Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 530.12 : 531.51

ОРБИТАЛЬНАЯ И ПЕРИЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Выблый Ю. П., Костюкович Н. Н.

В рамках тетрадного формализма общей теории относительности (ОТО) в гравитационном поле Шварцшильда вводятся системы отсчета, обобщающие орбитальную и перигейную системы координат, широко используемые в ньютоновой теории тяготения при решении задач инерциальной навигации. В этих системах отсчета получены точные выражения для угловой скорости прецессии гироскопа в случае его произвольного геодезического движения и физические компоненты напряженности магнитного дипольного поля, которые используются при магнитном управлении ориентацией спутников. Установлено, что гравитационные поправки к напряженности магнитного поля, в принципе, могут быть измерены современными квантовыми магнитометрами.

При движении спутника основную задачу инерциальной навигации составляет описание физических явлений непосредственно в сопутствующей ему системе отсчета (с. о.) с последующим пересчетом результатов (если это нужно) в любую другую с. о. [1, 2]. На практике обычно необходима определенная ориентация измерительной аппаратуры, совершающей орбитальное движение в гравитационном поле, и ее стабилизация в заданном положении в течение длительного промежутка времени. Поэтому в ньютоновой теории тяготения соответствующие с. о. (орбитальная, перигейная и др.) задаются подвижными системами координат с началом в центре масс спутника, специальным образом ориентированными относительно плоскости орбиты. Так, в орбитальной с. о. первая координатная ось направлена по текущему радиус-вектору, вторая и третья — по трансверсали и нормали к плоскости орбиты, а в перицентрической с. о. орбитальная ориентация осей фиксируется в одном из перицентров орбиты и остается неизменной вдоль траектории [3, 4].

В связи с растущим интересом к исследованию с помощью спутников эффектов ОТО представляется целесообразным перенесение в нее понятий упомянутых с. о. В теории относительности с. о. задается лоренцевым базисом $\mathbf{e}_{(k)}$, проекциями которого на оси глобальной системы координат x^μ являются тетрады $h^\mu_{(k)}$ [5]. (Латинские и греческие индексы начал алфавитов принимают значения 1, 2, 3, а начиная с k и $\varkappa$ — 0, 1, 2, 3. Индексы величин отнесенных к лоренцевому базису, берутся в скобки.) Поэтому последовательное решение задач инерциальной навигации в рамках ОТО требует использования тетрадного формализма, позволяющего ввести сопутствующие с. о. с необходимой ориентацией пространственной триады $h^\mu_{(a)}$. Часто в ОТО используют с. о. с векторами триады, касательными к координатным линиям, что привносит несущественные эффекты, связанные с постоянным изменением ориентации триады вдоль траектории, и может затруднить анализ исследуемых явлений.

Цель данной работы — введение в рамках тетрадного формализма сопутствующих с. о. с орбитальной и перицентрической ориентациями триады для произвольного геодезического движения тела отсчета в поле Шварцшильда и нахождение в них поправок ОТО к движению гироскопа и измеряемым компонентам магнитного дипольного поля, поскольку именно гироскопы и магнитометры обычно используют для ориентации и стабилизации спутников. При этом необходимо учитывать всевозможные возмущения, действующие на гироскоп, а при магнитном управлении ориентацией необходимо знать и компоненты измеряемого магнитного поля в функции орбитальных параметров (см., например, [3, 4, 6]).

1. Пусть тело отсчета сопутствующей спутнику с. о. движется по геодезической в поле Шварцшильда с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\left(-a^{-2},\ a^2,\ r^2,\ r^2\sin^2\theta\right),\quad a = (1 - 2m/r)^{-1/2}$$

Компоненты его 4-скорости зададим в виде

$$(1.1)\qquad u_\mu = (-\varepsilon,\ aA,\ -\nu, h),\quad A^2 = \varepsilon^2 a^2 - 1 - H^2/r^2$$
$$H^2 = \nu^2 + h^2/\sin^2\theta$$

Постоянные ε, H и h имеют смысл удельных полной энергии пробной массы, ее орбитального момента и его проекции на ось $\theta = 0$ соответственно, а выбор знаков при ν и h обусловлен начальными условиями.

