Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 62—50

ПРОГРАММНЫЙ СИНТЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Красовский А. Н., Третьяков В. Е.

Обосновывается функциональная форма метода вспомогательных программных конструкций для позиционной дифференциальной игры с интегральной платой, явно зависящей от реализаций движения объекта и управляющих воздействий. Статья примыкает к работам [1—4].

1. Рассмотрим задачу о позиционных управлениях u и v, которые минимизируют — максимизируют заданный функционал

$$\gamma(x(t_*[\cdot]\vartheta), u(t_*[\cdot]\vartheta), v(t_*[\cdot]\vartheta)) = \int_{t_*}^{\vartheta} \omega(t, x[t], u[t], v[t])\,dt + \varphi(x[\vartheta]) \tag{1.1}$$

на движениях $x(t_*[\cdot]\vartheta) = \{x[t],\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ объекта

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v),\quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\quad u \in P,\quad v \in Q$$
$$\|f(t, x, u, v)\| \leqslant \chi(1 + \|x\|),\quad \chi = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

и на реализациях управлений $u(t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in P,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, $v(t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t] \in Q,\ t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$.

Здесь $x \in R^n$, $\|x\|$ — евклидова норма вектора x, t_0 и ϑ фиксированы, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ — компакты, функции f и ω непрерывны по t, x, u, v и функции f, ω, φ удовлетворяют условию Липшица по x в каждой ограниченной области G. Кроме того, выполняется условие ([1], с. 97)

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \{\langle s \cdot f(t, x, u, v)\rangle + s_{n+1} \cdot \omega(t, x, u, v)\} = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \{\langle s \cdot f(t, x, u, v)\rangle + s_{n+1} \cdot \omega(t, x, u, v)\}$$

Здесь s — n-мерный вектор, s_{n+1} — скаляр, $\langle s \cdot f\rangle$ — скалярное произведение. Допустимые законы управления — стратегии $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — будем отождествлять с функциями

$$u(\cdot) = \{u(t, x, \varepsilon) \in P,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x \in R^n,\ \varepsilon > 0\}$$
$$v(\cdot) = \{v(t, x, \varepsilon) \in Q,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ x \in R^n,\ \varepsilon > 0\}$$

($\{t, x\}$ — позиция, ε — некоторый параметр). При данной исходной позиции $\{t_*, x_*\}$, выбранных $\varepsilon > 0$ и разбиении $\Delta = \{\tau_i\}$, $\tau_0 = t_*$, $\tau_{m+1} = \vartheta$ и при той или иной измеримой по t реализации управления $v(t_*[\cdot]\vartheta)$ выбранная стратегия $u(\cdot)$ порождает движение $x(t_*[\cdot]\vartheta)$ объекта (1.2) по шагам, как абсолютно непрерывное решение уравнения

$$x^{\cdot}[t] = f(t, x[t], u(\tau_i, x[\tau_i], \varepsilon), v[t])$$
$$x[t_*] = x_*,\quad \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1},\quad i = 0, \ldots, m \tag{1.3}$$

Аналогично определяется движение $x(t_*[\cdot]\vartheta)$ объекта (1.2), порожденное из позиции $\{t_*, x_*\}$ стратегией $v(\cdot)$, как абсолютно непрерывное решение $x[t]$ пошагового дифференциального уравнения

$$(1.4)\qquad x^{\cdot}[t] = f(t, x[t], u[t], v(\tau_i, x[\tau_i], \varepsilon))$$
$$x[t_*] = x_*, \quad \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, m$$

Будем допускать исходные состояния $x[t_*] = x_*$ из областей $G[t_*] = \{\|x\| \leqslant (r_0 + 1)\exp[\chi\cdot(t_* - t_0)] - 1\}$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, где r_0 — выбранное заранее число. При $x_* \in G[t_*]$ любые движения $x(t_*[\cdot]t^*)$, $t^* \leqslant \vartheta$ объекта (1.2) не выходят из области $G_* = \{\{t, x\}: x \in G[t], t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$.

