

УДК 533.6.011.72

РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУПОГРУЖЕННОМ В ЖИДКОСТЬ КЛИНЕ

Бежанов К. А.

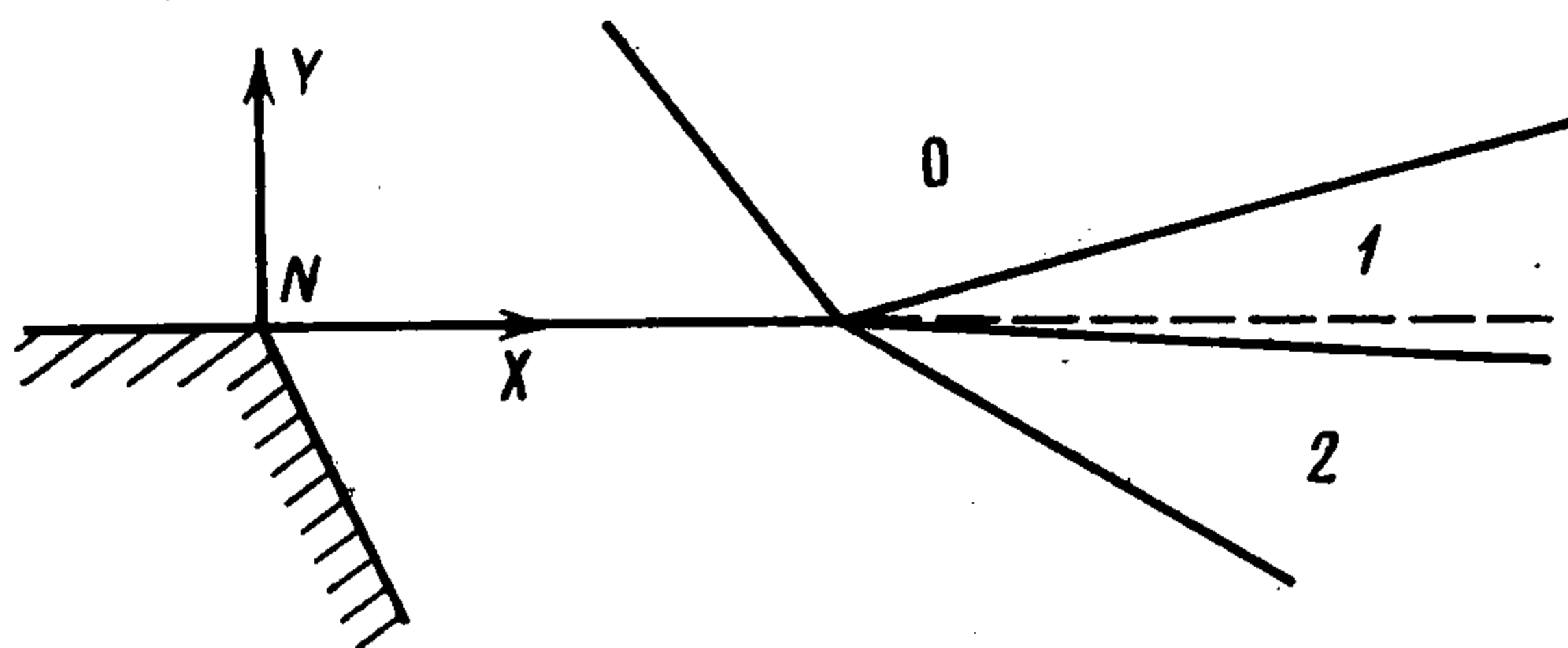
Исследуется дифракционная картина на границе раздела газа и жидкости, получающаяся в результате набегания системы ударных волн регулярного взаимодействия в газе на погруженный в жидкость клин произвольного угла раствора и с вершиной на невозмущенной границе раздела, когда одна из сторон клина составляет с невозмущенной поверхностью жидкости угол, близкий к развернутому. Жидкость предполагается слабосжимаемой, что позволяет рассмотреть задачу в линейной постановке методом, предложенным в работах [1—3].

Ранее рассматривался нормальный случай дифракции ударной волны на погруженном в жидкость клине с вершиной на невозмущенной границе раздела [3] и регулярный случай дифракции ударной волны на угле, близком к развернутому [4]. Ниже результаты работы [3] обобщаются на случай произвольного угла падения ударной волны в газе в режиме регулярного взаимодействия.