В плоскости орбиты введем полярную систему координат (r, Φ), определив угол Φ соотношением

$$(1.2)\qquad r^2\,\Phi^{\cdot} = H,\quad \Phi^{\cdot} = d\Phi/ds = (\theta^{\cdot 2} + \sin^2\theta\varphi^{\cdot 2})^{1/2}$$

Решение уравнений движения методом квазиконического сечения [7, 8] дает уравнение орбиты в виде

$$(1.3)\qquad r = pw^{-1},\quad w = 1 + e\cos\Psi\,(\Phi)$$

где e и p — эксцентриситет и фокальный параметр, а истинная аномалия Ψ неявно задается квадратурой

$$(1.4)\qquad \Phi = \int\limits_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{F(\Psi)},\quad F(\Psi) = \left(1 - \frac{4m}{p} - \frac{2m}{p}w\right)^{1/2}$$

Постоянные движения ε и H связаны с орбитальными параметрами соотношениями (i — угол наклонения плоскости орбиты к экватору)

$$(1.5)\qquad \varepsilon^2 = \frac{\varkappa^2}{p\delta^2},\quad H^2 = \frac{h^2}{\cos^2 i} = \frac{mp^2}{\delta^2},\quad \varkappa = \sqrt{(p-2m)^2 - 4m^2e^2},$$
$$\delta = \sqrt{p - m(3+e^2)}$$

Как известно, решение системы уравнений $g_{\mu\nu} = h_\mu^{(k)} h_\nu^{(n)} \eta_{(k)(n)}$, где $\eta_{(k)(n)} = \mathrm{diag}\,(-1, +1, +1, +1)$, определяющих тетраду $h_{(k)}^\mu$, требует задания дополнительных (калибровочных [5]) условий, определяющих характер движения с. о. (калибровка монады $h_{(0)}^\mu$) и ориентацию векторов ее пространственного базиса (калибровка триады $h_{(a)}^\mu$). Калибровочные условия задаются на основе различных физических, геометрических и других соображений [5]. Однако, поскольку выбор калибровок, задающих орбитальную и перицентрическую ориентации триады (особенно в случае сопутствия), неочевиден, построим вначале тетрады с требуемой ориентацией, задающие с. о., закрепленные относительно глобальной системы координат. Калибровка монады в этом случае имеет вид $h_{(0)}^\alpha = 0$ и определяет тензор

$$\gamma_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu - h_{(0)}^\mu h_\nu^{(0)},\quad \gamma_0{}^\mu = \gamma_\mu{}^0 = 0,\quad \gamma_\beta{}^\alpha = \delta_\beta{}^\alpha$$

осуществляющий проектирование 4-векторов в ортогональное монаде 3-пространство, являющееся собственным для с. о.

Введем в каждой точке орбиты триаду, ориентация которой совпадает с используемой в ньютоновой теории тяготения орбитальной с. о. Для этого учтем, что трехмерный вектор скорости $v^\mu = \gamma_\nu{}^\mu\, u^\nu$ и трехмерный вектор $k^\mu = \gamma_\nu{}^\mu\, \delta_1{}^\nu$ в направлении текущего радиус-вектора пробной массы лежат в плоскости орбиты. Выберем k^μ за первый, а $m^\mu = \gamma^{-1/2}\varepsilon^{\mu\lambda\sigma} n_\lambda k_\sigma$ и $n^\mu = \gamma^{-1/2}\varepsilon^{\mu\lambda\sigma} k_\lambda v_\sigma$ соответственно за второй и третий векторы пространственного базиса. Здесь $\gamma = \det\gamma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\mu\lambda\sigma} = h_{\tau(0)}\,\varepsilon^{\tau\mu\lambda\sigma}$, где $\varepsilon^{\tau\mu\lambda\sigma}$ — символ Леви-Чивита. При таком определении вектор m^μ направлен в сторону движения и лежит в плоскости орбиты, а n^μ ортогонален ей. Нормируя введенные векторы, находим закрепленную орбитальную тетраду

