

УДК 62—50

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ НА ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Вишневецкий Л. С., Меликян А. А.

Рассматривается дифференциальная игра простого преследования при наличии выпуклого ограниченного препятствия произвольной формы. Обоим игрокам запрещено находиться во внутренних точках препятствия и пересекать его границу. Постановка задачи на примере кругового препятствия дана в книге [1]. Полное решение игры сближения для случая кругового препятствия построено в работе Г. К. Пожарицкого<sup>1</sup>. В данной работе используется другой функционал, равный времени движения игроков до поимки; форма препятствия не фиксируется. На основе необходимых условий оптимальности [2, 3] предлагается метод построения особых поверхностей и оптимальных траекторий в позиционной игре [4] преследования; вопрос достаточности предлагаемой конструкции не рассматривается. Приводятся результаты численного исследования для двух форм препятствия.

**1. Постановка задачи.** Пусть в некоторой прямоугольной системе координат на плоскости величины  $x_1, x_2$  определяют координаты точки (игрока)  $P$ ,  $x_3, x_4$  — координаты точки  $E$ . Точки  $P$  и  $E$  совершают простое изотропное движение, т. е. могут в каждый момент времени выбирать произвольное направление скорости, величина которой не превосходит 1 и  $v$  соответственно, причем  $0 < v < 1$ . Введем в рассмотрение четырехмерные векторы  $x = (x_1, \dots, x_4)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_4)$ ,  $x, u \in R^4$ ; компоненты  $u_i, i = 1, 2$  представляют собой управление игрока  $P$ ,  $u_j, j = 3, 4$  — управление игрока  $E$ . Тогда уравнения движения игроков и ограничения на их управления запишутся в виде

$$(1.1) \quad \dot{x} = u, \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1, \quad \sqrt{u_3^2 + u_4^2} \leq v$$

Пусть на плоскости зафиксировано выпуклое ограниченное замкнутое множество  $A$ ,  $A \subset R^2$ , с кусочно-гладкой границей  $L$ . Кривая  $L$  разбивает плоскость движения на две области — внешнюю, к которой отнесем также границу  $L$ , и внутреннюю. Последняя может оказаться пустой лишь в случае, когда область  $A$  является отрезком. В точках  $Q$  границы  $L$  определена внешняя нормаль  $n = n(Q) \in R^2$ ,  $Q \in L$ ; функция  $n(Q)$  неоднозначна, если  $Q$  — точка излома. Игрокам разрешено движение во внешней части плоскости и запрещено пересекать границу; движение по самой границе также допустимо. Иными словами, если игроки  $P$  или  $E$  находятся в точке  $Q \in L$ , то их управления  $u_i, u_j$  должны удовлетворять в дополнение к (1.1) также ограничениям

$$(1.2) \quad u_1 n_1 + u_2 n_2 \geq 0; \quad u_3 n_1 + u_4 n_2 \geq 0, \quad Q \in L$$

Если внутренняя часть  $A - L$  множества  $A$  не пуста, то неравенства (1.2) — следствие фазовых ограничений  $P, E \notin A - L$ . В случае, когда  $A$  — отрезок,  $A = L$ , игроки фактически могут находиться в любой точке плоскости, однако в точках множества  $A$  они не могут выбирать произвольное направление движения.

<sup>1</sup> Работа докладывалась в ИПМ АН СССР на семинаре по теории оптимального управления движением (см. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 172).

Игра начинается в момент  $t = 0$  и считается законченной в первый момент времени  $t = T > 0$ , когда преследующая точка  $P$  совместится с убегающей точкой  $E$ , т. е. когда осуществится включение

$$(1.3) \quad x(T) \in M, \quad M = \{x \in R^4: x_1 = x_3, x_2 = x_4\}$$

Платой или функционалом в игре считается время поимки  $T$ , которое игрок  $P$  минимизирует, а  $E$  — максимизирует.

Будем предполагать, что препятствие не мешает наблюдению и оба игрока в каждый момент времени  $0 \leq t \leq T$  точно знают фазовый вектор  $x = x(t)$ . В соответствии с этим далее рассматривается позиционная дифференциальная игра [4], в которой вектор управления игроков — функция фазовых координат  $u = u(x)$ .

Ограничимся исследованием не всего четырехмерного фазового пространства игры [1], а лишь его части  $X$ , которая соответствует такому расположению точек  $P = (x_1, x_2)$ ,  $E = (x_3, x_4)$ , когда препятствие находится между игроками, т. е. отрезок  $PE$  имеет общие точки с множеством  $A$ .

Таким образом, в игре преследования (1.1) — (1.3) рассматривается задача о построении цены игры и оптимальных позиционных стратегий игроков [4] для  $x \in X$ . Множество точек фазового пространства, для которых отрезок  $PE$  не имеет общих точек с препятствием  $A$ , будем называть областью прямой видимости. В этой области решение рассматриваемой игры может быть построено геометрически с помощью областей достижимости игроков.