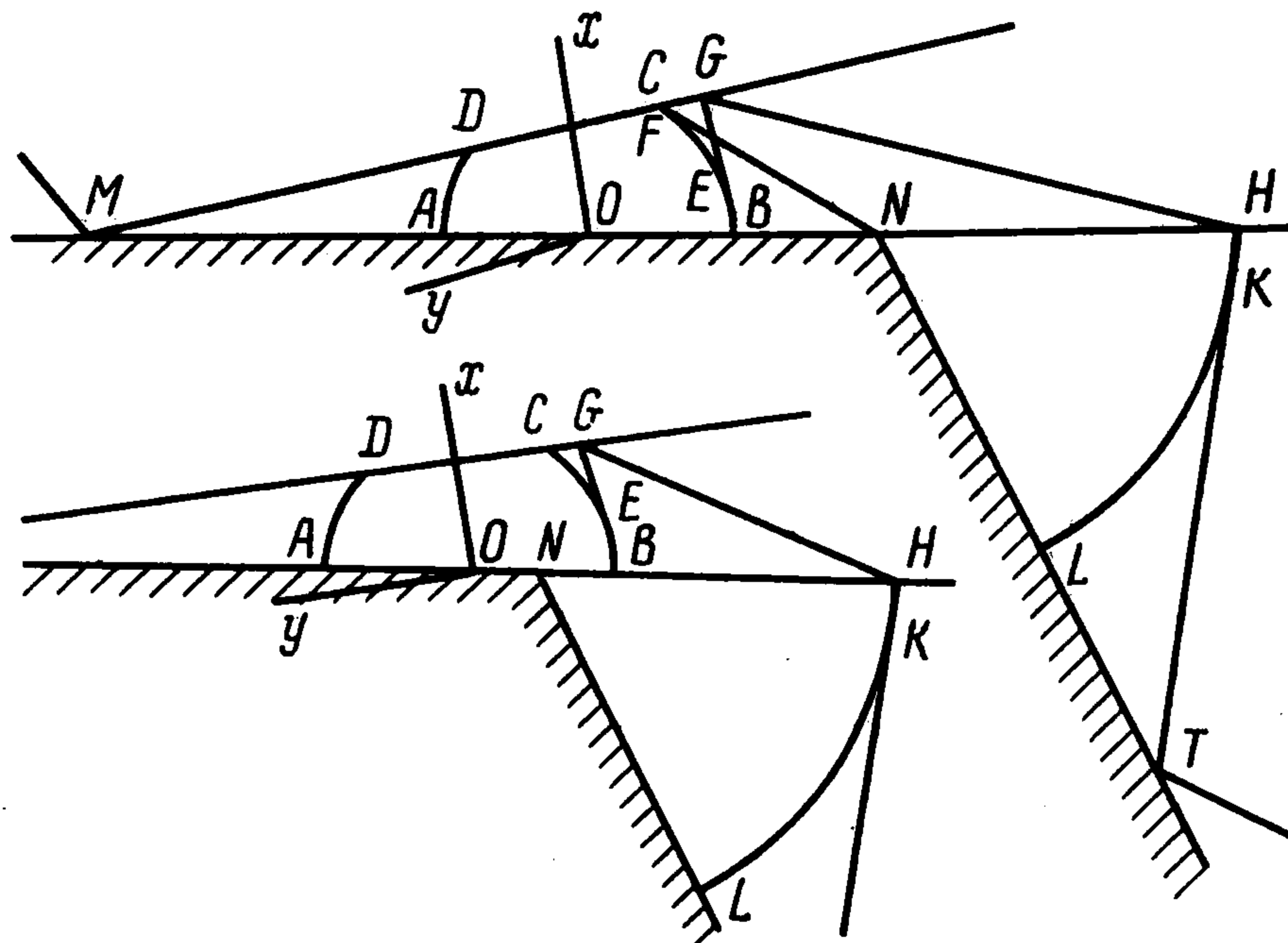
1. Постановка задачи. Плоская ударная волна произвольной интенсивности движется под некоторым углом к поверхности раздела двух сред с большим перепадом плотностей. Происходит отражение ударной волны в менее плотную среду и преломление в более плотную, а граница раздела продавливается и составляет с невозмущенным положением угол, близкий к развернутому. Эта задача рассматривалась в работе [5], где получена замкнутая алгебраическая система уравнений для определения неизвестных параметров течения в областях 0, 1 и 2 (фиг. 1).