(1.6) $$h_{(0)}{}^{\mu} = (a,\ 0,\ 0,\ 0),\quad h_{(1)}{}^{\mu} = (0,\ a^{-1},\ 0,\ 0)$$

$$h^{\mu}_{(2)} = \left(0, 0, -\frac{\nu}{Hr}, \frac{h}{Hr\sin^2\theta}\right)$$

$$h^{\mu}_{(3)} = \left(0, 0, -\frac{h}{Hr\sin\theta}, -\frac{\nu}{Hr\sin\theta}\right)$$

При помощи инвариантного определения угла получаем матрицу направляющих косинусов между векторами тетрады (1.6) и векторами, касательными к координатным линиям сферической системы координат:

(1.7) $$\|\cos\eta\| = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{Vmatrix},\quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\Lambda = \frac{1}{H}\begin{Vmatrix} -\nu & -h/\sin\theta \\ h/\sin\theta & -\nu \end{Vmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{Vmatrix} -\sin i\cos\Phi & -\cos i \\ \cos i & -\sin i\cos\Phi \end{Vmatrix}$$

которую (после перехода к декартовым координатам) обычно используют в ньютоновой теории тяготения для введения орбитальной с. о. [3, 4, 6].

Подействовав на (1.6) матрицей локального поворота

$$L^{(0)}_{(0)} = L^{(3)}_{(3)} = 1,\qquad L^{(1)}_{(1)} = L^{(2)}_{(2)} = \cos\Phi.\qquad L^{(1)}_{(2)} = -L^{(2)}_{(1)} = -\sin\Phi$$

определяемой через полярный угол Φ из (1.4), получим закрепленную перицентрическую тетраду

(1.8) $$h^{*\mu}_{(0)} = (a, 0, 0, 0),\quad h^{*\mu}_{(1)} = \left(0, \frac{\cos\Phi}{a}, \frac{\nu\sin\Phi}{Hr}, -\frac{h\sin\Phi}{Hr\sin^2\theta}\right)$$

$$h^{*\mu}_{(2)} = \left(0, \frac{\sin\Phi}{a}, -\frac{\nu\cos\Phi}{Hr}, \frac{h\cos\Phi}{Hr\sin^2\theta}\right),$$

$$h^{*\mu}_{(3)} = \left(0, 0, -\frac{h}{Hr\sin\theta}, -\frac{\nu}{Hr\sin\theta}\right)$$

с неизменной вдоль траектории ориентацией триады, совпадающей с ее начальной (орбитальной) ориентацией в момент прохождения первого перицентра орбиты ($\Phi = 0$). Таким образом, для вектора $h_{(1)}{}^{*\mu}$ неизменность его ориентации означает, что инвариантный угол между текущим радиус-вектором и вектором $h_{(1)}{}^{*\mu}$ в любой точке орбиты $(r,\ \Phi)$ равен полярному углу Φ, а для вектора $h_{(2)}{}^{*\mu}$ соответствующий угол равен $\pi/2 -$ $- \Phi$. Закрепленные тетрады (1.6) и (1.8), используемые в данной работе как вспомогательные при построении сопутствующих с. о., представляют и самостоятельный интерес при исследовании моментов внешних сил, действующих на спутник (см., например, [4]).

Для перехода к сопутствующим с. о. с той же ориентацией триад воспользуемся локальным преобразованием Лоренца (локальным бустом вида [1]

(1.9) $$L^{(k)}_{(0)} = L^{(0)}_{(k)} = -u^{(k)},\quad L^{(a)}_{(b)} = \delta^{(a)}_{(b)} + \alpha u^{(a)}u_{(b)},\quad \alpha = (a\varepsilon + 1)^{-1}$$

параметры которого — тетрадные компоненты 4-скорости тела отсчета в закрепленных с. о. (1.6) и (1.8)

$$u^{(k)} = h_{\mu}{}^{(k)}\, u^{\mu} = (a\varepsilon,\ A,\ H/r,\ 0)$$

$$u^{*(k)} = h^{*(k)}_{\mu}u^{\mu} = \left(a\varepsilon, A\cos\Phi - \frac{H}{r}\sin\Phi, A\sin\Phi + \frac{H}{r}\cos\Phi, 0\right)$$