**2. Необходимое условие оптимальности.** Предположим, что искомая цена игры  $V(x)$ ,  $x \in X$  существует, непрерывна и дифференцируема по всем направлениям в  $R^4$ . Производную функции  $V(x)$  по направлению  $u = (u_1, \dots, u_4)$  будем обозначать для краткости символом полной производной по времени  $V^* = V^*(x, u)$ . Можно получить следующее необходимое условие для цены игры  $V(x)$  [2]:

$$(2.1) \quad \min_{u_i} \max_{u_j} V^*(x, u) \geq -1 \geq \max_{u_j} \min_{u_i} V^*(x, u)$$

Экстремумы вычисляются при ограничениях (1.2), (1.3). В точках непрерывной дифференцируемости имеем  $V^* = (p, u)$ ,  $p = V_x \in R^4$ , а условие (2.1) переходит в уравнение Беллмана — Айзекса

$$(2.2) \quad \min_{u_i} \max_{u_j} V^* = \max_{u_j} \min_{u_i} V^* = F(p) = -1$$

$$F(p) = -\sqrt{p_1^2 + p_2^2} + v\sqrt{p_3^2 + p_4^2}$$

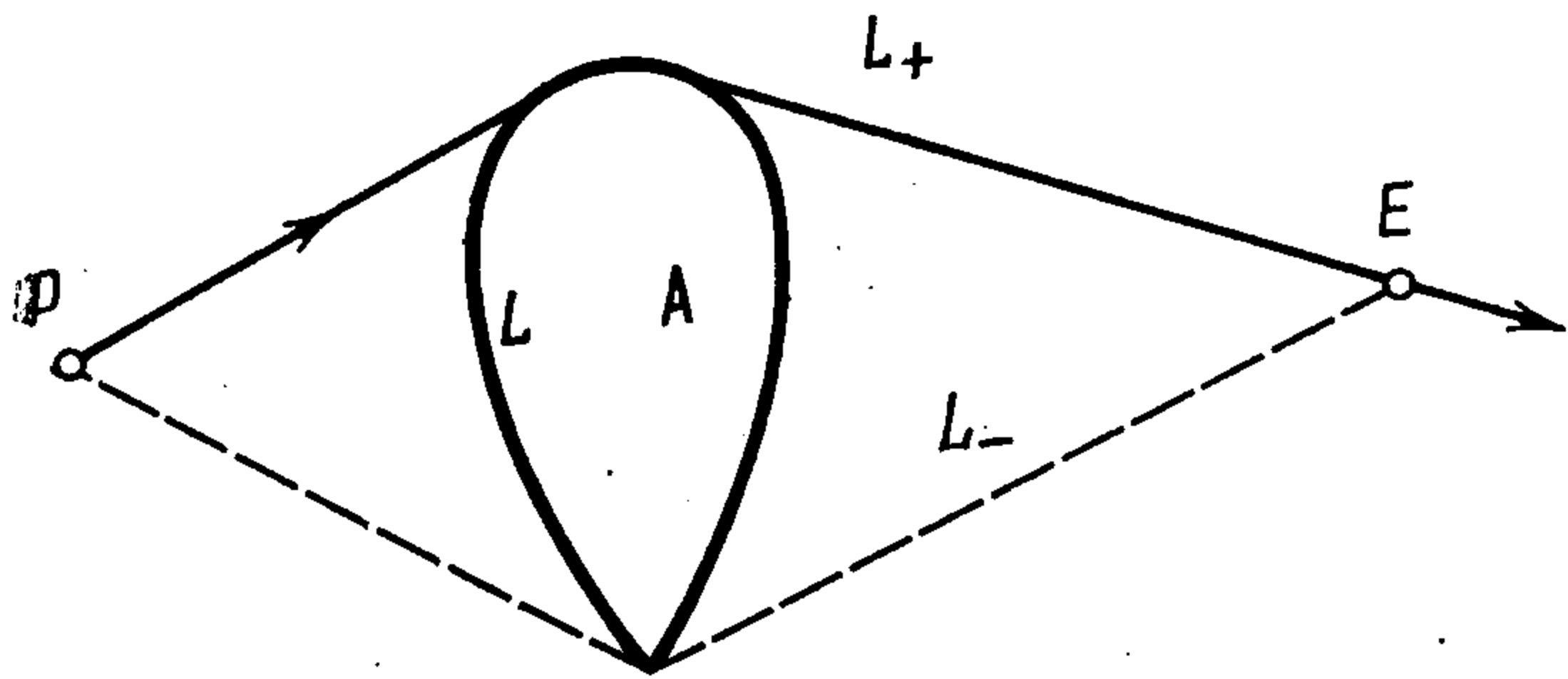
Символом  $(p, u)$  обозначено скалярное произведение векторов; нижний векторный индекс  $V_x$  используется для обозначения вектора частных производных по компонентам вектора-индекса.

Оптимальные движения в области гладкости  $V(x)$  определяются уравнениями характеристик [1]

