Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 539.3 : 534

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Свешникова Е. И.

В предварительно напряженной среде рассматриваются плоские изэнтропические волны (простые волны). Распространение простых волн по ненапряженному состоянию рассмотрено Блендом [1]. Ниже определяется изменение величин в простых волнах в предварительно напряженной среде, а также характеристические скорости и их зависимость от текущего состояния среды и от предварительной деформации. Показано, что все три волны (одна квазипродольная и две квазипоперечные) могут опрокидываться. Указаны условия опрокидывания.

1. Постановка задачи. Нелинейно-упругая изотропная среда задается функцией $\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, S)$, где U — внутренняя энергия единицы массы, ρ_0 — плотность в ненапряженном состоянии

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j}+\frac{\partial w_j}{\partial \xi_i}+\frac{\partial w_s}{\partial \xi_i}\frac{\partial w_s}{\partial \xi_j}\right)$$

— компоненты тензора деформации, w_i — компоненты вектора перемещения, S — энтропия. Распространение плоских простых волн рассматривается в лагранжевой системе координат ξ_i, которая в ненапряженном состоянии среды является прямоугольной и декартовой. Уравнения движения упругой среды в лагранжевых переменных имеют вид [1]

$$\rho_0\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial w_i/\partial \xi_j)},\qquad i=1,2,3 \tag{1.1}$$

По одинаковым индексам всюду предполагается суммирование.

Для системы (1.1) разыскиваются решения вида $w_i = w_{i0} + w_i^*(\theta(\xi_3, t))$, $S=\mathrm{const}$, θ — некоторая функция своих аргументов. Из величин $\partial w_k/\partial \xi_i$, характеризующих деформацию, в такой волне меняются только $\partial w_k/\partial \xi_3$, остальные $\partial w_k/\partial \xi_\alpha$, $\alpha=1, 2$ остаются постоянными и определяются начальной деформацией, которая будет считаться однородной. Чтобы система (1.1) имела такие решения, нужно, чтобы имела нетривиальные решения система алгебраических уравнений для величин $du_i/d\theta$ (где обозначено $u_i = \partial w_i/\partial \xi_3$)

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i \partial u_j}-\rho_0 c^2\delta_{ij}\right)\frac{du_j}{d\theta}=0,\qquad c=-\frac{\partial\theta/\partial t}{\partial\theta/\partial\xi_3},\qquad i=1,2,3 \tag{1.2}$$

Очевидно, $c = d\xi_3/dt$ — скорость перемещения поверхности $\theta(\xi_3, t) = \mathrm{const}$ по переменной ξ_3, т. е. характеристическая скорость. Как видно, величины $du_i/d\theta$ представляются собственным вектором матрицы $\|\partial^2\Phi/(\partial u_i \partial u_j)\|$, а $\alpha = \rho_0 c^2$ — собственные значения этой матрицы. Каждое собственное значение соответствует двум одинаковым волнам, распространяющимся в противоположные стороны оси ξ_3.

Будут рассматриваться простые волны в области малых ε_{ij}. В [1] подробно исследованы простые волны для предварительно ненапряженного состояния, а также для частного вида начальных деформаций, а именно таких, что $\partial w_1/\partial \xi_1 = \partial w_2/\partial \xi_2$, что обеспечивает изотропность деформации в плоскостях, параллельных фронту волны. Функция Φ в таком случае зависит лишь от двух переменных: u_3 и $\sqrt{u_1^2+u_2^2}$. Далее будут рассматриваться деформации произвольного вида, но не слишком большие, так чтобы их квадратами можно было пренебречь по сравнению с единицей. Функцию Φ при этом удобно задать в виде разложения по степеням ε_{ij}

(1.3) $$\Phi = {}^1/_2\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \delta I_1^3 + \xi I_2^2 + \eta I_1 I_3 + \zeta I_1^2 I_2 + \omega I_1^4$$

$$I_1 = \varepsilon_{kk}, \quad I_2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}, \quad I_3 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ji}$$

Положим $\partial w_3/\partial\xi_1 = \partial w_3/\partial\xi_2 = 0$. Тогда из малости деформаций следует малость величин u_i. Разложение функции Φ по u_i содержит все три переменные с различными коэффициентами, которые являются функциями начальных деформаций. Направление осей ξ_1, ξ_2 выбрано так, чтобы $\partial w_1/\partial\xi_2 + \partial w_2/\partial\xi_1 = 0$. В принятом приближении по начальным деформациям это позволяет считать $\varepsilon_{12} = 0$. Таким образом, начальная деформация будет задана двумя компонентами сжатия (растяжения) ε_{11}, ε_{22}, которые остаются постоянными в волне, и начальными значениями $u_i = u_i^0$.