В данной работе рассматривается дифракция описанной системы волн на помещенном в жидкость клине, одна из сторон которого граничит с жидкостью, а другая — с газом. Сторона клина, граничащая с газом, может составлять с невозмущенным уровнем свободной поверхности угол, близкий к развернутому. Возмущенное течение в жидкости состоит из области дифракции NLH с примыкающими к ней зонами с кусочно-постоянными параметрами, описание которых дано в [3]. Возмущенное течение за отраженной ударной волной в газе состоит из области дифракции $ABCD$ с граничащими с ней областями ADM и $BHGC$ и потока с постоянными параметрами, куда не доходят возмущения, вызванные присутствием клина в жидкости (фиг. 2). В области ADM параметры течения также постоянны и определяются по регулярному отражению ударной волны от твердой стенки [6]. В качестве основных невозмущенных параметров в газе берутся параметры за ударной волной, отраженной от твердой стенки, плоскость которой совпадает с невозмущенным уровнем свободной поверхности: P — давление, R — плотность, V_1 — скорость потока, параллельная стенке, a — скорость звука, а также U — нормальная скорость отраженной ударной волны и β — угол отражения ударной волны.

Из-за наличия малого параметра $\varepsilon = R/R_2$, где R_2 — плотность жидкости, задача может быть рассмотрена в линейной постановке. В первом приближении течение в жидкости определится по давлению P и известно из работы [3], а ударная волна в газе дифрагирует на границе раздела, форма которой известна. Течение в газе рассматривается в подвижных автомо-



Фиг. 1



Фиг. 2

дельных координатах

$$\bar{x} = \frac{X - V_1 t}{at}, \quad \bar{y} = \frac{Y}{at}$$

повернутых далее на угол $\theta_0 = \pi/2 + \beta$, где (X, Y) — неподвижные физические координаты, t — время, (x, y) — подвижные и повернутые автомодельные координаты. Тогда возмущение давления в полярных координатах (r, θ) удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad r^2 (1 - r^2) p_{rr} + p_{\theta\theta} + r (1 - 2r^2) p_r = 0, \quad p \rightarrow p/(a^2 R) \quad |$$

внутри единичной окружности эллиптического типа, а вне ее гиперболического [1], стрелка означает равенство с точностью до обозначения.

2. Течение газа вне области дифракции. В области $BHGC$ течение переменное и вызвано влиянием дифракционной области жидкости. Для определения возмущенных параметров преобразуем (1.1) в волновое уравнение [7]

$$(2.1) \quad p_{\mu\mu} - p_{\theta\theta} = 0, \quad \mu = \arccos r^{-1}, \quad r > 1 \quad |$$

характеристики которого — полукасательные к окружности Маха $r = 1$, направленные в разные стороны. Боковая волна HG совпадает с характеристикой первого семейства и в общем случае касается продолжения дуги BC в область впереди отраженной ударной волны. Отраженная волна GE совпадает с характеристикой второго семейства и касается дуги окружности Маха в точке E , а может касаться и продолжения дуги BC в область, занимаемую жидкостью, и отразиться от свободной поверхности по характеристике первого семейства.

В области $BHGE$ решение уравнения (2.1) ищется в виде $p = \chi(\mu + \theta)$, а вид функции χ определится из условия на границе раздела f газа с жидкостью и твердой стенкой (a_2 — скорость звука в жидкости)

$$p_\theta(r, -\theta_0) = -r^3 f''(r - M_1), \quad 1 < r < r_H, \quad r_H = a_2/a, \quad M_1 = V_1/a$$