После действия на (1.6) преобразования (1.9) с параметрами $u^{(k)}$ находим сопутствующую тетраду с орбитальной ориентацией триады

(1.10) $$h^{\mu}_{(0)} = \left(\varepsilon a^2, \frac{A}{a}, -\frac{\nu}{r^2}, \frac{h}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$h^{\mu}_{(1)}=\left(aA,\frac{M}{a},-\frac{\alpha\nu A}{r^2},\frac{\alpha hA}{r^2\sin^2\theta}\right),\qquad M=1+\alpha A^2$$
$$h^{\mu}_{(2)}=\left(\frac{aH}{r},\frac{\alpha HA}{ar},-\frac{\nu N}{Hr},\frac{hN}{Hr\sin^2\theta}\right),\qquad N=1+\frac{\alpha H^2}{r^2}$$
$$h^{\mu}_{(3)}=\left(0,0,-\frac{h}{Hr\sin\theta},-\frac{\nu}{Hr\sin\theta}\right)$$

которая для экваториального движения тела отсчета после перестановки второго и третьего столбцов совпадает с «нормально-диагональной» тетрадой из [9]. Применение преобразования (1.9) с параметрами $u^{*(k)}$ к (1.8) дает сопутствующую перицентрическую тетраду

(1.11)
$$h^{*\mu}_{(0)}=\left(\varepsilon a^2,\frac{A}{a},-\frac{\nu}{r^2},\frac{h}{r^2\sin^2\theta}\right)$$
$$h^{*\mu}_{(1)}=\left(a\left(A\cos\Phi-\frac{H}{r}\sin\Phi\right),a^{-1}\left(M\cos\Phi-\frac{\alpha AH}{r}\sin\Phi\right)\right.$$
$$\left.\frac{\nu V}{Hr},-\frac{hV}{Hr\sin^2\theta}\right),\qquad V=N\sin\Phi-\frac{\alpha AH}{r}\cos\Phi$$
$$h^{*\mu}_{(2)}=\left(a\left(A\sin\Phi+\frac{H}{r}\cos\Phi\right),a^{-1}\left(M\sin\Phi+\frac{\alpha AH}{r}\cos\Phi\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\nu W}{Hr},\frac{hW}{Hr\sin^2\theta}\right),\qquad W=N\cos\Phi+\frac{\alpha AH}{r}\sin\Phi$$
$$h^{*\mu}_{(3)}=\left(0,0,-\frac{h}{Hr\sin\theta},-\frac{\nu}{Hr\sin\theta}\right)$$

В тетрадном формализме свойства с. о. определяются динамическими характеристиками, выражаемыми через коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{(k)(n)(m)}=h_{(k)}{}^{\mu}h_{(m)}{}^{\nu}\nabla_{\nu}h_{\mu(n)}$ [10], где ∇_{μ} — ковариантная производная. Для тетрад (1.10) и (1.11) отличные от нуля компоненты $\gamma_{(k)(n)(m)}$ имеют вид

(1.12)
$$\gamma_{(0)(1)(1)}=\frac{ma}{Ar^2}-\frac{H^2}{aAr^3}\left[1-\frac{ma^2}{r}(1-\alpha^2A^2)\right]$$
$$\gamma_{(1)(3)(3)}=\frac{\alpha AH^2\cos\theta}{\nu r^2\sin\theta}-\frac{M}{ar}$$
$$\gamma_{(0)(1)(2)}=\frac{H}{ar^2}\left(1-\frac{m\alpha Na^2}{r}\right),\qquad \gamma_{(1)(2)(0)}=-\frac{H}{ar^2}\left(1-\frac{m\alpha\varepsilon a^3}{r}\right)$$
$$\gamma_{(0)(2)(2)}=-\frac{A}{ar}\left(1-\frac{m\alpha^2H^2a^2}{r^3}\right),\qquad \gamma_{(0)(3)(3)}=\frac{H^2\cos\theta}{\nu r^2\sin\theta}-\frac{A}{ar}$$
$$\gamma_{(1)(2)(2)}=-\frac{\varepsilon}{r}-\frac{\alpha H^2}{ar^3}\left[1-\frac{ma^2}{r}(1+a\varepsilon\alpha)\right],$$
$$\gamma_{(2)(3)(3)}=\frac{NH\cos\theta}{\nu r\sin\theta}-\frac{\alpha AH}{ar^2}$$
$$\gamma_{(1)(2)(1)}=\frac{H}{aAr^2}\left[\frac{\alpha H^2}{r^2}-\frac{ma^2}{r}\left(1+\frac{H^2}{r^2}-N\alpha\varepsilon^2a^2\right)\right]$$

