.2}$$

где ∇ — операция градиента, ε — напряженность поля, σ — вектор плотности потока, q — плотность объемных источников поля.

Если u — векторный потенциал, то система (1.2), в которой оператор ∇ следует заменить на симметрированный градиент, описывает поля вектора перемещений $u(x)$ и тензоров напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $\varepsilon(x)$ в упругом неоднородном материале. Точка в (1.2) означает свертывание тензоров по одному (скалярные потенциалы) или двум (векторный потенциал) индексам.

Не останавливаясь на рассмотрении краевых эффектов, будем считать, что среда занимает все пространство. Обозначим через $\sigma_0(x)$ и $\varepsilon_0(x)$, соответственно, тензоры плотности потока и напряженности внешнего поля. Это поле (с потенциалом $u_0(x)$) существовало бы в однородной среде со свойствами c_0 при заданных объемных источниках и условиях на бесконечности.

Пусть множества областей V_k и тензоров $c_1^{(k)}$ в (1.1) являются случайными, причем все статистические моменты случайной функции $c(x)$ известны. Тогда поля $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$, которые индуцируются в неоднородной среде под действием детерминированного внешнего поля, также будут случайными. Основная задача, которая рассматривается в настоящей работе, состоит в построении статистических моментов этих случайных полей.

Перейдем от дифференциальных уравнений (1.2) к эквивалентной системе интегральных уравнений для функций $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$. Эти уравнения можно записать в форме [8, 9]

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot m(x')\,dx' \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) + \int K(x - x')\cdot c_0\cdot m(x')\,dx' \tag{1.4}$$

$$m(x) = \sum_k m^{(k)}(x), \quad m^{(k)}(x) = B_1^{(k)}\cdot\sigma(x)\,V_k(x) \tag{1.5}$$

$$B_1^{(k)} = (c_0 + c_1^{(k)})^{-1} - c_0^{-1}$$

Здесь интегрирование проводится по всему пространству.

Ядра $S(x)$ и $K(x)$ интегральных операторов S и $\mathbf{K}$ в (1.3), (1.4) выражаются через вторые производные функции Грина $G(x)$ однородной среды c_0 по формулам

$$K(x) = -\nabla\nabla G(x), \quad S(x) = c_0\cdot K(x)\cdot c_0 - c_0\delta(x) \tag{1.6}$$
$$(\nabla\cdot c_0\cdot\nabla G(x) = -\delta(x))$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Отсюда следует, что $K(x)$ и $S(x)$ — однородные обобщенные функции степени —3. При этом операторы S и $\mathbf{K}$ можно рассматривать как псевдодифференциальные [10], символы которых $S(k)$ и $K(k)\cdot c_0$ (фурье-образы функций $S(x)$ и $K(x)\cdot c_0$) — однородные функции нулевой степени по k. Действие таких операторов, например оператора S, на квадратично интегрируемых в $\mathbf{R}^3$ функциях определяется соотношением вида

$$(\mathrm{S}m)(x) = (2\pi)^{-3} \int S(k) \cdot m(k) \exp[-i(k \cdot x)]\, dk$$

где $m(k)$ — преобразование Фурье функции $m(x)$.

В дальнейшем множество включений будет предполагаться однородно распределенным в пространстве. Если при этом внешнее поле $\sigma_0(x)$ ($\varepsilon_0(x)$) — осциллирующая ограниченная функция, то тензоры $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$ и $m(x)$ в (1.3), (1.4) будут нефинитными случайными функциями осциллирующего типа. Интегралы, выражающие действие операторов S и **K** на реализациях таких функций, формально расходятся в нуле и на бесконечности.

Рассмотрим схему построения формул регулярного представления операторов S и **K** на функциях указанного типа. С точностью до квадратично интегрируемых в $\mathbf{R}^3$ слагаемых эти функции представимы в виде ряда экспонент, вообще говоря, с несоизмеримыми волновыми векторами

$$m(x) = m_0 + \sum_j m_j \exp[i(k_j \cdot x)] \tag{1.7}$$

Здесь m_0 — постоянная составляющая функции $m(x)$, коэффициенты m_j таковы, что ряд в этом соотношении сходится.

Используя свойство свертки, можно показать, что действие операторов S и **K** на функцию $\exp[i(k_j x)]$ сводится к умножению ее на постоянные множители $S(k_j)$ и $K(k_j) \cdot c_0$ соответственно. Поскольку $S(k)$ и $K(k)$ — однородные функции нулевой степени, эти множители однозначно определены и равномерно ограничены для всех k ($k_j \neq 0$). Таким образом, при действии оператора S (**K**) на ряд в (1.7) последний перейдет в аналогичный ряд с коэффициентами $S(k_j) \cdot m_j$ ($K(k_j) \cdot c_0 \cdot m_j$), который абсолютно сходится, если абсолютно сходился исходный ряд.

