

УДК 539.3

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ПЛИТ С ТОНКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Боярченко С. И., Зубов Л. М.

Исследуется выпучивание упругой плиты с неоднородными по толщине механическими свойствами. Характер неоднородности описывается периодическими быстроосциллирующими функциями поперечной координаты. Методом усреднения строится асимптотика решения задачи устойчивости при стремлении к нулю периода осцилляции неоднородности. При однородной (аффинной) докритической деформации отдельно для случаев сжимаемого и несжимаемого материалов получена усредненная система дифференциальных уравнений, позволяющая определить в указанном приближении бифуркационные значения параметров нагружения. Общая теория проиллюстрирована примером расчета устойчивости равномерно сжатой в своей плоскости прямоугольной плиты из резиноподобного несжимаемого одноконстантного материала, модуль упругости которого — быстроосциллирующая функция поперечной координаты. Для тонкой пластинки дано сравнение результатов метода усреднения с результатами теории выпучивания, основанной на гипотезах Кирхгофа.

1. Рассмотрим упругую плиту, ограниченную в недеформированном состоянии плоскостями $x_3 = \pm h$. Материал плиты будем предполагать ортотропным (в частности, изотропным), причем ось x_3 принадлежит одной из плоскостей материальной симметрии. Упругие свойства материала считаются однородными по декартовым координатам x_1, x_2 , отсчитываемым в срединной плоскости плиты и неоднородными по поперечной координате x_3 . Это означает, что удельная потенциальная энергия деформации W , являющаяся функцией тензора деформации Коши — Грина, будет явно зависеть от координаты x_3 . Эта зависимость предполагается периодической с периодом $2h\varepsilon$. Безразмерный параметр ε в дальнейшем считается малым (случай тонкой периодической структуры).

Предположим, что данное упругое тело подвергнуто начальной деформации следующего вида: x_3 — главная ось тензора деформации, плоскости $x_3 = \text{const}$ испытывают аффинную деформацию, не зависящую от x_3 , напряжения на этих плоскостях отсутствуют, удлинения волокон, ортогональных срединной плоскости, вообще говоря зависят от x_3 . Можно показать, что такое состояние удовлетворяет уравнениям равновесия для ортотропного неоднородного по поперечной координате материала при нулевых массовых силах за счет сил, распределенных по боковой поверхности плиты. В случае несжимаемого материала в указанном равновесном состоянии удлинения поперечных волокон не зависят от x_3 , т. е. деформация будет однородной по всему телу.

Уравнения нейтрального равновесия, описывающие выпучивание плиты, имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}' = 0, \quad \mathbf{D}' = \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{u})|_{\eta=0}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{i}_k$$

Здесь \mathbf{D} — несимметричный тензор напряжений Пиола, \mathbf{R} — радиус-вектор точек тела в докритическом состоянии, \mathbf{u} — вектор добавочных перемещений, \mathbf{i}_k ($k = 1, 2, 3$) — орты декартовых координат, ∇ — оператор в недеформированной конфигурации тела. Точкой сверху обо-

значаются возмущения (линейные приращения), обусловленные наложением добавочных перемещений.

Для сжимаемого материала имеем [1, 2]

$$(1.2) \quad \mathbf{D} = \mathbf{K} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T, \quad \mathbf{K} = K_{pqrs} \mathbf{i}_p \mathbf{i}_q \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s$$

$$K_{pqrs} = \frac{\partial^2 W}{\partial C_{pq} \partial C_{rs}}$$

Здесь C_{pq} — компоненты градиента деформации докритического состояния, \mathbf{K} — тензор упругостей, который в нашем случае является периодической функцией координаты x_3 и не зависит от координат x_1, x_2 .