В слабо деформированной среде, заданной потенциалом (1.3), коэффициенты уравнений (1.1) с точностью до малых второго порядка имеют вид

(1.4) $$\begin{aligned}
&\partial^2\Phi/\partial u_1\partial u_1 \approx f_{11} = f + f_1 u_3 + h(3u_1^2 + u_2^2) + f_2\cdot u_3^2\\
&\partial^2\Phi/\partial u_2\partial u_2 \approx f_{22} = g + g_1 u_3 + h(u_1^2 + 3u_2^2) + g_2 u_3^2\\
&\partial^2\Phi/\partial u_3\partial u_3 \approx f_{33} = d + d_1 u_3 + d_2(u_1^2 + u_2^2) + d_3 u_3^2\\
&\partial^2\Phi/\partial u_1\partial u_3 \approx f_{13} = f_1 u_1, \quad \partial^2\Phi/\partial u_2\partial u_3 \approx f_{23} = g_1 u_2\\
&\partial^2\Phi/\partial u_1\partial u_2 \approx f_{12} = 2h u_1 u_2\\
&d = \lambda + 2\mu + O(\varepsilon), \quad f = \mu + O(\varepsilon), \quad g = \mu + O(\varepsilon)\\
&d_1 = 6a + O(\varepsilon), \quad f_1 = 2b + O(\varepsilon), \quad g_1 = 2b + O(\varepsilon)\\
&a = \lambda/2 + \mu + \beta + \gamma + \delta, \quad 2b = \lambda + 2\mu + \beta + {}^3/_2\gamma\\
&h = \lambda/2 + \mu + \beta + {}^3/_2\gamma + \xi
\end{aligned}$$

Здесь $O(\varepsilon)$ представляют члены порядка компонент начальных деформаций ε_{11} и ε_{22}. Как будет видно из дальнейшего, коэффициенты d_2, d_3, f_2, g_2 в решение задачи не войдут.

Для нахождения собственных значений α служит кубическое уравнение

(1.5) $$\det \| f_{ij} - \alpha\delta_{ij} \| = 0$$

В случае ненапряженного состояния (все $\varepsilon_{ij} = 0$) это уравнение дает известные три корня: $\alpha_{1,2} = \mu$ для двух поперечных волн и $\alpha_3 = \lambda + 2\mu$ для продольной волны. Для слабо деформированного начального состояния (малые u_i и ε_{11}, ε_{22}) корни уравнения (1.5) можно найти приближенно, вычисляя малую поправку к указанным значениям. При этом достаточно ограничиться лишь первым (главным) членом этой добавки.

2. Квазипродольная волна. Вычисление первого корня уравнения (1.5) дает

$$\alpha_3 = \rho_0 c_3^2 = \lambda + 2\mu + (\lambda + 2\beta + 6\delta)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 6au_3$$

Отсюда видно, что характеристическая скорость зависит от деформации среды. Так как в нетривиальном решении $du_3 \neq 0$, т. е. u_3 изменяется в волне, то $c_3 \neq \mathrm{const}$ и волна имеет тенденцию к опрокидыванию. Для материалов, где $a > 0$, опрокидываются волны разрежения, в которых u_3 увеличивается, для материалов с $a < 0$ — волны сжатия.

Собственный вектор, соответствующий α_3, находится из системы (1.2) с использованием (1.4) и имеет вид

$$\frac{du_k}{du_3}=\frac{2bu_k}{\lambda+\mu+2(3a-b)u_3},\qquad k=1,2$$

Уравнение можно проинтегрировать

$$u_k=u_k^\circ\left(1+\frac{2(3a-b)(u_3-u_3^\circ)}{\lambda+\mu}\right)^q,\qquad q=\frac{b}{3a-b}$$

Если начальной деформации нет, то волна будет чисто продольной. Если же $u_k^\circ\neq 0$, то имеется малая поперечная составляющая, пропорциональная малой начальной деформации сдвига и изменению продольной составляющей u_3. Такую волну можно назвать квазипродольной.

3. **Квазипоперечные волны.** При приближенном вычислении двух других корней уравнения (1.5) оказалось, что зависимость характеристических скоростей от текущего состояния среды проявляется в членах, начиная с u_i^2. Из третьего уравнения системы (1.2) с коэффициентами (1.4) можно найти связь между продольной и поперечной составляющими деформации в волне, близкой к поперечной, приняв для характеристической скорости первое приближение, т. е. считая $\alpha=\mu$. При сохранении членов до второго порядка малости получаем после интегрирования

$$u_3=u_3^\circ-b\,(u_1^2+u_2^2)/(\lambda+\mu) \tag{3.1}$$

Отсюда видно, что изменение в продольной компоненте на порядок меньше, чем в поперечных. Такие волны можно назвать квазипоперечными.