Остается определить действие операторов S и **K** на постоянную m_0. В k-пространстве преобразований Фурье это соответствует умножению однородных функций $S(k)$ и $K(k) \cdot c_0$ на дельта-функцию, сосредоточенную в нуле — операция заведомо неоднозначная. Можно показать, что никакой «естественной регуляризации» операторов S и **K** на постоянных не существует, а результат зависит от того, какое из внешних полей — плотность потока $\sigma_0(x)$ или напряженность поля $\varepsilon_0(x)$ — фиксируются в задаче. В частности, при фиксированной внешней плотности потока справедливы равенства [5, 7]

$$\int S(x - x') \cdot m_0 dx' = 0, \quad \int K(x - x') \cdot c_0 \cdot m_0 dx' = m_0 \tag{1.8}$$

Перейдем теперь к построению статистических моментов решения системы (1.3), (1.4).

2. Эффективное поле. Зафиксируем одну из типичных реализаций случайного множества включений и рассмотрим произвольное включение с номером i. Обозначим через $\bar{\sigma}_i(x)$ локальное внешнее поле, в котором находится i-е включение. В области V_i это поле складывается из внешнего поля $\sigma_0(x)$ и поля, наведенного окружающими включениями. Выражение для $\bar{\sigma}_i(x)$ следует из (1.3) и имеет вид

$$\bar{\sigma}_i(x) = \sigma_0(x) + \sum_{k \neq i} \int S(x - x') \cdot m^{(k)}(x')\, dx', \quad x \in V_i \tag{2.1}$$

где функции $m^{(k)}(x)$ определяются соотношением (1.5). Как следует из структуры уравнения (1.3), функция $m^{(k)}(x)$ зависит только от значения поля $\bar{\sigma}_k(x)$ в области V_k, а также свойств и формы k-го включения.

Предположим, что решение задачи для одиночного k-го включения в произвольном внешнем поле известно. Это означает, что известен явный вид зависимости $m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k)$, которую можно представить в форме

$$m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k) = (\mathbf{P}_k\bar{\sigma}_k)(x)\, V_k(x) \tag{2.2}$$

Здесь линейный оператор $\mathbf{P}_k$ определяется из решения задачи для изолированной k-й неоднородности и предполагается известным.

Подставляя (2.2) в (2.1), получим систему уравнений, которой удовлетворяют поля $\bar{\sigma}_i(x)$ в среде со взаимодействующими включениями

$$\bar{\sigma}_i(x) = \sigma_0(x) + \sum_{k\neq i}\int S(x-x')(\mathbf{P}_k\bar{\sigma}_k)(x')V_k(x')\,dx' \tag{2.3}$$

$$x \in V_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Если функции $\bar{\sigma}_k(x)$ найдены из решения этой системы, то искомые поля $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$ однозначно определяются из соотношений (1.3), (1.4), в которых функции $m^{(k)}(x)$ принимают вид (2.2). Таким образом, при заданных операторах $\mathbf{P}_k$ функции $\bar{\sigma}_k(x)$ являются основными неизвестными задачи.

Пусть $V = \bigcup V_k$ — область, занятая включениями. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in V$ и определим область V_{x_0} соотношением

$$V_{x_0} = \bigcup_{k\neq i} V_k, \quad x_0 \in V_i \tag{2.4}$$

Характеристические функции (с аргументом x) областей V и V_{x_0} обозначим через $V(x)$ и $V(x_0; x)$ соответственно.

Введем поле $\bar{\sigma}(x)$, совпадающее с $\bar{\sigma}_k(x)$ в V_k, и линейный оператор $\mathbf{P}$, такой, что имеют место равенства

$$(\mathbf{P}\bar{\sigma})(x)V(x) = \sum_k (\mathbf{P}_k\bar{\sigma}_k)(x)V_k(x) \tag{2.5}$$

$$(\mathbf{P}\bar{\sigma})(x)V(x_0; x) = \sum_{k\neq i}(\mathbf{P}_k\bar{\sigma}_k)(x)V_k(x), \quad x_0 \in V_i$$

Используя данные обозначения, систему (2.3) можно записать в форме одного уравнения относительно поля $\bar{\sigma}(x)$ в области V

$$\bar{\sigma}(x) = \sigma_0(x) + \int S(x-x')\cdot(\mathbf{P}\bar{\sigma})(x')\,V(x; x')\,dx', \quad x \in V \tag{2.6}$$

Если множество включений случайное, то $\bar{\sigma}(x)$ — случайная функция. Задача построения статистических моментов $\bar{\sigma}(x)$ сводится к решению проблемы взаимодействия многих включений и едва ли допускает точное решение. Чтобы сделать задачу обозримой, введем следующие упрощающие предположения (гипотезы метода эффективного поля):

H_1) Поле $\bar{\sigma}(x)$ имеет одинаковую структуру в любой из областей, занятых включениями.

В дальнейшем будем считать, что в каждой области V_k зависимость $\bar{\sigma}(x)$ от координат имеет вид полинома. Степени этих полиномов одни и те же для всех включений, а коэффициенты случайно изменяются от включения к включению.