Граничные условия на лицевых плоскостях плиты, выражающие отсутствие нагрузки в возмущенном состоянии равновесия, записываются следующим образом:

$$(1.3) \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{D} = 0 \text{ при } x_3 = \pm h$$

Введя в рассмотрение тензоры второго ранга

$$\mathbf{A}_{mn} = K_{mqns} \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s \quad (m, n = 1, 2, 3)$$

уравнения (1.1) и краевые условия (1.3) запишем в следующем виде:

$$(1.4) \quad \partial_m \mathbf{A}_{mn} \cdot \partial_n \mathbf{u} = 0$$

$$(1.5) \quad \mathbf{A}_{3n} \cdot \partial_n \mathbf{u} = 0 \text{ при } x_3 = \pm h$$

Так как тензоры \mathbf{A}_{mn} не зависят от x_1, x_2 , уравнения (1.4) и условия (1.5) допускают решения вида

$$(1.6) \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)],$$

которые позволяют удовлетворить некоторым достаточно содержательным краевым условиям на боковой поверхности плиты, например условиям шарнирного опирания или скользящей заделки на краях прямоугольной пластинки.

Подставив (1.6) в (1.4), (1.5), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для трех функций $f_s = \mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_s$ (d — оператор дифференцирования по x_3)

$$(1.7) \quad [d\mathbf{A}_{33}d + (i\alpha\mathbf{A}_{13} + i\beta\mathbf{A}_{23})d + d(i\alpha\mathbf{A}_{31} + i\beta\mathbf{A}_{32}) - \alpha^2\mathbf{A}_{11} - \beta^2\mathbf{A}_{22} - \alpha\beta(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21})] \cdot \mathbf{f} = 0$$

с граничными условиями при $x_3 = \pm h$

$$(1.8) \quad (\mathbf{A}_{33}d + i\alpha\mathbf{A}_{31} + i\beta\mathbf{A}_{32}) \cdot \mathbf{f} = 0$$

Положив

$$\mathbf{g} = (\mathbf{A}_{33}d + i\alpha\mathbf{A}_{31} + i\beta\mathbf{A}_{32}) \cdot \mathbf{f}$$

согласно (1.7) получим

$$(1.9) \quad d\mathbf{f} = -(\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{f} + (\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{g}$$

$$d\mathbf{g} = (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{f} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{g}$$

$$\mathbf{P} = i\alpha\mathbf{A}_{31} + i\beta\mathbf{A}_{32}; \quad \mathbf{B} = i\alpha\mathbf{A}_{13} + i\beta\mathbf{A}_{23}$$

$$\mathbf{Q} = -\alpha^2\mathbf{A}_{11} - \beta^2\mathbf{A}_{22} - \alpha\beta(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{21})$$

На основании (1.9) система уравнений (1.7) записывается следующим образом (Λ — матрица с тензорными элементами):

$$(1.10) \quad d \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} = \Lambda \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} -(\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{P}, & (\mathbf{A}_{33})^{-1} \\ \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}_{33})^{-1} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{Q}, & -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}_{33})^{-1} \end{Bmatrix}$$

Для решения задачи устойчивости плиты с тонкой периодической структурой воспользуемся методом усреднения [3—6]. Обозначив $y = \varepsilon^{-1}x_3$, будем искать решение системы (1.10) в виде степенного ряда

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}(x_3, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(k)}(x_3, y) \varepsilon^k \\ \mathbf{g}(x_3, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}^{(k)}(x_3, y) \varepsilon^k \end{aligned}$$

где $\mathbf{f}^{(k)}(x_3, y)$, $\mathbf{g}^{(k)}(x_3, y)$ — периодические по y функции с периодом $2h$.

Основными неизвестными в задаче выпучивания плиты являются те значения параметров нагружения (т. е. параметров, определяющих докритическое состояние), при которых система уравнений (1.7) с граничными условиями (1.8) имеет нетривиальное решение. Неизвестные критические значения параметров нагружения следует также отыскивать в виде ряда по степеням безразмерного периода ε . По этой причине коэффициенты системы (1.7), зависящие от параметров нагружения, окажутся представленными в виде рядов

$$(1.12) \quad \mathbf{A}_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_{mn}^{(k)}(y) \varepsilon^k$$

В силу очевидного соотношения

$$\frac{d}{dx_3} \mathbf{f}(x_3, y) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$$

оператор дифференцирования представляется в виде

$$(1.13) \quad d = \partial + \varepsilon^{-1} \partial/\partial y, \quad \partial = \partial/\partial x_3$$