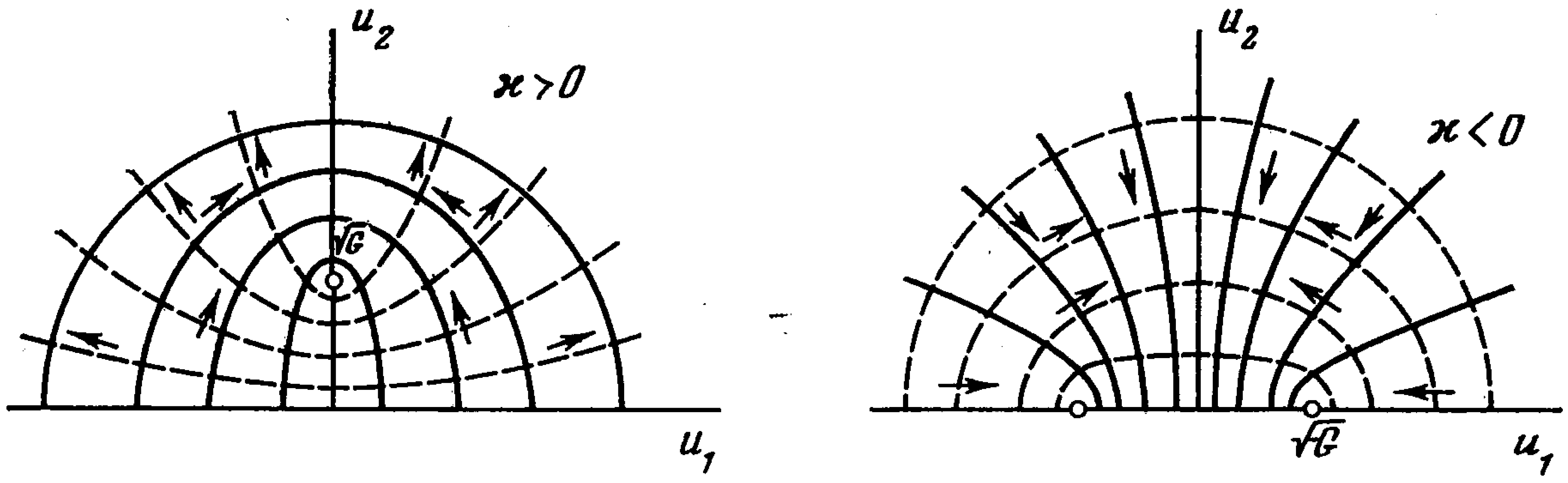
Характеристические скорости этих волн находятся из первого и второго уравнений (1.2) с использованием (1.4) и учетом полученного выражения (3.1) для u_3. Формулы для характеристических скоростей этих волн имеют вид

$$\begin{gathered}\alpha_{1,2}=\rho_0c_{1,2}^2=(\alpha_1^\circ+\alpha_2^\circ)/2-\varkappa\,\{u_1^2+u_2^2\pm\\ \pm{}^1\!/_2\,[(u_2^2-u_1^2-G)^2+4u_1^2u_2^2]^{1/2}\}\\ \alpha_i^\circ=\mu+2bI_1^\circ-(2\mu+{}^3\!/_2\gamma)\,\varepsilon_{ii},\quad i=1,\ 2\\ \varkappa=\mu+(\mu+\beta+{}^3\!/_2\gamma)^2/(\lambda+\mu)-2\xi,\quad G=(\alpha_1^\circ-\alpha_2^\circ)/\varkappa\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь α_1° и α_2° — значения α для волн, распространяющихся по состоянию, в котором $u_1=u_2=0$. Они зависят от начальной, не изменяющейся в волне деформации среды ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}° и различны между собой, но это различие невелико. Формулы для c_i^2, $i=1, 2, 3$ в предварительно напряженной среде приведены также в [2].

Выбором нумерации осей координат всегда можно сделать $\alpha_1^\circ-\alpha_2^\circ>0$. Тогда знак величины G совпадает со знаком коэффициента $\varkappa$, который задается упругими свойствами среды. Как было уже сказано, а теперь видно из формул (3.2), зависимость характеристических скоростей c_1 и c_2 от величин u_i проявляется лишь в квадратичных членах. Верхний знак в формуле (3.2) при $\varkappa>0$ дает характеристическую скорость волны, которую можно назвать «быстрой» квазипоперечной волной, нижний знак соответствует «медленной» квазипоперечной волне. При $\varkappa<0$ — наоборот. Обе волны имеют тенденцию к опрокидыванию, но чтобы выяснить, когда это происходит, надо знать само изменение решения в каждой из волн.