H_2) Значения случайной функции $\bar{\sigma}(x)$ в точках области V_k статистически не зависят от свойств включения, занимающего эту область, и геометрических характеристик последней.

Смысл гипотезы H_2 состоит в том, что локальное внешнее поле, в котором находится произвольное включение, предполагается слабо зависящим от формы и свойств каждого отдельного включения, но определяется интегральными характеристиками всего случайного множества неоднородностей.

Далее будем считать, что все включения имеют эллипсоидальную форму. Тогда из гипотезы H_1 и решения задачи об изолированной эллипсоидальной неоднородности в полиномиальном внешнем поле следует [9], что поле $\sigma(x)$ внутри включения с номером k (k — любое) (а значит, и функция $m^{(k)}(x, \bar{\sigma}_k)$ в (2.2)) есть полином той же степени, что и локальное внешнее поле $\bar{\sigma}_k(x)$. В частности, если поле $\bar{\sigma}(x)$ считать постоянным в областях V_k, то оператор $\mathbf{P}$ в (2.5) есть умножение на функцию $P^0(x)$, которая постоянна в каждой из областей V_k, т. е.

$$(2.7)\qquad (\mathbf{P}\bar{\sigma})(x) = P^0(x)\cdot\bar{\sigma}(x), \quad x \in V$$

$$(2.8)\qquad P^\circ(x) = P_k{}^\circ = B_1^{(k)}\cdot(1 - D_k\cdot B_1^{(k)})^{-1}, \quad \bar{\sigma}(x) = \bar{\sigma}_k \quad \text{при } x \in V_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $\mathbf{1}$ — единичный двухвалентный тензор; постоянный тензор D_k определяется соотношением

$$(2.9)\qquad D_k = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_1} S(a_k^{-1}k)\, d\Omega$$

где $S(k)$ — символ оператора S, Ω_1 — поверхность единичной сферы в k-пространстве, a_k^{-1} — линейное преобразование, переводящее эллипсоид V_k в единичный шар.

Подставляя (2.7) в (2.6), придем к следующему уравнению для поля $\bar{\sigma}(x)$ в V:

$$(2.10)\qquad \bar{\sigma}(x) = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot P^\circ(x')\cdot\bar{\sigma}(x')\, V(x;\, x')\, dx', \quad x \in V$$

Если предположение о постоянстве поля $\bar{\sigma}(x)$ в областях V_k оправдано, то решения уравнений (2.6) и (2.10) совпадают.

Будем считать теперь, что поле $\bar{\sigma}(x)$ линейное в областях V_k, занятых включениями (ξ_k — центр области V_k)

$$(2.11)\qquad \bar{\sigma}^\alpha(x) = \bar{\sigma}_k{}^\alpha + \tau_k{}^{\alpha\beta}(x - \xi_k)_\beta, \quad x \in V_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее ко- и контравариантные компоненты тензоров в произвольном косоугольном базисе отмечены, соответственно, нижними и верхними греческими индексами. По одинаковым верхним и нижним индексам производится суммирование.

Поскольку линейное внешнее поле индуцирует линейное поле внутри каждой эллипсоидальной неоднородности [9], то оператор $\mathbf{P}$, входящий в уравнение (2.6), действует на $\bar{\sigma}(x)$ по формуле

$$(2.12)\qquad (\mathbf{P}\bar{\sigma})^\alpha(x) = (P_k{}^\circ)_\beta{}^\alpha\, \bar{\sigma}_k{}^\beta + (Q_k)_{\beta\nu}^{\alpha\mu}\tau_k^{\beta\nu}(x - \xi_k)_\mu, \quad x \in V_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $P_k{}^\circ$ имеет вид (2.8), а постоянный тензор Q_k при отсутствии объемных источников внешнего поля представляется в форме

$$(2.13)\qquad (Q_k)_{\beta\lambda}^{\alpha\mu} = (B_1^{(k)})_\beta^\nu R_{\nu\lambda}^{\alpha\mu}, \quad (R^{-1})_{\nu\lambda}^{\alpha\mu} = I_{\nu\lambda}^{\alpha\mu} - (\Pi_k)_{\nu\rho}^{\alpha\mu}(B_1^{(k)})_\lambda^\rho$$

$$(\Pi_k)_{\alpha\lambda}^{\beta\mu} = \frac{3}{4\pi}\int\limits_{\Omega_1}(a_k^{-1}k)_\alpha(a_k k)_\lambda S^{\beta\mu}(a_k^{-1}k)\, d\Omega$$

где I — единичный четырехвалентный тензор, Ω_1, как и в (2.9), — поверхность единичной сферы в k-пространстве.