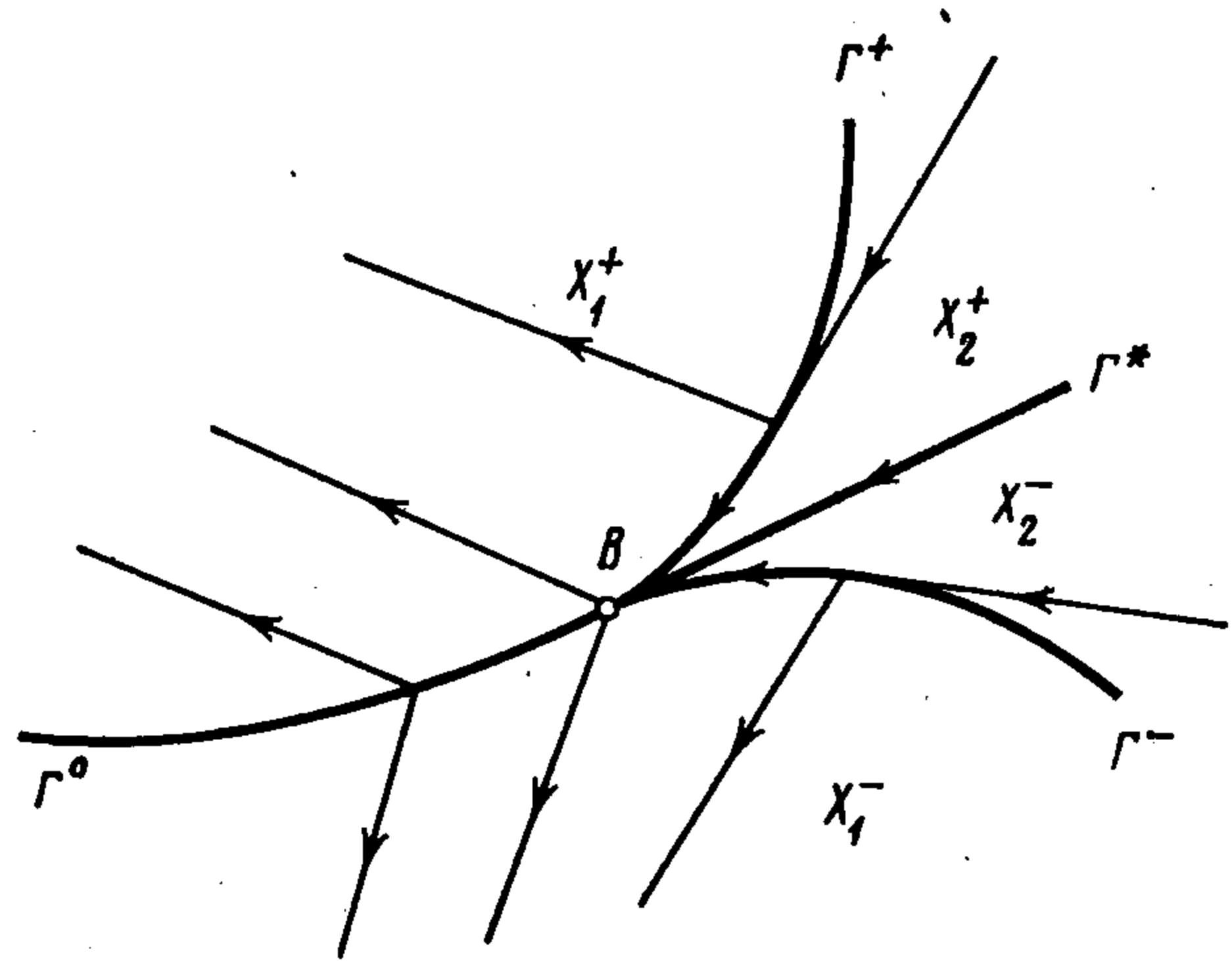
$$(2.3) \quad \dot{x} = u^* = F_p, \quad \dot{p} = -F_x = 0$$

Здесь  $u^*$  — вектор оптимального управления игроков.

**3. Первичное решение.** Естественно предположить, что в некоторой части  $X_1$  области  $X$ ,  $X_1 \subset X$  оптимальным движением игроков будет движение вдоль геодезической линии, т. е. линии наименьшей длины, соединяющей игроков и лежащей во внешней части плоскости (фиг. 1). Учитывая, что  $A$  может быть отрезком, следует уточнить определение геодезической: при движении игроков вдоль нее не должны нарушаться ограничения (1.2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Наряду с геодезическими будем рассматривать экстремальные линии (экстремали), которые доставляют локальный минимум длине кривой  $PE$  с учетом ограничений (1.2). Очевидно, в области  $X$  существуют две экстремали  $L^+$  и  $L^-$ , соответствующие обходу препятствия игроком  $P$  по часовой стрелке и против нее (фиг. 1). Геодезическая линия совпадает с экстремалью меньшей длины. Экстремали состоят из отрезков касательных (опорных) прямых к границе  $L$  и части самой границы. Обозначим длины кривых  $L^+$ ,  $L^-$  через  $h^+(x)$ ,  $h^-(x)$ . Можно показать, что во внутренних точках области  $X$  функции  $h^\pm$  непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям [5]

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial h^\pm}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h^\pm}{\partial x_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial h^\pm}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h^\pm}{\partial x_4}\right)^2 = 1$$

Равенства (3.1) представляют собой уравнения Гамильтона — Якоби для некоторых вариационных задач о длине геодезической. В рассматриваемой задаче длина геодезической линии равна  $\min [h^+, h^-]$ , а время движения до поймки

$$(3.2) \quad S(x) = \min [S^+(x), S^-(x)], \quad S^\pm = h^\pm / (1 - v)$$

Выше предполагалось, что  $V(x) = S(x)$ ,  $x \in X_1$ , где  $V(x)$  — цена игры. Для уточнения области  $X_1$  воспользуемся необходимыми условиями (2.4), (2.2). В силу равенств (3.1) функции  $S^+(x)$ ,  $S^-(x)$  во внутренних точках области  $X$  удовлетворяют уравнению Беллмана с — Айзек (2.2). Функция  $S(x)$  в (3.2) удовлетворяет этому уравнению вне точек гиперповерхности  $\Gamma_0 \subset R^4$ :

$$(3.3) \quad \Gamma_0 = \{x \in X \subset R^4: S^+(x) = S^-(x)\}$$

При  $x \in \Gamma_0$  функция  $S(x)$  дифференцируема по направлению, причем  $S^* = \min [S^{*+}, S^{*-}]$ , поэтому в точках  $x \in \Gamma_0 \cap X_1$  должны выполняться условия (2.1). Вычисления дают