4. **Интегральные кривые квазипоперечных простых волн.** Дифференциальное уравнение для нахождения интегральных кривых, изображающих



простую волну на плоскости u_1, u_2, получается их двух последних уравнений системы (1.2) с использованием (1.4) и (3.2)

$$(4.1)\qquad \frac{du_2}{du_1}=\frac{u_2^2-u_1^2-G\mp[(u_2^2-u_1^2-G)^2+4u_1^2u_2^2]^{1/2}}{2u_1u_2}$$

Из (4.1) видно, что имеются два взаимно ортогональных семейства интегральных кривых, изображающих две квазипоперечные волны, распространяющиеся со скоростями c_1 и c_2. Расположение знаков $\pm$ в формулах (3.2) и (4.1) соответствует друг другу. У кривых (4.1) имеются две особые точки, имеющие координаты $u_1=0$, $u_2=\pm\sqrt{G}$ для материалов с $\varkappa>0$ $(G>0)$, или координаты $u_1=\pm\sqrt{-G}$, $u_2=0$ для сред с $\varkappa<0$ $(G<0)$. На левой части фигуры для материала с $\varkappa>0$ сплошными линиями изображены кривые первого семейства, соответствующего верхнему знаку в формулах (4.1) и (3.2) (быстрые волны). Линии второго семейства (медленные волны) изображены штриховыми линиями. При удалении от особых точек, когда становится $u_i\gg\sqrt{G}$, кривые первого семейства стремятся к окружностям, второго — к лучам. Аналогично на правой части фигуры представлены интегральные кривые для среды с $\varkappa<0$. Сплошные линии соответствуют быстрым волнам, штриховые — медленным. Обе картины интегральных кривых симметричны относительно осей u_1, u_2. Условие $u_i\gg\sqrt{|G|}$ означает, что начальная деформация такова, что разность $\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}$ мала по сравнению с u_i^2. В пределе, когда $\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}=0$, все интегральные кривые становятся окружностями и лучами. Этот случай описан в [1].

Видно, что интегральные кривые для сред с $\varkappa>0$ и с $\varkappa<0$ получаются друг из друга поворотом осей на $\pi/2$.

5. Опрокидывание квазипоперечных простых волн. Для того чтобы выяснить, какие из волн имеют тенденцию к опрокидыванию, вычисляются производные от характеристических скоростей вдоль своих интегральных кривых. Вдоль кривой, представленной уравнением $u_2=u_2(u_1)$, характеристические скорости записываются в виде $c_i=c_i(u_1,u_2(u_1))$. Производные вдоль этой линии можно вычислить следующим образом:

$$(5.1)\qquad \frac{dc_i}{du_1}=\frac{\partial c_i}{\partial u_1}+\frac{\partial c_i}{\partial u_2}\frac{du_2}{du_1}=-\frac{3}{4}\frac{\varkappa}{\rho_0c_i}\frac{u_1^2+u_2^2-G\mp\Delta}{\Delta}$$

$$\Delta=[(u_2^2-u_1^2-G)^2+4u_1^2u_2^2]^{1/2},\quad i=1,2$$

При $\varkappa>0$ могут опрокидываться быстрые волны, в которых $|u_1|$ растет, и медленные, в которых $|u_1|$ убывает. При $\varkappa<0$ тенденцию к опрокидыванию имеют и быстрые, и медленные волны, в которых $|u_1|$ растет. На фигуре стрелками изображены те направления изменения параметров, которые соответствуют неопрокидывающимся простым волнам.

Изложенные здесь результаты можно было бы получить другим способом, воспользовавшись выводами работы [3], рассматривая ударные волны очень малой интенсивности. Простую волну можно рассматривать как совокупность бесконечно слабых ударных волн, каждая из которых распространяется по деформированному состоянию, созданному впереди идущими ударными волнами. Тогда интегральные кривые для простых волн могут быть построены из отрезков начальных направлений ударных адиабат для каждого состояния. Можно видеть, что направление роста энтропии на отрезках ударной адиабаты совпадают с направлениями роста характеристических скоростей вдоль интегральных кривых простых волн. При $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = 0$ $(G = 0)$ часть ударной адиабаты [3] превращается в окружность, совпадающую с окружностью, на которой постоянна энтропия. В таком случае может существовать как неопрокидывающаяся простая волна, так и скачок, перемещающийся с постоянной скоростью $\alpha = (\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ)/2 - {}^1/_2\, \varkappa\, (u_1^2 + u_2^2) + 2bu_3^\circ$ без изменения формы.

Следует указать, что, так как в [3] разложение по малым деформациям начального состояния велось лишь до линейных членов (в данной работе до суммарной второй степени), то имеется некоторое отличие в коэффициентах адиабаты и выражения для скорости. Они совпадут, если в формулу (5.1) работы [3] добавить член $2khyz\delta/b^2$. Это не меняет качественных выводов работы [3].

Автор благодарит А. Г. Куликовского за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бленд Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость. К. Наук. думка, 1977. 151 с.
3. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 523—534.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1980