Учитывая, что постоянные тензоры $\bar{\sigma}_k$ и τ_k в (2.11) выражаются через линейное в областях V_k поле $\bar{\sigma}(x)$

$$(2.14)\qquad \bar{\sigma}_k{}^\alpha = \bar{\sigma}^\alpha(x) - (\nabla^\beta\bar{\sigma}^\alpha(x))(x - \xi_k)_\beta, \quad \tau_k^{\alpha\beta} = \nabla^\beta\bar{\sigma}^\alpha(x), \quad x \in V_k$$

заключаем, что уравнение (2.6) для $\bar{\sigma}(x)$, при справедливости гипотезы (2.11), примет вид

$$\bar{\sigma}^{\alpha}(x) = \bar{\sigma}_0{}^{\alpha}(x) + \int S^{\alpha\beta}(x - x')\,[\overset{\circ}{P}_{\beta\lambda}(x')\,\bar{\sigma}^{\lambda}(x') + P^1_{\beta\mu\lambda\nu}(x')\,(\nabla^{\mu}\bar{\sigma}^{\lambda}(x'))\,H^{\nu}(x')]\,V(x;x')\,dx', \quad x \in V \tag{2.15}$$

Функции $P^1(x)$ и $H(x)$ в каждой области V_k определяются соотношениями ($\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера)

$$\begin{aligned} P^1_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) &= (Q_k)_{\alpha\beta\lambda\mu} - (P_s{}^{\circ})_{\alpha\beta}\,\delta_{\lambda\mu}; \\ H^{\nu}(x) &= H_k{}^{\nu}(x) = (x - \xi_k)^{\nu}, \quad x \in V_k, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.16}$$

Уравнение (2.15) является уже интегродифференциальным относительно $\bar{\sigma}(x)$.

Если поле $\bar{\sigma}(x)$ аппроксимировать полиномами второй степени в областях V_k, то аналогичным путем придем к интегродифференциальному уравнению, в котором будут фигурировать производные второго порядка от $\bar{\sigma}(x)$.

Поле $\bar{\sigma}(x)$, удовлетворяющее уравнению типа (2.10), (2.15) или им аналогичным, будем называть далее эффективным. При этом (2.10) назовем уравнением нулевого порядка, а (2.15) — уравнением первого порядка для эффективного поля.

3. Общая схема построения статистических моментов решения. Рассмотрим сначала задачу построения статистических моментов эффективного поля $\bar{\sigma}(x)$. Обозначим через $\bar{\sigma}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-точечный момент эффективного поля — среднее от тензорного произведения $\bar{\sigma}^{\alpha_1}(x_1)\,\bar{\sigma}^{\alpha_2}(x_2)\ldots$ $\ldots\bar{\sigma}^{\alpha_n}(x_n)$ при условии, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в области V, занятой включениями. В частности, математическое ожидание и двухточечный момент эффективного поля — это условные средние вида

$$(\bar{\sigma}^1)^{\alpha}(x) = \langle\bar{\sigma}^{\alpha}(x)\,|\,x\rangle, \quad (\bar{\sigma}^2)^{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \langle\bar{\sigma}^{\alpha}(x_1)\,\bar{\sigma}^{\beta}(x_2)\,|\,x_1, x_2\rangle \tag{3.1}$$

где $\langle\cdot\,|\,x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ — среднее при условии $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$.

В этом пункте ограничимся рассмотрением уравнения нулевого порядка для эффективного поля (2.10). Для построения математического ожидания $\bar{\sigma}^1(x)$ осредним обе части (2.10) по ансамблю случайного множества включений при условии $x \in V$:

$$\langle\bar{\sigma}(x)\,|\,x\rangle = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot\langle P^0(x')\cdot\bar{\sigma}(x')\,V(x;x')\,|\,x\rangle\,dx \tag{3.2}$$

Точка x предполагается фиксированной, поэтому $S(x - x')$ — детерминированное ядро.

Используя гипотезу H_2 п. 2 о статистической независимости поля $\bar{\sigma}(x)$ в области V_k от геометрических характеристик последней и свойств k-го включения, представим среднее под интегралом (3.2) в виде следующего произведения:

$$\langle P^0(x')\cdot\bar{\sigma}(x')\,V(x;x')\,|\,x\rangle = \langle P^{\circ}(x')\,V(x;x')\,|\,x\rangle\cdot \cdot\langle\bar{\sigma}(x')\,|\,x';\,x\rangle \tag{3.3}$$

где $\langle\bar{\sigma}(x')\,|\,x';\,x\rangle$ означает среднее при условии $x' \in V$, $x \in V_{x'}$, которое, очевидно, отлично от $\bar{\sigma}^1(x)$.

Если свойства включений статистически не зависят от геометрии и взаимного расположения областей V_k, то первый сомножитель справа в (3.3) представляется в форме

$$\langle P^{\circ}(x')\,V(x;x')\,|\,x\rangle = P^{\circ}\psi(x, x'), \quad P^{\circ} = \langle P^{\circ}(x)\,|\,x\rangle = \langle P_k^{\circ}\rangle_k \tag{3.4}$$

Справа в последнем равенстве стоит среднее от тензора P_k° вида (2.8) по ансамблю включений.