(1.13)
$$\overset{*}{\gamma}_{(0)(1)(1)}=\cos^2\Phi\gamma_{(0)(1)(1)}+\sin^2\Phi\gamma_{(0)(2)(2)}-\sin2\Phi\gamma_{(0)(1)(2)}$$
$$\overset{*}{\gamma}_{(1)(3)(3)}=\cos\Phi\gamma_{(1)(3)(3)}-\sin\Phi\gamma_{(2)(3)(3)},\quad \overset{*}{\gamma}_{(0)(1)(2)}=\cos2\Phi\gamma_{(0)(1)(2)}+$$
$$+\cos\Phi\sin\Phi\,(\gamma_{(0)(2)(2)}-\gamma_{(0)(1)(1)}),\qquad \overset{*}{\gamma}_{(1)(2)(0)}=\frac{H}{r^2}+\gamma_{(1)(2)(0)}$$
$$\overset{*}{\gamma}_{(0)(2)(2)}=\cos^2\Phi\gamma_{(0)(2)(2)}+\sin^2\Phi\gamma_{(0)(1)(1)}+\sin2\Phi\gamma_{(0)(1)(2)}$$
$$\overset{*}{\gamma}_{(0)(3)(3)}=\gamma_{(0)(3)(3)},\qquad \overset{*}{\gamma}_{(1)(2)(2)}=\cos\Phi\left(\gamma_{(1)(2)(2)}-\frac{N}{r}\right)+$$
$$+\sin\Phi\left(\gamma_{(1)(2)(1)}-\frac{\alpha AH}{r^2}\right)$$
$$\overset{*}{\gamma}_{(2)(3)(3)}=\cos\Phi\gamma_{(2)(3)(3)}+\sin\Phi\gamma_{(1)(3)(3)},$$
$$\overset{*}{\gamma}_{(1)(2)(1)}=\cos\Phi\left(\gamma_{(1)(2)(1)}-\frac{\alpha AH}{r^2}\right)-\sin\Phi\left(\gamma_{(1)(2)(2)}-\frac{N}{r}\right)$$

при расчете (1.13) использована следующая из (1.7) связь между Φ, ν и h). Из (1.12) и (1.13) находим, что для введенных с. о. вектор ускорения $F_{(a)} = \gamma_{(0)(a)(0)}$ и тензор угловой скорости вращения $A_{(a)(b)} = \gamma_{(0)[(a)(b)]}$ равны нулю, т. е. данные с. о. являются свободно падающими и локально невращающимися, а тензор скоростей деформаций $D_{(a)(b)} = -\gamma_{(0)((a)(b))}$ отличен от нуля.

2. Как показано в [11], при орбитальном движении гироскопа в рамках ОТО должна иметь место геодезическая прецессия вектора его углового момента (спина). Будем полагать, что спин гироскопа не нарушает геодезичность его движения. Тогда из уравнений Папапетру [5, 11] следует, что в сопутствующей с. о. прецессия гироскопа описывается уравнением

$$dS^{(a)}/dx^{(0)} = -\gamma^{(a)}_{(b)(0)}S^{(b)} = \Omega^{(a)}_{(b)}S^{(b)}$$

для тетрадного 3-вектора спина $S^{(a)} = h_\mu{}^{(a)}S^\mu$.