Для рассмотренных углов клина имеет место возвышение уровня свободной поверхности в окрестности вершины клина, поэтому при $M_1 > 1$ выражение $f''(r - M_1)$ содержит производную дельта-функцию с носителем в вершине клина, а при $-\pi/2 < \theta_L \leq -\pi/4$ и регуляризацию $(r - M_1)^\alpha$, $\alpha > -2$, которая вместе с регулярной частью известна из [3]. Окончательно решение имеет вид

$$(2.2) \quad p = - \int_{\mu_H - \theta_0}^{\mu + \theta} \sec^3(\lambda + \theta_0) f''(\sec(\lambda + \theta_0) - \sec(\theta_F + \theta_0)) d\lambda$$

$$\mu_H = \arccos r_H^{-1}, \quad \theta_F = \arccos M_1^{-1} - \theta_0$$

В области CEG решение ищется в виде $p = \chi(\mu + \theta) + \kappa(\mu - \theta)$. Функция χ известна из решения в области $BHGE$, а κ определится из условия на ударной волне CG в полярной системе координат

$$(2.3) \quad E(\theta) p_r + F(\theta) p_\theta = 0, \quad r = m \sec \theta$$

$$E(\theta) = (m_1^2 + B) \cos \theta - m(m + A) \sin \theta \operatorname{tg} \theta, \quad m_1^2 = 1 - m^2$$

$$F(\theta) = m^{-1} B \cos^2 \theta \operatorname{ctg} \theta - (2m)^{-1} (1 + mA) \sin 2\theta$$

$$A = \frac{M_0^2 + 1}{2mM_0}, \quad B = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_0^2 - 1}{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}$$

$$M_0 = \frac{U + V}{a_1}, \quad m = \frac{U}{a}$$

где V — нормальная составляющая скорости потока впереди отраженной ударной волны, a_1 — скорость звука за падающей ударной волной, γ — отношение теплоемкостей.

Окончательно решение имеет вид

$$(2.4) \quad p = \int_{-\theta_E}^{\mu - \theta} L(\lambda) g^3(\lambda) f''(g(\lambda) - M_1) d\lambda -$$

$$- \int_{\mu_H - \theta_0}^{\mu + \theta} \sec^3(\lambda + \theta_0) f''(\sec(\lambda + \theta_0) - M_1) d\lambda$$

$$g(\lambda) = \frac{1 + m^2 - 2m \cos \lambda}{\sin(\beta + \lambda) + m^2 \sin(\beta - \lambda) - 2m \sin \beta}, \quad L(\lambda) = \frac{C(\lambda) + D(\lambda)}{C(\lambda) - D(\lambda)}$$

$$C(\lambda) = (1 - m \cos \lambda) [m_1^2 (m_1^2 + B) \sin^2 \lambda - (m + A) (1 - m \cos \lambda)^2]$$

$$D(\lambda) = (m - \cos \lambda) [(1 + mA) (1 - m \cos \lambda)^2 - m^2 B \sin^2 \lambda]$$

Если клин полностью погружен в жидкость [3], то для определения вида неизвестных функций χ и κ в области ADM получается сложная система двух функциональных уравнений.

Форма ударной волны $x = m + \psi(y)$ на участке CG определится из решения задачи Коши при $x = m$ (величина $p(y_G)$ известна из [5])

$$y\psi'(y) - \psi(y) = -BM_2^{-1}p(y), \quad \psi(y_G) = BM_2^{-1}p(y_G), \quad M_2 = V/a$$

3. Течение газа в области дифракции. Область дифракции ограничена отраженной ударной волной CD , двумя дугами окружности Маха BC и DA , при $M_1 > 1$ — твердой стенкой AB , а при $M_1 < 1$ — твердой стенкой AN и свободной поверхностью жидкости NB . Граничное условие на ударной волне имеет вид (2.3) при $\theta_C < \theta < \theta_D$, $\theta_D^* = -\theta_C = \arccos m$. Граничное условие на твердой стенке имеет вид

$$p_n(r, \pi - \theta_0) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad p_n(r, -\theta_0) = 0, \quad 0 < r < M_1$$

а на свободной поверхности жидкости

$$p_n(r, -\theta_0) = c_1(r), \quad M_1 \leq r < 1$$

Здесь

$$c_1(r) = \vartheta(1 - M_1) [v_1 \delta'(r - M_1) + v_2 \delta(r - M_1)] + r^2 f_1''(r - M_1)$$

$$v_1 = y_0 M_1^2, \quad v_2 = 2y_0 M_1, \quad y_0 = f(-M_1) - \operatorname{tg} \beta_2$$

n — внешняя нормаль, ϑ — единичная функция Хевисайда, δ — дельта-функция, f_1'' — регулярная часть функции f'' при $-\pi/4 < \theta < 0$ и обобщенная функция с сингулярностью $(r - M_1)^\alpha$, $\alpha > -2$ при $-\pi/2 < \theta < \leq \pi/4$, $\beta_2 = O(\varepsilon)$, β_2 — угол между стенкой клина, граничащей с газом, и продолжением линии уровня свободной поверхности, взятый со знаком плюс в направлении отсчета против часовой стрелки. ■