Скалярная функция $\psi(x, x')$ в (3.4) — условное среднее вида

$$\psi(x, x') = \langle V(x; x') \mid x\rangle \tag{3.5}$$

В силу определения (2.4) области V_x эта функция равна нулю при $x = x'$. Если множество включений однородно в пространстве, то ψ зависит только от разности $x - x'$. При $|x - x'| \to \infty$ корреляция в расположении включений исчезает и

$$\langle V(x; x') \mid x\rangle \to \langle V(x')\rangle = p$$

где p — концентрация включений. Для изотропного множества включений $\psi(x)$ зависит лишь от $|x|$.

Примером функции, удовлетворяющей перечисленным условиям, является

$$\psi(x) = p(1 - e^{-|x|/\rho}) \tag{3.6}$$

где параметр ρ имеет смысл радиуса корреляции случайного множества включений. Для конкретных стохастических множеств включений условное среднее $\psi(x, x')$ можно построить используя методы геометрической теории вероятностей [11].

Далее вид функции ψ и более сложных условных средних функции $V(x; x')$ будет предполагаться известным.

Для построения второго сомножителя справа в (3.3)—$\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x\rangle$ осредним обе части уравнения (2.10) при условии $x \in V$, $x_1 \in V_x$ и снова используем гипотезу H_2. Это позволяет получить выражения для средних $\langle\bar\sigma(x) \mid x\rangle$ и $\langle\bar\sigma(x) \mid x; x_1\rangle$ в форме

$$\langle\bar\sigma(x) \mid x\rangle = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot P^\circ\cdot\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x\rangle\,\psi(x, x')dx' \tag{3.7}$$

$$\langle\bar\sigma(x) \mid x; x_1\rangle = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot P^\circ\cdot\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x, x_1\rangle\cdot \cdot\langle V(x; x') \mid x;\ x_1\rangle dx' \tag{3.8}$$

где $\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x, x_1\rangle$ — среднее при условии $x' \in V$, $x \in V_{x'}$, $x_1 \in V_x$ отличное от $\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x\rangle$.

Таким образом, возникает цепочка уравнений относительно условных средних функции $\bar\sigma(x)$. Для замыкания этой цепочки необходимо ввести дополнительные предположения о статистических свойствах эффективного поля. Простейшим из них является аналог так называемого «квазикристаллического приближения» [12, 13]

$$\langle\bar\sigma(x') \mid x'; x\rangle = \langle\bar\sigma(x') \mid x'\rangle = \bar\sigma^1(x') \tag{3.9}$$

Здесь предполагается, что среднее значение эффективного поля в точке x' совпадает с осреднением по множествам неоднородностей, для которых точка x находится внутри одного из включений.

Отсюда и из (3.7) следует замкнутое уравнение относительно математического ожидания эффективного поля

$$\bar\sigma^1(x) = \sigma_0(x) + \int S_\psi(x - x')\cdot P^\circ\cdot\bar\sigma^1(x')\,dx';\quad S_\psi(x) = S(x)\,\psi(x) \tag{3.10}$$

Разрешая это уравнение относительно $\bar\sigma^1(x)$, получим

$$\bar\sigma^1(x) = (\Lambda\sigma_0)(x) \tag{3.11}$$

где Λ — псевдодифференциальный оператор, символ которого имеет вид ($S_\psi(k)$ — фурье-образ функции $S_\psi(x)$)

$$\Lambda(k) = (1 - S_\psi(k)\cdot P^\circ)^{-1} \tag{3.12}$$

Следующее приближение для $\overline{\sigma}^1(x)$ найдем обрывая полученную цепочку на уравнении (3.8) при помощи предположения

$$\langle\overline{\sigma}(x') \mid x'; x, x_1\rangle = \langle\overline{\sigma}(x') \mid x'; x_1\rangle = \Phi(x', x_1) \tag{3.13}$$

Функция $\Phi(x', x_1)$ — среднее значение поля $\overline{\sigma}$ в точке $x' \in V$ при условии, что в точке $x_1 \in V_{x'}$ имеется включение,— характеризует парное взаимодействие в системе взаимодействующих включений. Очевидно, что $\Phi(x', x_1) \to \overline{\sigma}^1(x')$ при $|x' - x_1| \to \infty$.

Уравнение для $\Phi(x, x_1)$ следует из (3.8), (3.13) и имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(x, x_1) &= \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot P^\circ\cdot\Phi(x', x_1)\times \\ &\times\langle V(x; x') \mid x; x_1\rangle dx'\end{aligned} \tag{3.14}$$

Для построения второго момента эффективного поля $\overline{\sigma}^2(x_1, x_2)$ тензорно домножим обе части (2.10) на $\overline{\sigma}(x_2)$ и осредним результат при условии $x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^2(x_1, x_2) &= \sigma_0(x_1)\langle\overline{\sigma}(x_2) \mid x_1, x_2\rangle + \\ &+ \int S(x_1 - x')\langle P^\circ(x')\cdot\overline{\sigma}(x')\,\overline{\sigma}(x_2)\,V(x_1; x') \mid x_1, x_2\rangle dx'\end{aligned} \tag{3.15}$$