Угловая скорость прецессии (здесь $\varepsilon^{(1)(2)(3)} = \varepsilon^{(1)(2)(3)}_{(0)} = -1$)

$$\Omega^{(a)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(a)(b)(c)}\Omega_{(b)(c)} = (\gamma_{(2)(3)(0)}, \gamma_{(3)(1)(0)}, \gamma_{(1)(2)(0)}) \tag{2.1}$$

не является 3-вектором относительно локальных пространственных поворотов и, следовательно, величина $\Omega = (\Omega^{(a)}\Omega_{(a)})^{1/2}$ будет зависеть от ориентации триады.

Обычно при расчете (2.1) использовались тетрады с триадой, касательной к координатным линиям (см., например, [11—14]), и рассматривались лишь приближенные выражения для $\Omega^{(a)}$ или специальные типы орбит (круговые, радиальные). В [15] получена точная формула для угла прецессии, но в частном случае круговых орбит она не совпадает с результатом из [16]. Поэтому представляет интерес получить точные выражения для угловой скорости и угла прецессии гироскопа в случае произвольных орбит вида (1.3) при различных ориентациях триады.

Расчет $\Omega^{(a)}$ в орбитальной и перицентрической сопутствующих с. о. дает с учетом (1.12) и (1.13) следующие выражения для единственной отличной от нуля компоненты угловой скорости:

$$\Omega^{(3)} = -\frac{H}{ar^2}\left(1 - \frac{m\alpha\varepsilon a^3}{r}\right), \quad \Omega^{*(3)} = \frac{H}{r^2} + \Omega^{(3)} \tag{2.2}$$

После подстановки значений ε и H, задаваемых (1.5), для произвольных квазиконических орбит вида (1.3) получаем точные выражения для угловой скорости прецессии гироскопа в функции орбитальных параметров его траектории

$$\Omega^{(3)} = \Omega^{*(3)} - \frac{\sqrt{m}w^2}{p\delta} = -\frac{\sqrt{m}\lambda w^2}{p^{3/2}\delta}\left[1 - \frac{mw}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\lambda\delta}{\varkappa}\right)^{-1}\right], \quad \lambda = p - 2mw \tag{2.3}$$

С учетом $dx^{(0)} = h_\mu{}^{(0)}dx^\mu = ds$ и (1.2) заключаем, что углы прецессии за время движения гироскопа между точками (r_1, Ψ_1) и (r_2, Ψ_2) орбиты (1.3) определяются выражениями

$$\beta = \int \Omega^{(3)}\,dx^{(0)} = -\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\left(1 - \frac{m\alpha\varepsilon a^3}{p}w\right)\frac{d\Psi}{aF(\Psi)} \tag{2.4}$$

$$\beta^* = \int \Omega^{*(3)}\,dx^{(0)} = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\frac{d\Psi}{F(\Psi)} + \beta = \Phi_2 - \Phi_1 + \beta \tag{2.5}$$

Для кругового движения ($e = 0$, $p = R$) за один оборот получим

$$\beta = -2\pi(1 - 3m/R)^{1/2}, \quad \beta^* = 2\pi + \beta \tag{2.6}$$

причем выражение для β^* совпадает с точным выражением из [16], полученным другим методом, а соответствующие приближенные результаты согласуются с [11—14]. Из (2.2) следует, что для кругового движения величина $\Omega^{*(3)}$ возрастает с уменьшением радиуса орбиты и на границе области существования круговых орбит ($R = 3m$) становится бесконечной, а $\Omega^{(3}$ неограниченно возрастает лишь при $R \to 0$.

Из сравнения (2.4) и (2.5) следует, что перицентрическая ориентация триады более предпочтительна при анализе прецессии гироскопа, так как она позволяет устранить «кажущуюся» прецессию с угловой скоростью H/r^2, вызванную вращением орбитальной триады относительно перицентрической.