С учетом (1.13) систему (1.10) запишем в форме

$$(1.14) \quad \varepsilon^{-1} \partial_y \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} + \partial \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} - \Lambda \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} = 0$$

Подставив разложения (1.11), (1.12) в (1.14), будем последовательно приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε . Из равенства нулю коэффициента при ε^{-1} вытекают соотношения

$$\partial_y \mathbf{f}^{(0)} = 0, \quad \partial_y \mathbf{g}^{(0)} = 0$$

откуда следует, что $\mathbf{f}^{(0)}(x_3, y) = \mathbf{f}^{(0)}(x_3)$, $\mathbf{g}^{(0)}(x_3, y) = \mathbf{g}^{(0)}(x_3)$. Это означает, что главный член разложения (1.11) не является быстроосциллирующей функцией, а представляет собой медленно меняющуюся по толщине плиты составляющую решения задачи устойчивости.]

Рассмотрение коэффициента при ε^0 приводит к уравнениям

$$(1.15) \quad \partial_y \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \end{Bmatrix} + \partial \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{g}^{(0)} \end{Bmatrix} = \Lambda^{(0)} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{g}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

Усредняя систему уравнений (1.15), приходим к системе уравнений относительно $\mathbf{f}^{(0)}$, $\mathbf{g}^{(0)}$

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \partial \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{g}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \langle \Lambda^{(0)} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{g}^{(0)} \end{Bmatrix} \\ \langle \Lambda^{(0)} \rangle &= \begin{Bmatrix} - \langle (\mathbf{A}_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \rangle, & \langle (\mathbf{A}_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \\ \langle \mathbf{B}^{(0)} \cdot (\mathbf{A}_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}^{(0)} - \mathbf{Q}^{(0)} \rangle, & - \langle \mathbf{B}^{(0)} \cdot (\mathbf{A}_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \end{Bmatrix} \\ \langle \varphi(x_3, y) \rangle &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi(x_3, y) dy \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают операцию усреднения по y . Систему (1.16) можно представить в виде (E — единичный тензор)

$$(1.17) \quad \partial \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{h}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{(0)} \\ \mathbf{h}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}^{(0)} = - \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \rangle \cdot \mathbf{f}^{(0)} + \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \cdot \mathbf{g}$$

$$\mathbf{V} = \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{B}^{(0)} \cdot (A_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}_1^{(0)} \rangle - \langle \mathbf{Q}^{(0)} \rangle -$$

$$- \langle \mathbf{B}^{(0)} \cdot (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \cdot \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle^{-1} \cdot \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \rangle$$

$$\mathbf{W} = - \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \rangle - \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{B}^{(0)} \cdot (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle \langle (A_{33}^{(0)})^{-1} \rangle^{-1}$$

Исключив из (1.17) вектор $\mathbf{h}^{(0)}$, получим уравнение для вектора $\mathbf{f}^{(0)}$

$$(1.18) \quad \partial^2 \mathbf{f}^{(0)} - \mathbf{W} \cdot \partial \mathbf{f}^{(0)} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}^{(0)} = 0$$

Граничные условия для функции $\mathbf{f}^{(0)}$, выводимые из (1.8), имеют вид

$$(1.19) \quad (A_{33}^{(0)} \partial + i\alpha A_{31}^{(0)} + i\beta A_{32}^{(0)}) \cdot \mathbf{f}^{(0)} = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm h$$

Усредненная система уравнений (1.18) с краевыми условиями (1.19) служит для определения главного члена асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ критической нагрузки и формы потери устойчивости упругой плиты. Рассматриваемое приближение $\mathbf{f}^{(0)}$ тем точнее, чем тоньше структура неоднородности, т. е. чем больше периодов неоднородности укладывается по толщине пластинки.