Среднее под интегралом в этом соотношении в силу гипотезы H_2 представляется в форме

$$\begin{aligned}&\langle P^\circ(x')\cdot\overline{\sigma}(x')\,\overline{\sigma}(x_2)\,V(x_1; x') \mid x_1, x_2\rangle = \\ &= P^\circ\cdot\langle\overline{\sigma}(x')\,\overline{\sigma}(x_2) \mid x', x_2; x_1\rangle\langle V(x_1; x') \mid x_1, x_2\rangle\end{aligned}$$

Используя теперь предположение типа (3.9), (3.13)

$$\langle\overline{\sigma}(x')\,\overline{\sigma}(x_2) \mid x', x_2; x_1\rangle = \langle\overline{\sigma}(x')\,\overline{\sigma}(x_2) \mid x', x_2\rangle = \overline{\sigma}^2(x', x_2) \tag{3.16}$$

из (3.15) получаем замкнутое уравнение для $\overline{\sigma}^2(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^2(x_1, x_2) &= \sigma_0(x_1)\,\Phi(x_2, x_1) + \int S(x_1 - x')\cdot P^\circ\cdot\overline{\sigma}^2(x', x_2)\cdot \\ &\cdot\langle V(x_1; x') \mid x_1, x_2\rangle dx'\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\Phi(x_1, x_2)$ — решение уравнения (3.14).

Путь построения следующих приближений для $\overline{\sigma}^2(x_1, x_2)$ в рамках предложенного подхода очевиден.

Перейдем к вычислению статистических моментов полей $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$ в неоднородной среде. Если поле $\overline{\sigma}(x)$ аппроксимируется постоянным в каждом из включений, то в силу (2.5) и (2.7) выражения (1.3), (1.4) для $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$ примут вид

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \int S(x - x')\cdot P^\circ(x')\cdot\overline{\sigma}(x')\,V(x')\,dx' \tag{3.18}$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) + \int K(x - x')\cdot c_0\cdot P^\circ(x')\cdot\overline{\sigma}(x')\,V(x')\,dx' \tag{3.19}$$

Осредняя эти соотношения по ансамблю случайного множества включений и учитывая, что в силу гипотезы H_2

$$\langle P^\circ(x')\cdot\overline{\sigma}(x')\,V(x')\rangle = \langle P^\circ(x')\,V(x')\rangle\cdot\overline{\sigma}^1(x') = pP^\circ\cdot\overline{\sigma}^1(x')$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\langle\sigma(x)\rangle &= \sigma_0(x) + p\int S(x - x')\cdot P^\circ\cdot\overline{\sigma}^1(x')\,dx' \\ \langle\varepsilon(x)\rangle &= \varepsilon_0(x) + p\int K(x - x')\cdot c_0\cdot P^\circ\cdot\overline{\sigma}^1(x')\,dx'\end{aligned} \tag{3.20}$$

Запишем теперь выражение для второго момента поля $\sigma(x)$ в композите через условные моменты эффективного поля. Исходя из соотношения (3.18) будем иметь

$$\langle \sigma^\alpha(x_1)\sigma^\beta(x_2)\rangle = \sigma_0{}^\alpha(x_1)\,\sigma_0{}^\beta(x_2) + \tag{3.21}$$
$$+ p\int S^{\alpha\lambda}(x_1 - x')\,\overset{\circ}{P}_{\lambda\mu}\bar\sigma^{1\mu}(x')\,dx'\sigma_0{}^\beta(x_2) +$$
$$+ p\sigma_0{}^\alpha(x_1)\int S^{\beta\lambda}(x_2 - x')\,\overset{\circ}{P}_{\lambda\mu}\bar\sigma^{1\mu}(x')\,dx' +$$
$$+ \int S^{\alpha\lambda}(x_1 - x')\,\overset{\circ}{P}_{\lambda\nu}\,dx'\int S^{\beta\mu}(x_2 - x'')\,\overset{\circ}{P}_{\mu\rho}\bar\sigma^{2\nu\rho}(x', x'') \times$$
$$\times \langle V(x')\,V(x'')\rangle\,dx''$$

Здесь использована гипотеза H_2 п. 2. Аналогично, второй момент случайного поля $\varepsilon(x)$ выражается через первые два условных момента эффективного поля.

Таким образом, для вычисления первых двух статистических моментов полей $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$ в композите необходимо решить уравнения типа (3.10), (3.17) для $\bar\sigma^1$ и $\bar\sigma^2$, а затем вычислить интегралы в (3.20), (3.21). Предложенную схему можно использовать и для вычисления моментов более высокого порядка полей $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$.