Справедливо следующее

Утверждение. Рассматриваемая дифференциальная игра имеет цену $\rho(t, x)$ и седловую точку $\{u^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot)\}$, равномерную по исходным позициям $\{t, x\}$ из области $G_0 = \{\{t, x\}: x \in G[t], t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$.

Это означает, что для любого $\zeta > 0$ найдутся $\varepsilon_*(\zeta) > 0$ и $\delta(\varepsilon, \zeta) > 0$, такие, что для всякого движения $x^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$, $x^\circ[t_*] = x_*$, порожденного стратегией $u^\circ(\cdot)$ по схеме (1.3), какова бы ни была исходная позиция $\{t_*, x_*\} \in G_0$, будет выполнено неравенство

$$(1.5)\qquad \gamma(x^\circ(t_*[\cdot]\vartheta), u^\circ(t_*[\cdot]\vartheta), v(t_*[\cdot]\vartheta)) \leqslant \rho(t_*, x_*) + \zeta$$

а для всякого движения $x^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$, $x^\circ[t_*] = x_*$, порожденного стратегией $v^\circ(\cdot)$ по схеме (1.4), будет выполнено неравенство

$$(1.6)\qquad \gamma(x^\circ(t_*[\cdot]\vartheta), u(t_*[\cdot]\vartheta), v^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)) \geqslant \rho(t_*, x_*) - \zeta$$

если только выполнены условия

$$(1.7)\qquad \varepsilon \leqslant \varepsilon_*(\zeta), \quad \max_i[\tau_{i+1} - \tau_i] \leqslant \delta(\varepsilon, \zeta)$$

В (1.5) и (1.6) $u^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$ — реализации стратегий $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$, вычисленные вдоль порожденных ими движений $x^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$. Из (1.5), (1.6) вытекает, в частности, что на движениях $x^{\circ\circ}(t_*[\cdot]\vartheta]$, порожденных одновременно (быть может, при разных Δ) стратегиями $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$, и на соответствующих реализациях $u^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$ значение функционала (1.1) сколь угодно мало отличается от цены игры $\rho(t_*, x_*)$, если только выполнены условия (1.7)

Доказательство этого утверждения опускаем. Оно проводится с необходимыми изменениями по схемам из работ [2, 3]. По известной цене игры $\rho(t, x)$ оптимальные стратегии $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$ строятся в меру эффективно по тому же плану, что и в работе [2] (с. 581).

2. Цель данной статьи — обоснование вспомогательной программной конструкции, позволяющей при некоторых предположениях определить цену рассматриваемой дифференциальной игры в случае, когда уравнение объекта (1.2) имеет вид

$$(2.1)\qquad x^{\cdot} = A(t)x + f(t, u, v)$$

Здесь $A(t)$ — матрица-функция, а функция ω в (1.1) имеет вид

$$(2.2)\qquad \omega(t, x, u, v) = \omega_x(t, x) + \omega_{uv}(t, u, v)$$

где функция ω_x выпукла по x. Кроме того, функцию φ в (1.1) будем полагать теперь выпуклой по x.

Рассмотрим модель

$$(2.3)\qquad w^{\cdot} = A(t)w + f(t, u, v), \quad u \in P, v \in Q$$
$$w^{\cdot}_{n+1} = \omega_{uv}(t, u, v)$$

Обозначая $\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}\} = z \in R^{n+1}$, запишем уравнения (2.3) в виде

$$z^{\cdot} = A_0(t)z + f_0(t, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{2.4}$$

где $A_0(t)$ — $(n+1) \times (n+1)$-матрица, а $f_0(t, u, v)$ — вектор $f(t, u, v)$, дополненный $(n+1)$-й компонентой $\omega_{uv}(t, u, v)$. На движениях модели (2.4) рассмотрим функционал

$$\gamma_0(z(t_*[\cdot]\vartheta)) = \int_{t_*}^{\vartheta} \omega_0(t, z[t])\,dt + \varphi_0(z[\vartheta]) \tag{2.5}$$

соответствующий функционалу (1.1) с учетом (2.2). Здесь $\omega_0(t, z) = \omega_x(t, w)$, $\varphi_0(z) = \varphi(w) + w_{n+1}$, и обе эти функции будут выпуклыми по z.