2. В случае несжимаемого материала линеаризованный тензор напряжений Пиола имеет такое представление:

$$(2.1) \quad \mathbf{D} = \mathbf{K} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T + r (\mathbf{C}^{-1})^T$$

где \mathbf{C} — градиент деформации начального деформированного состояния плиты, r — неизвестная функция координат, дополнительным уравнением для которой наряду с уравнениями равновесия (1.1) служит линеаризованное условие несжимаемости [1]

$$(2.2) \quad \mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{u} = S_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} = 0; \quad S_{mn} = \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{i}_n$$

Подстановка (2.1) в (1.1) дает

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_m} \left(K_{mnts} \frac{\partial u_s}{\partial x_t} \right) + \frac{\partial r}{\partial x_m} S_{nm} = 0 \quad (n = 1, 2, 3)$$

Здесь u_s — компоненты вектора перемещения, S_{mn} — компоненты тензора \mathbf{C}^{-1} .

Уравнения (2.2) и (2.3) образуют систему для определения неизвестных функций u_m и r .

Для того чтобы получить граничные условия, подставим (2.1) в (1.3)

$$(2.4) \quad \left(K_{3nts} \frac{\partial u_s}{\partial x_t} + r S_{n3} \right) \mathbf{i}_n = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm h$$

Положив $r = \partial q / \partial x_3$ и продифференцировав (2.2) по x_3 , вместо (2.2), (2.3) получим систему уравнений

$$(2.5) \quad \partial_m A_{mnt\kappa} \partial_n v_\kappa = 0$$

$$A_{mnt\kappa} = K_{mnt\kappa}, \quad v_\kappa = u_\kappa, \quad \text{если } \kappa \leq 3, \tau \leq 3$$

$$A_{mn44} = A_{mnt4} = A_{mn4t} = 0, \quad v_4 = q, \quad \text{если } m \neq 3$$

$$A_{3n4t} = A_{3nt4} = S_{tn}, \quad A_{3n44} = 0$$

(латинские индексы пробегают значения от 1 до 3, греческие — от 1 до 4).

К граничным условиям (2.4) добавим вытекающее из (2.2) соотношение

$$(2.6) \quad S_{mn} \partial_n u_m = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm h$$

Условия (2.4) и (2.6) представим в виде

$$(2.7) \quad A_{3n\tau k} \partial_n v_k = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm h$$

Как видно из (2.5), (2.7), система уравнений нейтрального равновесия и краевых условий для несжимаемого материала представлена в форме, аналогичной (1.4), (1.5). Поэтому к ней можно применить алгоритм, описанный в п. 1. В результате получим усредненную систему дифференциальных уравнений относительно компонент четырехмерного вектора и соответствующие граничные условия.

3. В качестве примера рассмотрим задачу о бифуркации равновесия равномерно сжатой в своей плоскости плиты из высокоэластичного изотропного несжимаемого материала Бартенева — Хазановича [7]. Градиент деформации докритического состояния имеет вид

$$(3.1) \quad \mathbf{C} = \lambda (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) + \lambda^{-2} \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3; \quad \lambda = \text{const}$$

Тензор напряжений Коши для данного материала определяется соотношением [1]

$$(3.2) \quad \mathbf{T} = 2\mu \mathbf{F}^{1/2} - \sigma \mathbf{E}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$$

Здесь \mathbf{F} — мера деформации Фингера, $\mu = \mu(\varepsilon^{-1} x_3)$ — модуль упругости материала, быстроосциллирующая функция поперечной координаты, σ — давление в несжимаемом теле, не определяемое деформацией. В докритическом состоянии величина σ определяется из условия отсутствия поперечного нормального напряжения и имеет следующее значение:

$$(3.3) \quad \sigma = 2\mu\lambda^{-2}$$

Имея в виду известное [1] соотношение $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{T}$, получим

$$(3.4) \quad \mathbf{D} = (\mathbf{C}^{-1})^T \cdot \mathbf{T} - (\mathbf{C}^{-1})^T \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{C}^{-1})^T \cdot \mathbf{T}$$

Используя полученную в [8] формулу для производной квадратного корня из тензора, из (3.2) найдем ($p = r/2\mu$)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} = & \mu (I_1 I_2 - 1)^{-1} [I_1 I_2 \mathbf{F} - (\mathbf{F}^{-1/2} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1/2}) + \\ & + (I_1^2 + I_2) \mathbf{F}^{-1/2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1/2} - I_1 (\mathbf{F}^{-1/2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1/2}) + \\ & + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}] + 2\mu p \mathbf{E} \\ \mathbf{F} = & (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \\ I_1 = & 2\lambda^{-1} + \lambda^2, \quad I_2 = 2\lambda + \lambda^{-2} \end{aligned}$$