4. Оператор эффективных свойств. Введем оператор $\mathbf{C}_*$, связывающий математические ожидания тензоров плотности потока и напряженности поля в композитной среде

$$\sigma^*(x) = (\mathbf{C}_*\varepsilon^*)(x), \quad \sigma^*(x) = \langle\sigma(x)\rangle, \quad \varepsilon^*(x) = \langle\varepsilon(x)\rangle \tag{4.1}$$

Из соотношений (3.20), (3.11) следует, что символ псевдодифференциального оператора $\mathbf{C}_*$ имеет вид

$$C_*(k) = (1 + pS(k)\cdot P^\circ\cdot\Lambda(k))\cdot(B_0 + pK(k)\cdot c_0\cdot P^\circ\cdot\Lambda(k))^{-1} \quad (B_0 = c_0{}^{-1}) \tag{4.2}$$

В общем случае связь между σ^* и ε^* будет нелокальной, поскольку $\mathbf{C}_*$ — оператор свертки с обобщенной функцией $C_*(x)$, которая имеет сингулярную и регулярную составляющие. Исключение представляет случай однородного внешнего поля σ_0. Как следует из (3.11), (3.12), при этом оператор Λ есть умножение на постоянный тензор

$$\Lambda_0 = [1 - \textstyle\int S(x)\,\psi(x)\,dx\cdot P^\circ]^{-1} \tag{4.3}$$

Для изотропного множества включений $\psi(x) = \psi(|x|)$ и интеграл здесь, используя (1.8) и регуляризацию обобщенной функции $S(x)$ [9, 10], можно представить в форме

$$\int S(x)\,\psi(x)\,dx = -pD_0$$

где постоянный тензор D_0 имеет вид (2.9) при $a_k = 1$.

Из (3.20) и (1.8) следует, что для постоянного внешнего поля σ^* и ε^* — постоянные тензоры, связанные соотношением

$$\sigma^* = C_*\cdot\varepsilon^*, \quad C_*{}^{-1} = B_0 + pP^\circ\cdot(1 + pD_0\cdot P^\circ)^{-1} \tag{4.4}$$

где C_* — тензор эффективных постоянных композита.

Аналогичное выражение для C_* в случае упругой задачи (тензор эффективных модулей упругости композита) получено в [5], частные формы этого выражения были найдены в [1, 3, 4]. Эффективные модули упругости среды со случайным множеством трещин рассчитывались по предложенной схеме в [2—4, 7], а эффективные коэффициенты электропроводности в [14].

Разложим правую часть выражения (4.2) для $C_*(k)$ в ряд по концентрации включений p. Ограничиваясь членами порядка p^2, имеем

$$C_*(k) = c_0 - pc_0\cdot P^\circ\cdot c_0 + p^2c_0\cdot P^\circ\cdot(c_0 + T(k))\cdot P^\circ\cdot c_0 + \ldots \tag{4.5}$$
$$T(k) = \textstyle\int S(x)\,(1 - p^{-1}\psi(x))\exp[i(k\cdot x)]\,dx$$

Для $\psi(x)$ в форме (3.6) функция

$$T(k) = \int S(x)\exp\left[-\frac{|x|}{\rho} + i(k\cdot x)\right]dx$$

Можно показать, что функция $T(k)$ аналитична в окрестности нуля, а первые члены разложения ее в степенной ряд имеют вид

$$T^{\alpha\beta}(k) = D_0^{\alpha\beta} + {}^1\!/_2\rho^2(D_0^{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu} - 3\Pi_{0\lambda\mu}^{\alpha\beta})(ik^\lambda)(ik^\mu) + \ldots \tag{4.6}$$

где тензоры D_0 и Π_0 определяются соотношениями (2.9), (2.12), соответственно, при $a_k = 1$. В первом приближении (для достаточно гладких внешних полей) символ $C_*(k)$ можно аппроксимировать выражением (4.5) при $T(k)$ в форме (4.6).

Введем осредненный потенциал u^* поля в неоднородной среде, связанный с тензором $\varepsilon^*(x)$ соотношением $\varepsilon^*(x) = \nabla u^*(x)$. Из (4.1), (4.2) следует уравнение для потенциала $u^*(x)$ в форме

$$\operatorname{div}(\mathbf{C}_*\nabla u^*) = q \tag{4.7}$$

где $\mathbf{C}_*$ — псевдодифференциальный оператор с символом (4.2). Поскольку оператор $\mathbf{C}_*$ нелокальный, потенциал u^* описывает поле в некоторой однородной среде, обладающей пространственной дисперсией. Этой средой можно заменить реальный неоднородный материал при расчете средних значений функций $\sigma(x)$ и $\varepsilon(x)$ по заданному внешнему полю.