Граничное условие на дуге BC окружности Маха получим из (2.2) и (2.4), сделав также замену переменной y производной дельта-функции [8]

$$p_\theta(1, \theta) = c_2(\theta), \quad -\theta_0 < \theta < \theta_C, \quad p_\theta(1, \theta) = 0, \quad \theta_D < \theta < \theta_A$$

Здесь

$$c_2(\theta) = -\vartheta(M_1 - 1) [v_3 \delta'(\theta - \theta_F) + v_4 \delta(\theta - \theta_F)] - \sec^3(\theta + \theta_0) f''(\sec(\theta - \theta_0) - M_1) - \vartheta(\theta - \theta_E) \times \\ \times L(\theta) g^3(-\theta) f''(g(-\theta) - M_1)$$

$$v_3 = [y_0 M_1 (M_1^2 - 1)^{-1}], \quad v_4 = v_3 (M_1^2 - 2) (M_1^2 - 1)^{-1/2}$$

$$\theta_A = [\pi/2 - \beta]$$

Два условия, обеспечивающие гладкость фронта ударной волны в точках C и D , а также изменение давления вдоль CD на заданную величину, имеют вид

$$(3.1) \quad \int_{-m_1}^{m_1} \frac{p_y}{y} dy = \frac{M_2}{B} (\psi_y(-m_1) - \psi_y(m_1)), \quad \int_{-m_1}^{m_1} p_y dy = p_D - p_C$$

Уравнение (1.1) преобразованием Чаплыгина [1, 2] приводится к уравнению Лапласа, а область дифракции преобразуется в криволинейный ортогональный четырехугольник плоскости $\zeta = [\rho e^{i\theta}$, ограниченный дугами окружностей $\{\rho = \rho(\theta), \theta_C < \theta < \theta_D\}$, $\{\rho = 1, \theta_B < \theta < \theta_C, \theta_D < \theta < \theta_A\}$ и отрезком прямой $\{\rho < 1, \theta = \pi - \theta_0, \theta = -\theta_0\}$. Тогда граничное условие для нормальной и касательной производной давления имеет вид

$$(3.2) \quad a p_n + b p_s = c$$

$$\begin{array}{llll} a = a(\theta), & b = b(\theta), & c = 0, & \rho = \rho(\theta), \quad \theta_C < \theta < \theta_D \\ a = 0, & b = 1, & c = 0, & \rho = 1, \quad \theta_D < \theta < \theta_A \\ a = 1, & b = 0, & c = 0, & \theta = \pi - \theta_0, \quad 0 < \rho < 1 \\ a = 1, & b = 0, & c = 0, & \theta = -\theta_0, \quad 0 < \rho < \rho_1 \\ a = 1, & b = 0, & c = c_3(\rho), & \theta = -\theta_0, \quad \rho_1 < \rho < 1 \\ a = 0, & b = 1, & c = c_2(\theta), & \rho = 1, \quad \theta_B < \theta < \theta_C \end{array}$$

Здесь

$$a(\theta) = \sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta}, \quad b(\theta) = [B \operatorname{ctg} \theta - mA] \operatorname{tg} \theta$$

$$c_3(\rho) = \vartheta(1 - M_1) [v_5 \delta'(\rho - \rho_1) + v_6 \delta(\rho - \rho_1) + f_2(\rho)]$$

$$f_2(\rho) = \frac{8\rho^2}{(1 + \rho^2)^3} f_1''\left(\frac{2\rho}{1 + \rho^2} - M_1\right), \quad \rho(\theta) = \frac{\cos \theta - \sqrt{m^2 - \cos^2 \theta}}{m}$$

$$v_5 = 2y_0\rho_1^2 \frac{1 + \rho_1^2}{(1 - \rho_1^2)^2}, \quad v_6 = 4y_0\rho_1 \frac{1 - 4\rho_1^2 + \rho_1^4}{(1 - \rho_1^2)^3}$$

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - M_1^2}}{M_1}$$

ориентация (n, s) совпадает с (x, y) .