Суть обсуждаемого результата состоит в следующем. Для исходной игры с функционалом γ (1.1), (2.2) устанавливается возможность на основе модели (2.4) с функционалом γ_0 (2.5), включающих дополнительную координату w_{n+1}, так применить методику вспомогательных программных конструкций, чтобы цена и стратегии $u^\circ(\cdot)$, $v^\circ(\cdot)$ строились на основе информации лишь о текущей позиции $\{t, x[t]\}$. Дополнительная координата w_{n+1} при переходе от модели к объекту исключается благодаря подходу, развитому для позиционных функционалов [3]. При этом промежуточная программная конструкция носит функциональный характер. Продолжим описание ее элементов.

Будем называть действием $v(t^*[\cdot]\vartheta)$, $t_* \leqslant t^* < \vartheta$ любую измеримую функцию $v(t^*[\cdot]\vartheta) = \{v[\tau] \in Q, t^* \leqslant \tau \leqslant \vartheta\}$. Возьмем некоторые $v^* \in Q$, $\tau^* \in [t^*, \vartheta]$ и рассмотрим ограниченное, замкнутое, выпуклое в R^{n+1} множество

$$F(\tau^*, v^*) = \overline{\mathrm{co}}\,\{f_0(\tau^*, u, v^*), u \in P\} \tag{2.6}$$

Пусть $L^{(2)}[t^*, \vartheta]$ — пространство измеримых функций $\{g(t^*[\cdot]\vartheta)\}$ с нормой

$$\| g(t^*[\cdot]\vartheta) \|_2 = \left(\int_{t_*}^{\vartheta} \| g[\tau] \|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

Пусть выбрано некоторое действие $v^*(t^*[\cdot]\vartheta)$. Обозначим символом $S(v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$ множество $\{g(t^*[\cdot]\vartheta)\}$ элементов из $L^{(2)}[t^*, \vartheta]$, удовлетворяющих при почти всех $\tau \in [t^*, \vartheta]$ условию $g[\tau] \in F(\tau, v^*[\tau])$. Действием $g^*(t^*[\cdot]\vartheta)$, согласованным с действием $v^*(t^*[\cdot]\vartheta)$, назовем любую функцию из множества $S(v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$. Отметим, что это множество непусто, ограниченно, выпукло, сильно замкнуто и слабо компактно в пространстве $L^{(2)}[t^*, \vartheta]$. Последние два свойства доказываются при помощи теоремы Лузина ([5], с. 291) и теоремы о разделении множеств ([6], с. 452).

Для данного действия $v^*(t^*[\cdot]\vartheta)$ каждому согласованному с ним фиксированному действию $g^*(t^*[\cdot]\vartheta)$ при $z[t^*] = z^*$ отвечает движение $z(t^*[\cdot]\vartheta)$, которое представляется формулой Коши

$$z[t] = X(t, t^*)z^* + \int_{t_*}^{t} X(t, \tau) g^*[\tau]\,d\tau, \quad t^* \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.7}$$

$$z^* \in G^*[t^*] = \{\| w \| \leqslant (r_0 + 2\varepsilon^\circ + 1)\exp[\chi(t^* - t_0)] - 1, \ | w_{n+1} | \leqslant d(t^* - t_0) + 2\varepsilon^\circ\}$$

$$d = \max\{ | \omega_{uv}(t, u, v) |, t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, u \in P, v \in Q\}$$

Здесь $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.4), $\varepsilon^\circ > 0$ — некоторое фиксированное число.