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \max_{u_j} \min_{u_i} S^* &= \max_{u_j} \min_{u_i} \min [S^{*+}, S^{*-}] = \\ &= [-1 + vR^*(q_3^\pm, q_4^\pm)] / (1 - v) \leq -1 \\ \min_{u_i} \max_{u_j} S^* &= \min [-1, R(q^+, q^-)] \\ R(q^+, q^-) &= [R^*(q_1^\pm, q_2^\pm) - vR^*(q_3^\pm, q_4^\pm)] / (1 - v) \\ R^*(q_1^\pm, q_2^\pm) &= \left\{ \frac{1}{2} [1 + (q_1^+ q_1^- + q_2^+ q_2^-) / (1 - v)^2] \right\}^{1/2}, \quad q^\pm = S_{x^\pm} \end{aligned}$$

Сравнение с (2.1) показывает, что области  $X_1$  принадлежит участок  $\Gamma^\circ$  поверхности  $\Gamma_0$ .

$$(3.5) \quad \Gamma^\circ = \{x \in X: S^+(x) = S^-(x), R(q^+, q^-) \geq -1\}$$

Поверхность (3.5) рассеивающая [1]; из ее точек исходят две оптимальные траектории, причем выбор направления обхода препятствия, как это следует из (3.4) и простых геометрических рассуждений, определяет игрок  $P$ . Движение по геодезической линии приводит сначала игрока  $P$  на границу препятствия и, после движения по участку границы, выводит в область прямой видимости. Точки края  $B$  поверхности  $\Gamma^\circ$

$$(3.6) \quad B = \{x \in X: S^+(x) = S^-(x), R(q^+, q^-) = -1\}$$

обладают следующим геометрическим свойством. Вектор  $q^+ - q^-$  — очевидно, нормаль к поверхности  $\Gamma^\circ$ . Используя соотношения (3.1), (3.2), (3.4), можно получить, что в точках множества  $B$  выполнены равенства  $(q^+ - q^-, F_q(q^+)) = (q^+ - q^-, F_q(q^-)) = 0$ , означающие с учетом (2.3), что оптимальные траектории «рассеиваются» из точек края  $B$  с касанием к  $\Gamma^\circ$ .

Отметим, что область  $X_1$  примыкает к той части границы множества  $X$ , в которой существенны ограничения (1.2); таким образом, эти ограничения учтены по построению первичного решения  $S(x)$ .

Рассуждая в терминах обратного времени [1], можно отметить, что в каждую точку множества (3.5) приходят две оптимальные траектории. Выбор участка траектории, входящего в решение задачи, проводится по признаку равенства времени преследования. Однако для траекторий, приходящих на  $\Gamma_0$  за краем  $B$  поверхности  $\Gamma^\circ$ , такой признак отбора неприемлем в силу необходимых условий (2.1). Подобная ситуация характерна для существования экивокальной поверхности [1]. Попытка построить в данной задаче особенность другого типа оказывается несостоятельной.

Дадим качественное описание поверхности разрыва экивокального типа на основе результатов работ [1, 3]. Экивокальная поверхность [1] представляет собой поверхность разрыва частных производных непрерывной цены игры, причем качественное поведение оптимальных траекторий в окрестности поверхности такое же, как для поверхности переключения. Из того факта, что переключение оптимального управления на экивокальной поверхности имеет место для обоих игроков одновременно, с необходимостью вытекает [3], что возможны особые движения, состоящие в скольжении фазового вектора по поверхности разрыва до выхода на ее край. Такое скольжение реализуется, когда один из игроков  $P$  или  $E$  (определенный для рассматриваемой задачи) не переключает свое управление по достижении особой поверхности, т. е. использует «старое» управление до скачка. При этом второй игрок вынужден осуществлять скольжащий режим, комбинируя свои управления до и после скачка. В любой момент скольжения по особой поверхности первый игрок (который по терминологии [3] управляет особой поверхностью) может совершить переключение и увести движение с особой поверхности в первичную область. Таким образом, из точек экивокальной поверхности исходит бесконечное число оптимальных движений.

Далее предполагаем, что множество  $B$  (3.6) — край (место зарождения) двух ветвей экивокальной поверхности  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  в соответствии с качественной картиной на фиг. 2. Часть множества  $X$ , заключенную между поверхностями  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , обозначим  $X_2$ ,  $X = X_1 + \Gamma + X_2$ ,  $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$ . В области  $X_1$  имеем  $V(x) = S(x)$ ; искомые объекты теперь — поверхности  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  и функция  $V(x)$ ,  $x \in X_2$ . На поверхностях  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  выполнены, соответственно, равенства  $V(x) = S^+(x)$ ,  $V(x) = S^-(x)$ , означающие непрерывность цены игры  $V(x)$ . В случаях, когда рассмотрение касается обеих ветвей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , будем опускать индексы в обозначениях  $\Gamma$ ,  $S$  и  $q$ .