Отобразим область, ограниченную криволинейным четырехугольником плоскости ζ , на внутренность прямоугольника $\{0 < \sigma < \sigma_0, 0 < \tau < \pi\}$ плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ [4]

$$\omega = \ln \frac{\zeta - e^{i\theta_2}}{\zeta - e^{i\theta_1}} - i \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad \theta_1 = \beta_1 - \beta$$

$$\theta_2 = \pi - \beta - \beta_1$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{q}, \quad q = \frac{1 - \sqrt{M^2 - 1} \operatorname{tg} \beta}{1 + \sqrt{M^2 - 1} \operatorname{tg} \beta}, \quad \beta_1 = \arcsin M^{-1}$$

$$M = m_1 \operatorname{cosec} \beta$$

Введем аналитическую функцию $W(\omega) = p_\sigma - ip_\tau$, тогда граничное условие (3.2) примет вид задачи Гильберта в классе обобщенных функций

$$(3.3) \quad a_1 p_\sigma - b_1 p_\tau = d$$

$$a_1 = a_1(\tau), \quad b_1 = b_1(\tau), \quad d = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad 0 < \tau < \pi$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad d = 0, \quad \tau = \pi, \quad 0 < \sigma < \sigma_0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad d = d_1(\tau), \quad \sigma = 0, \quad 0 < \tau < \pi$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad d = d_2(\sigma), \quad \tau = 0, \quad 0 < \sigma < \sigma_0$$

Здесь

$$a_1(\tau) = \operatorname{tg} \beta M \sqrt{M^2 - 1} (M \cos \tau - m_0) \sin \tau,$$

$$m_0 = \sqrt{1 - (M^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$b_1(\tau) = \operatorname{tg}^2 \beta m_0^{-2} M^2 B (M - m_0 \cos \tau)^2 - mA (M \cos \tau - m_0)^2$$

$$d_1(\tau) = \vartheta (1 - M_1) [v_7 \delta'(\tau - \tau_1) + v_6 \delta(\tau - \tau_1) + f_3(\tau)]$$

$$d_2(\sigma) = \vartheta (M_1 - 1) [v_8 \delta'(\sigma - \sigma_1) + v_4 \delta(\sigma - \sigma_1)] - f_4(\sigma) + \Omega(\sigma)$$

$$f_3(\tau) = \frac{\vartheta(\tau_1 - \tau) \cos \beta_1}{1 + \sin(\tau - \beta_1)} f_2 \left(\frac{\cos \tau - \sin \beta_1}{1 + \sin(\tau - \beta_1)} \right)$$

$$f_4(\sigma) = \cos \beta_1 \frac{(\operatorname{ch} \sigma - \sin \beta_1)^2}{(1 - \sin \beta_1 \operatorname{ch} \sigma)^3} f'' \left(\frac{\operatorname{ch} \sigma - \sin \beta_1}{1 - \sin \beta_1 \operatorname{ch} \sigma} - M_1 \right)$$

$$\Omega(\sigma) = \frac{\vartheta(\sigma - \sigma_2) \cos \beta_1}{\operatorname{ch} \sigma - \sin \beta_1} \frac{T(\sigma) + N(\sigma)}{T(\sigma) - N(\sigma)} \varphi^3(\sigma) f''(\varphi(\sigma) - M_1)$$

$$\tau_1 = \pi/2 + \beta_1 - 2 \operatorname{arccotg}(\rho_1 \sec \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_1)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(\theta_{F,E} - \theta_2)}{1 - \cos(\theta_{F,E} - \theta_1)}$$

$$v_7 = -v_5 \sec \beta_1 [1 + \sin(\tau_1 - \beta_1)], v_8 = v_3 (\sec \beta_1 \operatorname{ch} \sigma_1 - \operatorname{tg} \beta_1)$$