Из (1.1), (3.1) — (3.5) получим систему уравнений нейтрального равновесия

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \mu (\partial_3^2 u_l + \omega^2 (\partial_1^2 u_l + \partial_2^2 u_l) + \omega^2 \partial_l p + \\ & + \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^2} \partial_l \partial_3 u_3) + (\partial_3 u_l + \gamma^2 \partial_l u_3) \partial_3 \mu = 0 \\ & \mu (\gamma^2 (\partial_1^2 u_3 + \partial_2^2 u_3) + 2\omega^2 \partial_3^2 u_3 + \omega^2 \partial_3 p + \gamma^4 \partial_3 (\partial_1 u_1 + \\ & + \partial_2 u_2)) + \omega^2 (2\partial_3 u_3 + p) \partial_3 \mu = 0 \\ & \gamma = \lambda^{-3/2}; \quad 2\omega^2 = 1 + \gamma^2 \quad (l = 1, 2) \end{aligned}$$

Условие несжимаемости имеет вид

$$(3.7) \quad \gamma^2 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \partial_3 u_3 = 0$$

На торцах плиты должны выполняться следующие граничные условия:

$$(3.8) \quad \partial_3 u_l + \gamma^2 \partial_l u_3 = 0, \quad 2\partial_3 u_3 + p = 0$$

при $x_3 = \pm h$ ($l = 1, 2$)

Положив $u_k = f_k(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)]$ ($k = 1, 2, 3$), $p = f_4(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)]$, после усреднения получим систему

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \partial^2 f_1^{(0)} - \nu \zeta^2 (\omega^{(0)})^2 f_1^{(0)} + i\alpha c \partial f_3^{(0)} + i\alpha (\omega^{(0)})^2 f_4^{(0)} &= 0 \\ \partial^2 f_2^{(0)} - \nu \zeta^2 (\omega^{(0)})^2 f_2^{(0)} + i\beta c \partial f_3^{(0)} + i\beta (\omega^{(0)})^2 f_4^{(0)} &= 0 \\ \partial^2 f_3^{(0)} - z \zeta^2 (z^2 - \nu (z^2 - 1)) f_3^{(0)} + (\omega^{(0)})^2 \partial f_4^{(0)} &= 0 \\ z (i\alpha f_1^{(0)} + i\beta f_2^{(0)}) + \partial f_3^{(0)} &= 0 \\ \zeta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \gamma^{(0)} = (\lambda^{(0)})^{-3/2}, \quad z = (\gamma^{(0)})^2, \\ 2(\omega^{(0)})^2 = 1 + z, \quad c = 1 + 2z + \nu \frac{1 - 3z - 4z^2}{2z} \end{aligned}$$

Здесь $\lambda^{(0)}$ — первый член ряда $\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}\varepsilon + \lambda^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$, $\nu = \langle \mu \rangle \langle \mu^{-1} \rangle$ — параметр, характеризующий неоднородность плиты, для однородной плиты $\nu = 1$.

Общее решение системы (3.9) имеет вид

$$(3.10) \quad \begin{aligned} f_1^{(0)} &= \alpha (C_1 E_{13}^+ + C_2 E_{23}^+ + C_3 E_{13}^- + C_4 E_{23}^-) + \alpha^{-1} (C_5 E_{33}^+ + C_6 E_{33}^-) \\ f_2^{(0)} &= \beta (C_1 E_{13}^+ + C_2 E_{23}^+ + C_3 E_{13}^- + C_4 E_{23}^-) - \beta^{-1} (C_5 E_{33}^+ + C_6 E_{33}^-) \\ f_3^{(0)} &= -i\zeta^2 z \left(\frac{C_1}{m_1} E_{13}^+ + \frac{C_2}{m_2} E_{23}^+ - \frac{C_3}{m_1} E_{13}^- - \frac{C_4}{m_2} E_{23}^- \right) \\ f_4^{(0)} &= d_1 (C_1 E_{13}^+ + C_3 E_{13}^-) + d_2 (C_2 E_{23}^+ + C_4 E_{23}^-) \\ E_{ij}^\pm &= \exp(\pm m_i x_j); \quad j, i = 1, 2, 3; \quad M = (1 - \nu^{-1})^{1/2}; \\ m_1 &= \gamma^{(0)} \zeta [-z + \nu (1 + z) (1 + M)]^{1/2}; \quad m_2 = \gamma^{(0)} \zeta [-z + \\ &+ \nu (1 + z) (1 - M)]^{1/2}; \quad m_3 = \zeta \omega^{(0)} \nu^{1/2} \\ d_l &= i\zeta^2 z [m_l^2 - z\zeta^2 (z^2 - \nu (z^2 - 1))] (\omega^{(0)})^{-2} m_l^{-2} \quad (l = 1, 2) \end{aligned}$$