Процедура построения экивокальной поверхности и цены игры  $V(x)$  в области  $X_2$  предложена в работе [3]. Математически она эквивалентна решению некоторой задачи Коши с неизвестной границей [6]. В работе [6] получены достаточные условия существования и единственности в малом решения указанной задачи; при этом должны

быть заданы на поверхности условия Коши, связь в виде равенства между вектором  $x$  и градиентом решения и край самой поверхности. Искомая поверхность строится из семейства особых траекторий, выходящих в обратном времени из точек края [3].

4. Уравнения особых характеристик. Частные производные цены игры  $V(x)$  на поверхности  $\Gamma$  определены неоднозначно. Предельное из области  $X_1$  значение градиента цены на  $\Gamma$  равно  $q = S_x$ . Для предельного значения из области  $X_2$  сохраним исходное обозначение  $p = V_x$ . Предположив, что  $p_1^2 + p_2^2 > 0$ ,  $p_3^2 + p_4^2 > 0$  при  $x \in \Gamma$ , получим: экстремумы в (2.2) достигаются на единственном векторе управлений  $u = (u_i, u_j) = = F_p$ . Тогда из результатов работы [3] следует, что в рассматриваемой задаче возможна лишь экивокальная поверхность — огибающая оптимальных траекторий, приходящих из области  $X_2$ , т. е. эти траектории касаются поверхности  $\Gamma$ . В силу непрерывности цены игры на  $\Gamma$  вектор  $p = q$ ,  $x \in \Gamma$  — нормаль к  $\Gamma$ . Тогда условие касания оптимальной траектории, идущей из  $X_2$ , поверхности  $\Gamma$  имеет вид  $(F_p(p), p - q) = 0$  (2.3). Это равенство и представляет собой связь, упомянутую в конце п. 3. Таким образом, на неизвестной поверхности  $\Gamma$  выполнены равенства

$$(4.1) \quad V(x) = S(x), \quad (F_p(p), p - q) = 0, \quad F(p) + 1 = 0, \quad x \in \Gamma$$

Уравнение Беллмана — Айзекса  $F(p) + 1 = 0$  выполнено также в области  $X_2$ . Равенств (4.1) оказывается достаточно для получения закона изменения вектора  $p$  вдоль особого движения, т. е. для вывода уравнений особых характеристик [3, 6]

$$(4.2) \quad \dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -[(S_{xx}F_p, F_p)/(F_{pp}q, q)](p - q)$$

Здесь  $S_{xx}$ ,  $F_{pp}$  — матрицы вторых частных производных.

Сравним системы (2.3) и (4.2). В области непрерывной дифференцируемости цены игры векторы  $p$  и  $F_p$  согласно (2.3) сохраняют постоянные значения на оптимальных траекториях. Следовательно, движение происходит по прямой линии как в фазовом пространстве игры, так и в физическом — в плоскости движения игроков. Уравнения (4.2) показывают, что особые траектории, вообще говоря, криволинейные.

Для построения экивокальной поверхности  $\Gamma$  нужно выпустить из всех точек края  $B$  (3.6) решения системы (4.2) в обратном времени. При этом ветвь  $\Gamma^+$  ( $\Gamma^-$ ) соответствует использованию в правых частях системы (4.2) величин  $S^+$ ,  $q^+$  ( $S^-$ ,  $q^-$ ). Для интегрирования системы (4.2) нужно иметь также начальные значения  $p = p(x) = V(x)$  при  $x \in B$ .

Найдем сначала указанное начальное значение вектора  $p$  для ветви  $\Gamma^+$ . При  $x \in B$  имеют место три равенства

$$(4.3) \quad V(x) - S^+(x) = 0, \quad S^+(x) - S^-(x) = 0 \\ R^0(x) = R(q^+(x), q^-(x)) + 1 = 0$$

Размерность многообразия  $B$  равна двум, поэтому градиенты левых частей равенств (4.3), т. е. векторы  $p - q^+$ ,  $q^+ - q^-$  и  $R_x^0$ , линейно зависимы в  $R^4$  при  $x \in B$ . Отсюда следуют два линейных уравнения относительно компонент искомого вектора  $p$ . Вместе со вторым и третьим равенствами в (4.1) эти уравнения образуют систему четвертого порядка относительно вектора  $p \in R^4$  при  $x \in B$ . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что упомянутая система имеет два решения:  $p = q^+$  и

$$(4.4) \quad p = 1/2 (q^+ + q^-), \quad x \in B$$

Аналогичное рассмотрение для ветви  $\Gamma^-$  приводит также к двум решениям:  $p = q^-$  и (4.4). Тот факт, что для обеих ветвей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  существует общее решение (4.4), означает, что градиент цены  $V(x)$  непрерывно продолжаем из  $X_2$  на край  $B$ . Другие решения  $p = q^+$  и  $p = q^-$  соответствуют первичному решению задачи, что и следовало ожидать. Таким образом, величина (4.4) — начальное значение сопряженного вектора при построении обеих ветвей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ . При интегрировании системы (4.2) одновременно с построением поверхности  $\Gamma$  на ней определяется поле вектора  $p$ , т. е. предельное из области  $X_2$  значение градиента цены.

Вектор  $p - q^+ = (q^- - q^+)/2$ , являющийся нормалью к  $\Gamma^+$  при  $x \in B$ , направлен в область  $X_1^+$ ; аналогично, вектор  $p - q^-$  направлен в  $X_1^-$ . Здесь  $X_1^\pm = \{x \in X_1: V(x) = S^\pm(x)\}$ . Из результатов [3] следует, что поверхностью  $\Gamma$  управляет игрок  $P$ , т. е. при оптимальном скольжении по поверхности инициатива в переключении на обход препятствия (в переходе в первичную область) принадлежит ему.