Используя тетрады (1.10) и (1.11), для физических компонент произвольного электромагнитного поля в функции орбитальных параметров траектории магнитометра находим

$$
(2.7)\qquad E_{(1)} = NE_1 + \frac{\alpha a A \Delta_1}{r^2} - \frac{\Delta_4}{ar^2}, \quad H_{(1)} = \frac{N}{a^2}H_1 + \frac{a\Delta_3}{r^2} + \frac{\alpha A \Delta_2}{ar^2}
$$

$$
E_{(2)} = -\frac{\alpha AH}{r}E_1 - \frac{aM\Delta_1}{Hr} + \frac{A\Delta_4}{aHr},
$$

$$
H_{(2)} = -\frac{\alpha AH}{a^2 r}H_1 - \frac{aA\Delta_3}{Hr} - \frac{M\Delta_2}{aHr}
$$

$$
E_{(3)} = -\frac{H}{a^2 r}H_1 - \frac{\varepsilon a^2 \Delta_3}{Hr} - \frac{A\Delta_2}{aHr}, \quad H_{(3)} = \frac{H}{r}E_1 + \frac{aA\Delta_1}{Hr} - \frac{\varepsilon\Delta_4}{Hr}
$$

$$
(2.8)\qquad E^*_{(1)} = E_{(1)}\cos\Phi - E_{(2)}\sin\Phi, \quad H^*_{(1)} = H_{(1)}\cos\Phi - H_{(2)}\sin\Phi
$$

$$
E^*_{(2)} = E_{(1)}\sin\Phi + E_{(2)}\cos\Phi, \quad H^*_{(2)} = H_{(1)}\sin\Phi + H_{(2)}\cos\Phi
$$

$$
E^*_{(3)} = E_{(3)}, \quad H^*_{(3)} = H_{(3)}
$$

$$
\Delta_1 = \nu E_2 - \frac{hE_3}{\sin^2\theta}, \quad \Delta_2 = \nu H_2 - \frac{hH_3}{\sin^2\theta}
$$

$$
\Delta_3 = \frac{\nu E_3 + hE_2}{\sin\theta}, \quad \Delta_4 = \frac{\nu H_3 + hH_2}{\sin\theta}
$$

Применим эти выражения для случая дипольного магнитного поля, которое в первом приближении моделирует поле Земли, ограничившись лишь орбитальной с. о. Вклад метрики Шварцшильда в физические компоненты напряженности $H_{(a)}$, обусловленный применением тетрад, может оказаться сравнимым с непосредственным влиянием фоновой метрики на решение общековариантных уравнений Максвелла. Поэтому естественно учесть это влияние на дипольное магнитное поле Земли. Используя результаты [17], для глобальных компонент тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ в сферической системе координат имеем

$$
(2.9)\qquad F_{23} = \frac{r^2\sin\theta}{a^2}H_1 = \frac{2\mu\cos\theta\sin\theta}{r}f(r)
$$

$$
f(r) = \frac{3r^3}{4m^3}\left[\ln a - \frac{m}{r}\left(1 + \frac{m}{r}\right)\right]
$$

$$
F_{31} = \sin\theta H_2 = \frac{\mu a\sin^2\theta}{r^2}g(r), \quad g(r) = \frac{3r^2}{4m^2}\left(1 + a^2 - \frac{2r}{m}\ln a\right)
$$

Подставляя (2.9) в (2.7), находим наблюдаемые компоненты магнитного поля в сопутствующей орбитальной с. о.

$$
(2.10)\qquad H_{(1)} = \frac{2\mu\cos\theta}{r^3}Nf(r), \quad H_{(2)} = -\frac{\mu\sin\theta\nu}{r^3 H}g(r),
$$

$$
H_{(3)} = -\frac{\mu\varepsilon a h}{r^3 H}g(r)
$$

Для сравнения (2.10) с выражениями, полученными без учета влияния гравитации на $H_{(a)}$ и на с. о., запишем соответствующие компоненты напряженности в «ньютоновой» тетраде, получаемой из (1.6) при условии

$a = 1$

$$H^0_{(1)} = \frac{2\mu\cos\theta}{r^3}, \quad H^0_{(2)} = -\frac{\mu\sin\theta\nu}{r^3H}, \quad H^0_{(3)} = -\frac{\mu h}{r^3H} \tag{2.11}$$

Они совпадают с выражениями, полученными в [6] при помощи матрицы (1.7). Поправки, обусловленные ОТО (как гравитационным полем, так и ускоренным движением с. о.), определяются разностями (2.10) и (2.11)

$$\delta_1 = \frac{2\mu\cos\theta}{r^3}[Nf(r) - 1], \quad \delta_2 = \frac{\mu\sin\theta\nu}{r^3H}[1 - g(r)] \tag{2.12}$$

$$\delta_3 = \frac{\mu h}{r^3H}[1 - \varepsilon ag(r)]$$

и в перицентрической с. о. имеют тот же порядок величины.