При $x_3 = \pm h$ должны выполняться следующие условия:

$$(3.11) \quad \partial f_1^{(0)} + i\alpha z f_3^{(0)} = 0, \quad \partial f_2^{(0)} + i\beta z f_3^{(0)} = 0, \quad 2\partial f_3^{(0)} + f_4^{(0)} = 0$$

Подставляя (3.10) в (3.11), получим уравнение для определения $\lambda^{(0)}$.

Краевая задача (3.9), (3.11) распадается на две независимые задачи:

Задача А : $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_4^{(0)}$ — четные функции, $f_3^{(0)}$ — нечетная функция координаты x_3 .

Задача Б : $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_4^{(0)}$ — нечетные функции, $f_3^{(0)}$ — четная функция координаты x_3 .

Задача А описывает симметричные, а задача Б — антисимметричные, т. е. изгибные формы потери устойчивости плиты.

Уравнение для определения $\lambda^{(0)}$ имеет вид:

в задаче А

$$(3.12) \quad m_1 (1 + M) (1 - zM) \operatorname{th}(m_1 h) - m_2 (1 - M) (1 + zM) \operatorname{th}(m_2 h) = 0$$

в задаче Б

$$(3.13) \quad m_1 (1 + M) (1 - zM) \operatorname{th}(m_2 h) - m_2 (1 - M) (1 + zM) \times \times \operatorname{th}(m_1 h) = 0$$

Для однородной плиты, т. е. при $\nu = 1$, имеем ($s = \zeta h$ — относительная толщина плиты):

$$(3.14) \quad (\gamma^2 - 3) \operatorname{sh}(2\gamma s) = 2\gamma s (1 + \gamma^2) \quad \text{в задаче А}$$

$$(3.15) \quad (3 - \gamma^2) \operatorname{sh}(2\gamma s) = 2\gamma s (1 + \gamma^2) \quad \text{в задаче Б}$$

Корни уравнений (3.12) — (3.15) отыскивались численным методом. Результаты счета показали, что решения уравнений (3.12) и (3.13) моно-

тонно стремятся к единице с ростом параметра ν , начиная от решений уравнений (3.14) и (3.15) соответственно. При конечных значениях параметра ν и при малых или конечных значениях параметра s изгибные формы потери устойчивости возникают раньше, чем симметричные. При стремлении к бесконечности параметра ν , т. е. в случае сильно неоднородной плиты, решения уравнений (3.12) и (3.13) асимптотически совпадают, при этом

$$\lambda^{(0)} = 1 - \frac{1}{6} \nu^{-1} + o(\nu^{-1})$$

На фигуре штриховыми линиями показана зависимость критической деформации $e = 1 - \lambda^{(0)}$ от значений параметра ν , при этом $s = 1$. Кривые 1 и 2 построены для задач А и Б соответственно.