а $T(\sigma)$, $N(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$ легко найти, если в выражения (2.4) для $C(\theta)$, $D(\theta)$ и $g(-\theta)$ подставить

$$\sin \theta = \frac{\sin \beta_1 \cos \beta \operatorname{ch} \sigma - \cos \beta_1 \sin \beta \operatorname{sh} \sigma - \cos \beta}{\operatorname{ch} \sigma - \sin \beta_1}$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta \operatorname{sh} \sigma + \sin \beta_1 \sin \beta \operatorname{ch} \sigma - \sin \beta}{\operatorname{ch} \sigma - \sin \beta_1}$$

Условия (3.1) в плоскости ω запишутся в виде

$$(3.4) \quad \int_0^\pi \frac{M - m_0 \cos \tau}{M \cos \tau - m_0} p_\tau d\tau = G(\psi_\nu(m_1) - \psi_\nu(-m_1))$$

$$\int_0^\pi p_\tau d\tau = p_D - p_C, \quad G = mm_0 M_2 M^{-1} B^{-1} \operatorname{ctg} \beta$$

Отобразим прямоугольник плоскости ω на верхнюю полуплоскость плоскости $w = u + iv$

$$w = \frac{\vartheta_2(0, q) \vartheta_2(-i\omega, q)}{\vartheta_3(0, q) \vartheta_3(-i\omega, q)}$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ — эллиптические тэта-функции [9]. Ударной волне соответствуют промежутки $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, а стенке — $(-k, k)$, где k — модуль эллиптического интеграла. Индекс задачи Гильберта (3.3) в классе функций, интегрируемых в точках $w = \pm 1$, равен единице.

Представим каноническую функцию в виде

$$\begin{aligned} Z(w) &= Z_1(w) Z_2(w) \\ Z_1(w) &= (w^2 - 1)^{-1/2} = i \frac{\vartheta_3(0, q) \vartheta_3(-i\omega, q)}{\vartheta_4(0, q) \vartheta_4(-i\omega, q)} \\ Z_2(w(\omega)) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \left[4 - \sum_{j=1}^4 \left(\frac{h_j - 1}{h_j + 1}\right)^n\right] \frac{\operatorname{ch} n\omega}{n \operatorname{sh} n\sigma_0}\right) \\ h_j &= \left(\frac{M + m_0}{M - m_0}\right)^{1/2} (l_{1,2} \pm \sqrt{l_{1,2}^2 - 1}), \\ l_{1,2} &= \frac{m_1^2 \pm (m_1^4 - 4mm_1^2AB - mB)^{1/2}}{2(m_1^2A - mB)} \end{aligned}$$

где $Z_1(w)$ имеет кусочно-постоянный аргумент на границе и устраняет разрывы в точках $w = \pm 1$ [2], а $Z_2(w)$ удовлетворяет условию на образе ударной волны [4].

Тогда решение задачи Гильберта (3.3) имеет вид [10, 11]

$$\begin{aligned} W(\omega(w)) &= Z(w) \left(D_0 + D_1 w + \frac{1}{\pi i} \int_{-k}^k \frac{d_1(\tau(s))}{Z(s)} \frac{ds}{s-w} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi i} \int_k^1 \frac{d_2(\sigma(s))}{Z(s)} \frac{ds}{s-w} \right) \end{aligned}$$

Выпишем также решение в плоскости ω и воспользуемся свойством дельта-функции и ее производной в качестве плотности интеграла типа Коши [2, 12]

$$\begin{aligned} (3.5) \quad W(\omega) &= z(\omega) \left[D_0 + D_1 w(\omega) + \right. \\ &+ \vartheta(1 - M_1) \left(\frac{v_9}{\pi i} \frac{d}{ds} \frac{1}{Z(s)(s-w(\omega))} \Big|_{s=u_1} + \right. \\ &+ \left. \frac{v_{10}}{\pi i} \frac{1}{u_1 - w(\omega)} + \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_1}^0 \frac{f_3(s)}{z(s)} U(0, s, \omega) ds \right) + \\ &+ \vartheta(M_1 - 1) \left(\frac{v_{11}}{\pi i} \frac{d}{ds} \frac{1}{Z(s)(s-w(\omega))} \Big|_{s=u_2} + \right. \\ &+ \left. \frac{v_{12}}{\pi i} \frac{1}{u_2 - w(\omega)} \right) + \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma_2}^{\sigma_0} \frac{\Omega(s)}{z(s)} U(s, 0, \omega) ds - \\ &\left. - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\sigma_0} \frac{f_4(s)}{z(s)} U(s, 0, \omega) ds \right] \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} U(0, s, \omega) &= \frac{u_s(0, s)}{u(0, s) - w(\omega)}, \quad U(s, 0, \omega) = \frac{u_s(s, 0)}{u(s, 0) - w(\omega)} \\ u(0, \tau) &= \sqrt{k} \frac{\vartheta_2(\tau, q)}{\vartheta_3(\tau, q)}, \quad u(\sigma, 0) = \sqrt{k} \frac{\vartheta_4(\sigma, q')}{\vartheta_3(\sigma, q')} \\ u_\tau(0, \tau) &= -\frac{2K \sqrt{k} k'}{\pi} \frac{\vartheta_1(\tau, q) \vartheta_4(\tau, q)}{\vartheta_3^2(\tau, q)}, \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \end{aligned}$$