Оптимальные движения в области  $X_2$  можно построить интегрируя систему (2.3) в обратном времени с начальными условиями  $x = x^0$ ,  $p = p(x^0)$ ,  $x^0 \in \Gamma$ . Другой способ построения заключается в том, чтобы при интегрировании системы особых характеристик (4.2) в некоторый момент времени скачком положить  $\dot{p} = 0$ , т. е. перейти к системе (2.3). Если в качестве такого момента скачка выбрать начальный, получим прямолинейную траекторию, исходящую из точки края  $B$  с начальным значением сопряженного вектора (4.4). Совокупность таких траекторий, образующих некоторую поверхность  $\Gamma^*$ , разбивает область  $X_2$  на две подобласти  $X_2 = X_2^+ + \Gamma^* + X_2^-$ . Поверхность  $\Gamma^*$  касается обеих поверхностей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  в точках края  $B$ .

Дадим описание оптимальных движений, начинающихся в  $X_2$ . Из точек области  $X_2^+$  ( $X_2^-$ ) прямолинейная траектория выходит с касанием на поверхность  $\Gamma^+$  ( $\Gamma^-$ ). По желанию игрока  $P$  из точки касания траектория может сразу же попасть в первичную область  $X_1^+$  ( $X_1^-$ ); для этого игрок  $P$  должен перейти (переключиться) на преследование по геодезической, огибая препятствие по (против) часовой стрелке. В противном случае, используя оптимальное для области  $X_2$  управление, игрок  $P$  добивается криволинейного движения по поверхности  $\Gamma$ , с которого он также может в любой момент сойти в первичную область вплоть до достижения края  $B$ . Достигнув множества  $\dot{B}$ , игрок  $P$  обязан переключиться на обход препятствия по любому из двух направлений. Отметим, что все движения, начинающиеся в  $X_2$ , игрок  $P$  может привести на многообразии  $B$ ; попадание на  $B$  неизбежно, если движение начинается из точек поверхности  $\Gamma^*$  или игрок  $P$ , начиная движение из области  $X_2^+$  ( $X_2^-$ ), желает на завершающем этапе вести огибание препятствия против (по) часовой стрелки.

Укажем на простую геометрическую интерпретацию условия касания  $(F_p, p - q) = 0$  в (4.1). Пусть  $\varphi$  (соответственно  $\psi$ ) — угол между двумя оптимальными направлениями скорости  $u_i$  игрока  $P$  (скорости  $u_j$  игрока  $E$ ) на поверхности  $\Gamma$ . Используя соотношения (3.1), (3.2), получаем

$$\cos \varphi = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = (1 - \nu) \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

Аналогичное равенство для  $\cos \psi$  получается заменой индексов 1, 2 на 3, 4. Тогда  $(F_p, q) = (-\cos \varphi + \nu \cos \psi)/(1 - \nu)$ . Функция  $F(p)$  из

(2.2) удовлетворяет условию  $(F_p(p), p) = F(p) = -1$ , откуда получаем

$$(4.5) \quad \cos \varphi - v \cos \psi = 1 - v, \quad x \in \Gamma$$

Равенство (4.5) определяет связь между углами  $\varphi$  и  $\psi$  скачков направлений скоростей игроков  $P$  и  $E$ .

5. **Примеры.** Рассмотрим две формы препятствия: круг единичного радиуса с центром в начале координат и отрезок оси ординат с концами в точках  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ .

Первичное решение (3.2) для круга имеет вид

$$(5.1) \quad S^\pm(x) = \frac{1}{1-v} \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1} - \arccos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \pm \arctg \frac{x_2}{x_1} + \right. \\ \left. + \sqrt{x_3^2 + x_4^2 - 1} - \arccos \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \mp \arctg \frac{x_4}{x_3} + \pi \right)$$

Формула (5.1) справедлива в области  $x_1 < 0$ ,  $x_3 > 0$ ; переход в дополнительную область осуществляется несложным преобразованием в (5.1). Определенная симметрия в задаче с круговым препятствием позволяет, вообще говоря, ограничиться только областью  $x_1 < 0$ ,  $x_3 > 0$ , а при желании — перейти к трехмерному фазовому пространству. Поверхность двух равных геодезических (3.3) соответствует ситуации, когда игроки находятся на продолжении одного диаметра круга, т. е. на прямой, проходящей через начало координат. Уравнение этой поверхности имеет вид

$$(5.2) \quad x_2 x_3 - x_1 x_4 = 0$$

Для случая отрезка формулы, аналогичные (5.1) и (5.2), имеют вид

$$(5.3) \quad S^\pm(x) = (\sqrt{x_1^2 + (x_2 \pm 1)^2} + \sqrt{x_3^2 + (x_4 \pm 1)^2}) / (1 - v); \quad S^+(x) = S^-(x)$$