Можно показать, что если функции

$$u = f(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)], \quad p = f_4(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)]$$

удовлетворяют системе (3.6), (3.7), то выражения

$$u = f(x_3) \exp [i(\pm \alpha x_1 \pm \beta x_2)], \quad p = f_4(x_3) \exp [i(\pm \alpha x_1 \pm \beta x_2)]$$

и любая их линейная комбинация тоже будут решениями указанной системы. В частности, решениями будут такие выражения:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} u_1 &= f_1(x_3) \cos \alpha x_1 \sin \beta x_2, & u_2 &= f_2(x_3) \sin \alpha x_1 \cos \beta x_2 \\ u_3 &= f_3(x_3) \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2, & p &= f_4(x_3) \sin \alpha x_1 \sin \beta x_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим прямоугольную плиту $-a \leq x_1 \leq a$, $-b \leq x_2 \leq b$. Положим $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), тогда решения (3.16) в задаче Б удовлетворяют на боковой поверхности плиты следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0; & u_3 &= 0; & M_{11} &= 0 & \text{при } x_1 &= \pm a \\ u_1 &= 0; & u_3 &= 0; & M_{22} &= 0 & \text{при } x_2 &= \pm b \\ (M_{st} &= M_s \cdot i_t; & M_s &= \pm \int_{-h}^h i_s \cdot D x_3 dx_3) \end{aligned}$$

Следовательно, решения (3.16) описывают изгибные формы потери устойчивости шарнирно-опертой плиты.

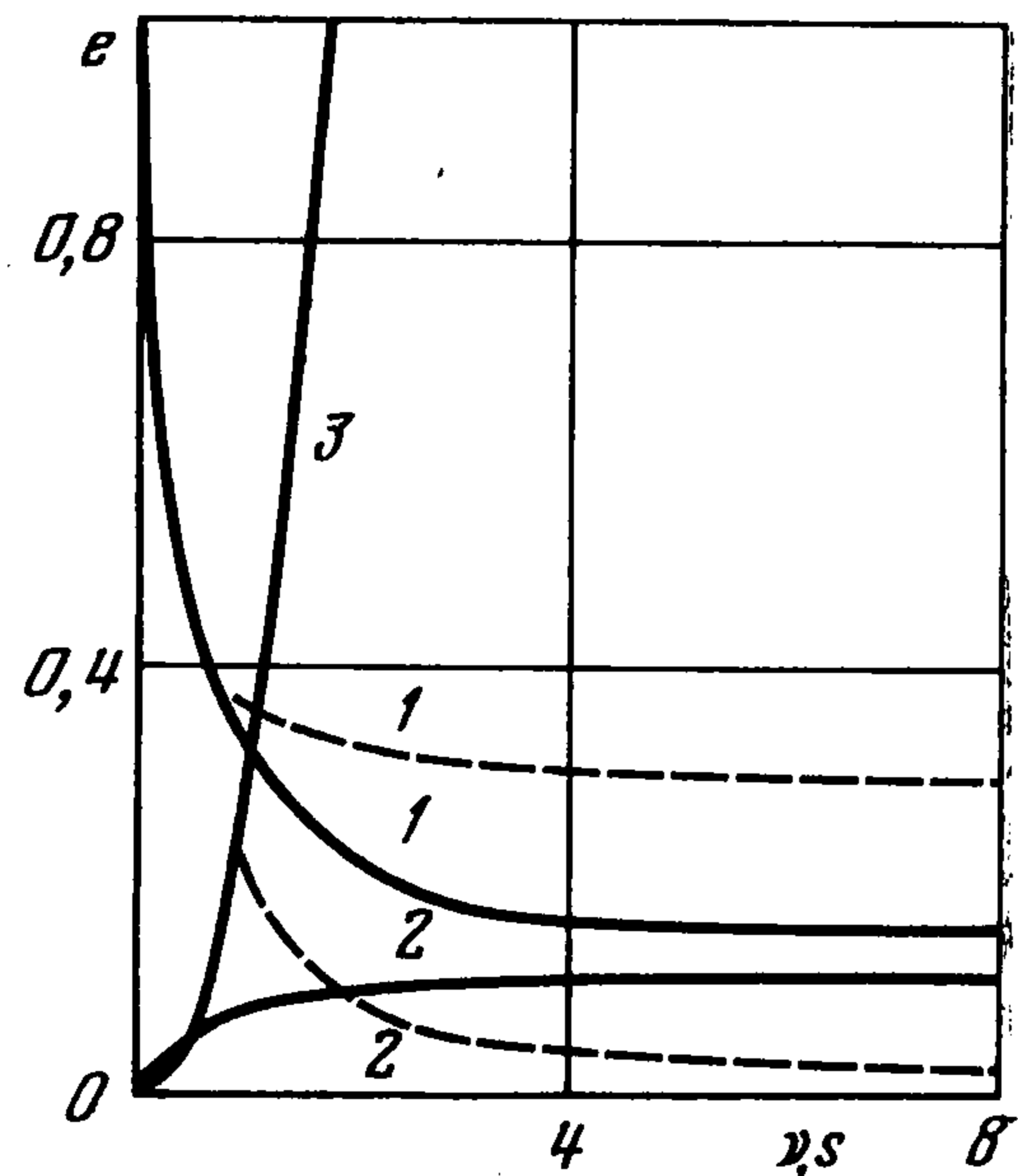
Сравним полученное строгое решение задачи устойчивости с результатами прикладной теории выпучивания оболочек и пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа [9]. В рамках этой теории анализ изгибных форм бифуркации равновесия сжатой плиты в случае, когда μ — четная функция поперечной координаты x_3 , сводится к решению следующего уравнения для прогиба срединной поверхности плиты $w(x_1, x_2)$:

$$(3.17) \quad (\lambda^3 - 1) (\partial_1^2 w + \partial_2^2 w) \mu_1 + 2 (\partial_1^4 w + 2\partial_1^2 \partial_2^2 w + \partial_2^4 w) \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 = \int_0^h \mu(x_3) dx_3, \quad \mu_2 = \int_0^h \mu(x_3) x_3^2 dx_3$$

Если уравнение (3.17) линеаризовать относительно критической деформации $e = 1 - \lambda$, то в случае однородной плиты ($\mu = \text{const}$) придем к классическому уравнению Сен-Венана [10]

$$1/3h^2 \mu \nabla^4 w - \nabla \cdot T \cdot \nabla w = 0,$$



Представляя w в виде $w = w_0 \exp [i (\alpha x_1 + \beta x_2)]$, из (3.17) получим уравнение для определения λ

$$\lambda^3 = 1 - 2\zeta^2 \mu_2 / \mu_1$$

откуда

$$(3.18) \quad \lambda = 1 - \frac{2}{3} \zeta^2 \mu_2 / \mu_1 + O(\zeta^4)$$

Поскольку $\mu(x_3)$ — четная функция, то на отрезке $[0, h]$ справедливо разложение

$$(3.19) \quad \mu = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x_3}{\epsilon h}$$

Из (3.19) имеем

$$\mu_1 = a_0 h, \quad \mu_2 = a_0 h^3 / 3 + O(\epsilon^2)$$

откуда, согласно (3.18), найдем

$$(3.20) \quad \lambda = 1 - \frac{2}{9} s^2 + O(s^4)$$

Решение уравнения (3.13) имеет асимптотическое представление, совпадающее с (3.20) с точностью до членов порядка s^2 . Это означает, что для тонких плит теория Кирхгофа дает правильные результаты.

На фигуре для случая $\nu = 2$ сплошными линиями представлена зависимость критической деформации ϵ от относительной толщины плиты s . Кривые 1 и 2 соответствуют задачам А и Б; кривая 3 получена для изгибных форм бифуркации равновесия плиты с помощью гипотез Кирхгофа. Видно, что для толстых плит теория Кирхгофа дает значительную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 848—852.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. М. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
4. Бахвалов Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. — Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1046—1048.
5. Бахвалов Н. С., Злотник А. А. Коэффициентная неустойчивость дифференциальных уравнений и осреднение уравнений со случайными коэффициентами. — Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 4, с. 745—748.
6. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур. — Докл. АН СССР, 1975, т. 222, № 3, с. 565—567.
7. Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластических деформаций сетчатых полимеров. — Высокомолекул. соединения, 1960, т. 2, № 1, с. 20—28.
8. Зубов Л. М. О производной Яуманна для тензора второго ранга. — Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. школы. Естеств. н., 1976, № 2, с. 27—30.
9. Зубов Л. М. Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 1, с. 85—95.
10. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955, 568 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
16.VI.1981