Если символ оператора $\mathbf{C}_*$ аппроксимировать соотношениями (4.5), (4.6), то (4.7) перейдет в дифференциальное уравнение в частных производных относительно $u^*(x)$. Для композита, составленного из изотропной матрицы и изотропных сферических включений, это уравнение примет вид (Δ — оператор Лапласа, c_{*1}, c_{*2} — скалярные коэффициенты)

$$\begin{gathered}(c_{*1}\Delta - c_{*2}\Delta^2)\, u^*(x) = q(x)\\ c_{*1} = c_0\left(1 - pg + \frac{1}{3}p^2g^2\right), \quad c_{*2} = \frac{2}{15}\rho^2p^2c_0g^2,\\ g = \frac{3c_0B_1}{3 + 2c_0B_1}, \quad B_1 = \langle B_1^{(k)}\rangle_k\end{gathered} \tag{4.8}$$

В случае упругой задачи аналогичное уравнение для осредненного вектора перемещений по существу совпадает с системой уравнений моментной теории упругости для среды со стесненным вращением [15]. Роль параметра с размерностью длины, характерного для моментной теории, играет в данном случае радиус корреляции случайного множества включений ρ.

Заметим что в предыдущие выражения для C_* не вошел другой характерный параметр задачи — средний размер включений. Зависимость C_* от этого параметра можно найти реализуя изложенную схему построения оператора $\mathbf{C}_*$ на основе уравнения первого порядка для эффективного поля (2.15). При этом аналог разложения (4.5), (4.6) символа $C_*(k)$ в случае изотропных матрицы и включений (сферической формы) примет вид

$$C_*^{\alpha\beta}(k) = c_{*1}\delta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}c_{*2}\,(k^2\delta^{\alpha\beta} + 3\,(ik^\alpha)\,(ik^\beta))$$

где коэффициент c_{*1} совпадает с указанным в (4.8), а c_{*2} зависит от двух размерных параметров — радиуса корреляции случайного множества включений ρ и их среднего радиуса a

$$c_{*2} = \frac{2}{15}p^2c_0g^2\left(\rho^2 + \frac{2}{15}\,\frac{a^2c_0B_1}{5 + 3c_0B_1}\right).$$

Отметим основные особенности предложенного подхода. Данный метод занимает промежуточное положение между методом самосогласованного поля (МСП) и методами типа сглаживания [16]. Общим с одним из распространенных вариантов МСП является введение локального внешнего поля $\bar{\sigma}$ для каждого включения и предположение об одинаковой структуре этого поля в областях V_k (гипотеза H_1). Однако в традиционной схеме МСП поле $\bar{\sigma}$ принимается постоянным и одинаковым для всех включений. В данном методе поле $\bar{\sigma}$, во-первых, можно выбрать отличным от постоянного в областях V_k, а во-вторых, считать случайно изменяющимся от включения к включению. При этом для построения замкнутых уравнений относительно статистических моментов $\bar{\sigma}(x)$ используется процедура расщепления сложных средних, которая характерна для метода сглаживания. В идейном отношении данный метод близок к используемому [12, 13, 17] для решения стационарной задачи рассеивания скалярных волн на точечных рассеивателях.

Погрешность первого приближения метода в задаче о вычислении эффективных постоянных неоднородных материалов исследовалась [5, 6, 7] путем сравнения с экспериментами и точными решениями (для регулярных композитов). Эти сравнения показывают, что предложенный метод позволяет вычислять правильные значения эффективных постоянных композитов в широком диапазоне изменения концентрации включений, их свойств и формы. Однако возможности метода этим не исчерпываются: он позволяет количественно описать нелокальные свойства композитной среды, а также найти выражения для статистических моментов решения, вообще говоря, любого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walpole L. J.* On the overall elastic moduli of composite materials.— J. Mech. and Phys. Solids, 1969, v. 17, No. 4, p. 235—251.
2. *Канаун С. К.* Случайное поле трещин в упругой сплошной среде.— В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Вып. 10. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974, с. 66—83.
3. *Левин В. М.* К определению эффективных упругих модулей композитных материалов.— Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 5, с. 1042—1045.
4. *Левин В. М.* К определению термоупругих постоянных композитных материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 137—145.
5. *Канаун С. К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды.— ПМТФ, 1977, № 2, с. 160—169.
6. *Канаун С. К.* Взаимодействие периодических систем трещин в упругой среде.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 9, с. 36—42.
7. *Канаун С. К.* Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде.— ПММ, 1980, т. 44, № 6, с. 1129—1139.
8. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
9. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3, с. 571—575.
10. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
11. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия.— М.: Мир, 1978. 318 с.
12. *Lax M.* Multiple scattering of waves.— Rev. Modern Phys., 1951, v. 23, No. 4, 287—310.
13. *Lax M.* Multiple scattering of waves II. The effective field in dense systems.— Phys. Rev., 1952, v. 85, No. 4, p. 621—629.
14. *Канаун С. К.* Постоянный электрический ток в среде с большим числом трещин.— ПМТФ, 1979, № 4, с. 20—31.
15. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple stresses in linear elasticity.— Arch. Rat. Mech. Analysis, 1962, v. 11, No. 5, p. 415—448.
16. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976, 455 с.
17. *Waterman P. S., Truell R.* Multiple scattering of waves.— J. Math. Phys., 1961, v. 2, No. 4, p. 512—537.

Ленинград

Поступила в редакцию 11.V.1981