Край  $B$  (3.6) задается для обоих препятствий равенствами

$$(5.4) \quad S^+(x) = S^-(x), \quad m(x_1, x_2) - v m(x_3, x_4) = 1 - v$$

где функция  $m(\xi, \eta)$  имеет вид для круга и отрезка соответственно

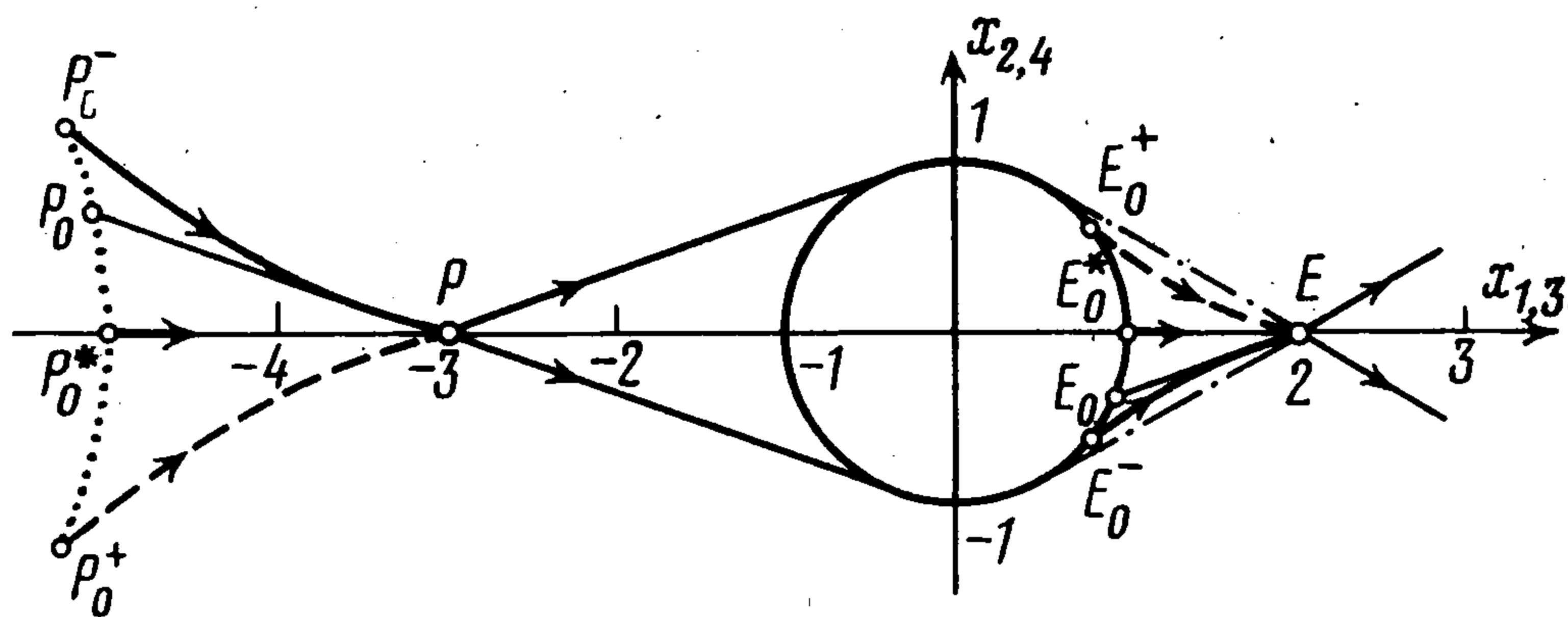
$$(5.5) \quad m(\xi, \eta) = [(\xi^2 + \eta^2 - 1) / (\xi^2 + \eta^2)]^{1/2} \\ m(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{[\xi^2 + (\eta + 1)^2]^{1/2} [\xi^2 + (\eta - 1)^2]^{1/2}} \right)^{1/2}$$

С использованием формул (5.1) — (5.5) численно интегрировались уравнения (4.2) для  $v = 1/2$  и ряда начальных точек края  $B$ . На фиг. 3 и 4 изображены характерные начальные участки траекторий игроков в физическом пространстве игры. Игроки стартуют из точек  $P_0^\pm$  и  $E_0^\pm$  и, двигаясь с максимальными скоростями, одновременно достигают точек  $P$  и  $E$ , где игрок  $P$  выбирает одно из двух направлений преследования по геодезической. Верхние индексы начальных точек выделяют ту из поверхностей  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ ,  $\Gamma^*$ , на которой лежит соответствующая фазовая траектория в  $R^4$ . Положения, соответствующие положению игроков в точках  $P$ ,  $E$ , указанных на фиг. 3 и 4, принадлежат краю  $B$  (5.4).