$$u_{\sigma}(\sigma, 0) = \frac{2K \sqrt{kk'}}{\pi} \frac{\vartheta_1(\sigma, q') \vartheta_2(\sigma, q')}{\vartheta_3^2(\sigma, q')}, \quad q' = \exp \frac{\pi^2}{i \ln q}$$

$$u_{\tau\tau}(0, \tau) = -\frac{4K^2 \sqrt{kk'}}{\pi^2} \frac{\vartheta_2(\tau, q)}{\vartheta_3^3(\tau, q)} [\vartheta_4^2(\tau, q) + k\vartheta_1^2(\tau, q)]$$

$$u_{\sigma\sigma}(\sigma, 0) = \frac{4K^2 \sqrt{kk'}}{\pi^2} \frac{\vartheta_4(\sigma, q')}{\vartheta_3^3(\sigma, q')} [\vartheta_2^2(\sigma, q') - k\vartheta_1^2(\sigma, q')]$$

$$z(\omega) = Z(w(\omega)), \quad u_1 = u(0, \tau_1), \quad u_2 = u(\sigma_1, 0), \quad k^2 + k'^2 = 1$$

$$v_9 = -v_7 u_{\tau}^2(0, \tau_1), \quad v_{10} = [v_6 u_{\tau}(0, \tau_1) - v_7 u_{\tau\tau}(0, \tau_1)] Z^{-1}(u_1)$$

$$v_{11} = v_8 u_{\sigma}^2(\sigma_1, 0), \quad v_{12} = [v_{11} u_{\sigma}(\sigma_1, 0) - v_8 u_{\sigma\sigma}(\sigma_1, 0)] Z^{-1}(u_2)$$

K — полный эллиптический интеграл для модуля k [9], а действительные постоянные D_0 и D_1 находятся из условий (3.4).

После определения давления из (3.5) можно найти форму ударной волны по распределению давления на ее фронте [3]. Из (3.5) видно, что распределение давления имеет особенность типа полюса первого порядка в вершине клина при $M_1 < 1$ и в точке касания характеристики, исходящей из вершины клина, с окружностью Маха при $M_1 > 1$. При этом давление имеет интегрируемую особенность, поскольку все интегралы рассматриваются в смысле главного значения. Особенность более высокого порядка, чем логарифмическая, которая встречается в задачах дифракции на твердых стенках [1, 2, 4], объясняется податливостью свободной поверхности жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Diffraction of blast. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1949, v. 198, No. 1055, p. 454—470.
2. Бежанов К. А. К теории дифракции ударных волн. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 718—722.
3. Бежанов К. А. Дифракция ударной волны при ее нормальном падении на свободную поверхность жидкости, содержащей клин с вершиной на границе раздела. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 672—679.
4. Ter-Minassiants S. M. Diffraction accompanying the regular reflexion of a plane obliquely impinging shock wave from the walls of an obtuse wedge. — J. Fluid Mech., 1969, v. 35, No. 2, p. 391—410.
5. Губанов А. И. Отражение и преломление ударных волн на границе двух сред. — Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 5, с. 615.
6. Курант Г., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 426с.
7. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л. — М.: Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1937. 998 с.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Рогожин В. С. Краевая задача Римана в классе обобщенных функций. — Изв. АН СССР. Сер матем., 1964, т. 28, вып. 6, с. 1326—1344.

Москва

Поступила в редакцию
25.IX.1981