Принимая для дипольного магнитного момента Земли значение $\mu = 8\cdot 10^{25}$ Гс$\cdot$см^3, из (2.12) находим, что для спутника на круговой орбите с высотой 500 км над поверхностью Земли поправки ОТО имеют величину $\sim 2\cdot 10^{-10}$ Гс, т. е. лежат на границе чувствительности современных магнитометров. Однако для околосолнечной орбиты радиуса $4R_\odot$ (как в планируемом эксперименте «Солнечный зонд» [18]) эти поправки возрастают до величины $5\cdot 10^{-8}$ гс, т. е. доступны измерению при помощи высокопрецизионных квантовых магнитометров, которые предполагается использовать на спутниках в релятивистских экспериментах [19].

Авторы благодарят О. С. Иваницкую за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6, с. 1311—1314.
2. *Sedov L. I.* Natural theory of continuous media.— Acta Astronaut., 1978, v. 5, No. 7—8, p. 491—505.
3. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли: Сб статей. Под ред. С. Ф. Сингера. М.: Наука, 1966. 452 с.
4. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
5. *Иваницкая О. С.* Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск: Наука и техника, 1979. 335 с.
6. *Мак-Илвейн Р. Дж.* Изменение кинетического момента спутника при помощи магнитного поля Земли.— В кн.: Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1966, с. 295—323.
7. *Darwin C.* The gravity field of a particle, II.— Proc. Roy. Soc. London, 1961, v. A263, No. 1312, p. 39—50.
8. *Kostyukovich N. N.* Exact quadratures for equation of motion in stationary axisymmetric space — time.— In: Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups. 9th Internat. Conf. Gen. Rel. Gravit. Jena: FSU, 1980, v. 1, p. 180—181.
9. *Иваницкая О. С.* Уравнения движения в поле тяготения как калибровка тетрад.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1970, № 5, с. 82—87.
10. *Сягло И. С.* Динамические характеристики систем отсчета в тетрадной формулировке теории относительности.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1971, № 5, с. 89—94.
11. *Schiff L. I.* Motion of a gyroscope according to Einstein's theory of gravitation.— Proc. Natl. Ac. Sci. USA, 1960, v. 46, № 6, p. 871—882.
12. *Воронов Н. А.* Прецессия спина в Шварцшильдовом поле.— ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 4, с. 1280—1282.
13. *Mashhoon B.* Particles with spin in a gravitational field.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, № 7, p. 1075—1077.
14. *Широков М. Ф.*, *Бондарев Б. В.* Эффект Шиффа в тетрадной формулировке.— В кн.: Тез. докл. Всес. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Минск: Белорусск. ун-т, 1976, с. 261—262.
15. *Антонов В. И.* Релятивистская прецессия гироскопа в поле Шварцшильда.— В кн.: Современные проблемы общей теории относительности. Минск: ИФ АН БССР, 1979, с. 97—101.
16. *Sakina Ken-ichi*, *Chiba J.* Parallel transport of a vector along a circular orbit in Schwarzschild space—time.— Phys. Rev. D, 1979, v. 19, No. 8, p. 2280—2282.
17. *Гинзбург В. Л.*, *Озерной Л. М.* О гравитационном коллапсе магнитной звезды.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 3, с. 1030—1040.
18. *Руденко В. Н.* Релятивистские эксперименты в гравитационном поле.— Успехи физ. наук, 1978, т. 126, вып. 3, с. 361—401.
19. *Everitt C. W. F.* Gravitation, relativity and precise experimentation.— In: Proc. 1st Marcel Grossmann Meet. Gen. Relativity, Trieste, 1975. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 545—615.

Минск

Поступила в редакцию
4.V.1981