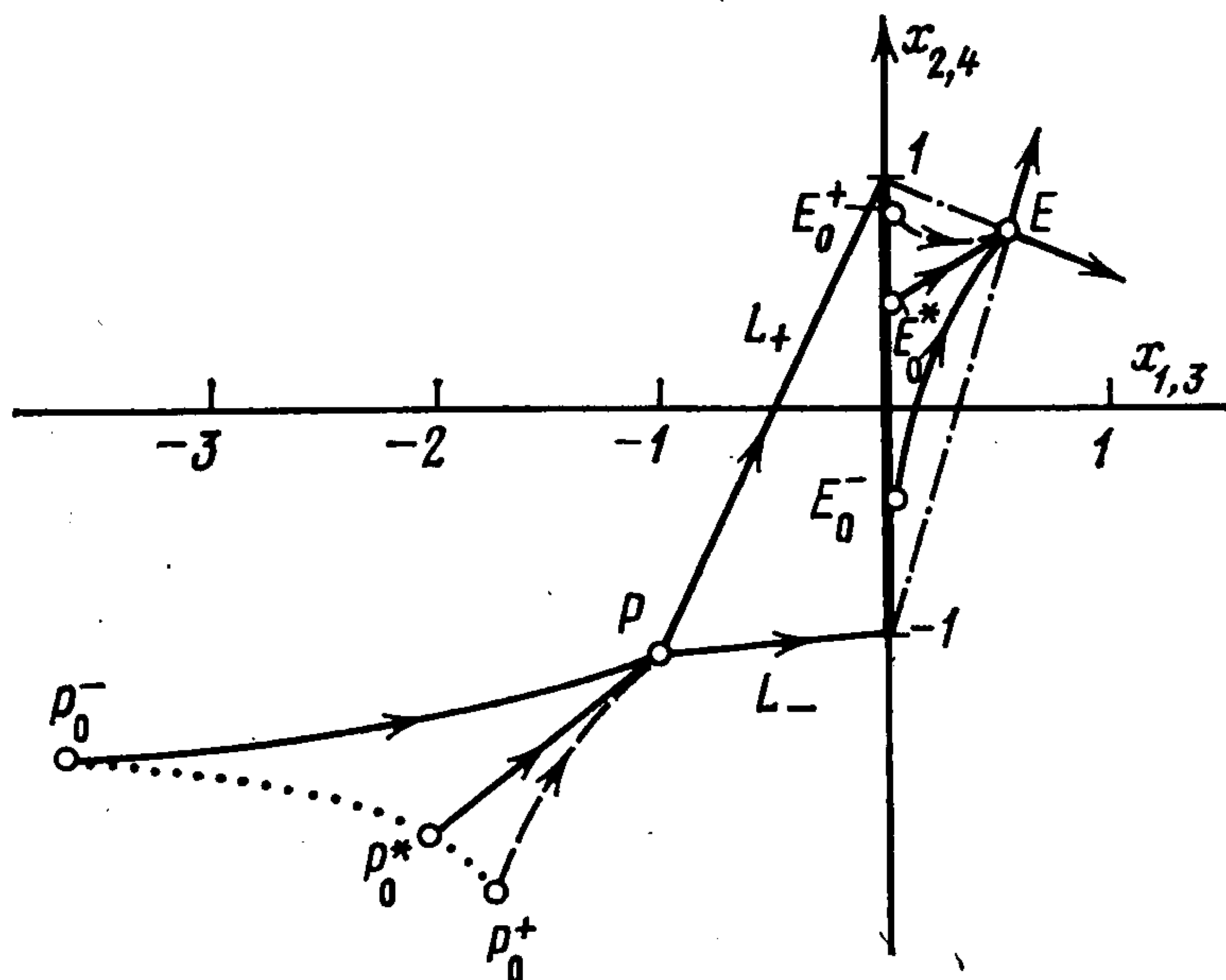
Начальные участки траекторий, приводящих позицию в одну и ту же точку края  $B$ , заполняют криволинейные треугольники  $P_0^- P P_0^+$ ,  $E_0^- E E_0^+$ ; эти участки представляют собой два семейства касательных к кривым  $P P_0^-$ ,  $P P_0^+$  и  $E E_0^-$ ,  $E E_0^+$ . Между отрезками этих двух семейств существует взаимно однозначное соответствие: каждому начальному положению игрока  $P$  на кривой  $P_0^- P_0^*$  соответствует положение игрока  $E$  на участке  $E_0^- E_0^*$  границы препятствия и наоборот. Пара соответственных точек  $P_0$ ,  $E_0$  и исходящих из них отрезков касательных показана на фиг. 3. Игроки движутся по касательным до точек касания, а затем, по выбору игрока  $P$ , реализуют криволинейное особое движение, либо переходят к движению по геодезической.

Расчеты показали, что криволинейные траектории, приходящие в некоторые позиции края  $B$ , мало отличаются от прямолинейных, т. е. для приближенного описания оптимальных движений в  $X$  можно использовать только прямолинейные траектории не считая движения игрока  $P$  по границе препятствия. При такой приближенной замене упомянутое выше семейство касательных, например, для криволинейного треугольника  $P_0^- P P_0^+$  можно заменить пучком отрезков, соединяющих точку  $P$  с точками дуги  $P_0^- P_0^*$ .

Сравнение проведенных выше рассмотрений показывает, что картина оптимального преследования для случая произвольного препятствия качественно близка к слу-



Фиг. 3



Фиг. 4

чаю кругового препятствия. При переходе от круга к препятствию другой формы теряется определенная симметрия движений по поверхностям  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ . Если движению по  $\Gamma^*$  в случае круга соответствует движение игроков по продолжению диаметра круга (так, как если бы препятствие отсутствовало), то в случае препятствия иной формы прямолинейные отрезки траекторий игроков  $P$  и  $E$  лежат, вообще говоря, на разных прямых (фиг. 4).

Отметим, что предложенный в данной работе метод может быть обобщен для задач преследования с препятствием в пространстве  $R^n$ ,  $n > 2$ , если вместо (3.2) удастся найти первичное решение вида

$$S(x) = \min_{\alpha} S^{\circ}(x, \alpha), \alpha \in \Omega$$

где  $\Omega$  — некоторое множество значений параметра  $\alpha$ .

В плоском случае множество  $\Omega$  состоит из двух элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр. — Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 2, с. 293—295.
3. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 4, с. 10—18.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
6. Меликян А. А. Задача Коши с неизвестной границей для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. — Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 2, с. 288—292.

Москва

Поступила в редакцию  
15.X.1981