Рассмотрим пространство $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$ измеримых функций $\{z(t_*[\cdot]\vartheta)\}$ с нормой

$$|z(t_*[\cdot]\vartheta)|_2 = \left(\int_{t_*}^{\vartheta} \|z[t]\|^2 dt\right)^{1/2} + |z[\vartheta]| \tag{2.8}$$

где $|z|$ — любая выбранная норма в пространстве R^{n+1}. Зафиксируем некоторую функцию $z^*(t_*[\cdot]t^*) = \{z^*[t], t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$, удовлетворяющую по t условию Липшица, и некоторое действие $v^*(t^*[\cdot]\vartheta)$. Обозначим $W^{(1)}(z^*(t_*[\cdot]t^*), v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$ множество всех функций $\{z^{(1)}(t_*[\cdot]\vartheta)\}$ из пространства $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$, каждая из которых склеена непрерывно из выбранной функции $z^*(t_*[\cdot]t^*)$ и какого-либо движения $z(t^*[\cdot]\vartheta)$ (2.7), порожденного для действия $v^*(t^*[\cdot]\vartheta)$ любым согласованным с ним действием $g(t^*[\cdot]\vartheta)$ при $z^* = z^*[t^*]$. Используя отмеченные выше свойства множества $S(v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$, можно показать, что множество $W^{(1)}(z^*(t_*[\cdot]t^*), v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$ выпукло и компактно в $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$.

Обозначим $W^{(2)}(\beta, M)$ множество функций $\{z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta)\}$ из $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$, таких, что $\gamma_0(z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta)) \leqslant \beta$ и $|z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta)|_2 \leqslant M$, где функционал γ_0 задан выражением (2.5), β — любое наперед выбранное число, M — некоторое достаточно большое фиксированное число. Из дальнейшего видно, что можно ограничиться случаями, когда множество $W^{(2)}(\beta, M)$ непусто.

Из свойств функций ω_0 и φ_0, фигурирующих в (2.5), следует, что множество $W^{(2)}(\beta, M)$ ограничено, замкнуто и выпукло в $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$.

Введем пространство $L_\mu^{(2)}[t_*, \vartheta]$ измеримых функций со скалярным произведением

$$(l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot z(t_*[\cdot]\vartheta)) = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle l[t]\cdot z[t]\rangle \mu(dt) =$$
$$= \int_{t_*}^{\vartheta} \langle l[t]\cdot z[t]\rangle dt + \langle l[\vartheta]\cdot z[\vartheta]\rangle$$

Из сделанных предположений и вытекающих из них свойств множеств $W^{(1)} = W^{(1)}(z^*(t_*[\cdot]t^*), v^*(t^*[\cdot]\vartheta))$ и $W^{(2)} = W^{(2)}(\beta, M)$ следует, что для значений β, при которых эти множества не пересекаются, они могут быть разделены ([6], с. 452), а максимальное по всевозможным действиям $v(t^*[\cdot]\vartheta)$ расстояние в пространстве $L_*^{(2)}[t_*, \vartheta]$ между множествами $W^{(1)}$ и множеством $W^{(2)}$ характеризуется положительной и невозрастающей по β величиной

$$\sigma(z^*(t_*[\cdot]t^*)\beta, M) = \max_{|l(t_*[\cdot]\vartheta)|_2^* \leqslant 1} \varkappa(z^*(t_*[\cdot]t^*), \beta, M, l(t_*[\cdot]\vartheta)) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\varkappa(z^*(t_*[\cdot]t^*), \beta, M, l(t_*[\cdot]\vartheta)) &= \\ = \max_{v(t^*[\cdot]\vartheta)} \min_{g(t^*[\cdot]\vartheta)} (l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot z^{(1)}(t_*[\cdot]\vartheta)) &- \\ - \max_{z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta)} (l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta))&\end{aligned} \tag{2.10}$$

Величина $|l(t_*[\cdot]\vartheta)|_2^*$ — норма, сопряженная к норме (2.8), т. е.

$$|l(t_*[\cdot]\vartheta)|_2^* = \max\left\{\left(\int_{t_*}^{\vartheta} \|l[\tau]\|^2 d\tau\right)^{1/2}, \quad |l[\vartheta]|^*\right\} \tag{2.11}$$

где $|l|^*$ — норма, сопряженная к выбранной в (2.8) норме $|z|$. Данное определение величин σ и $\varkappa$ корректно, так как все экстремумы в (2.9) и (2.10) вследствие отмеченных выше свойств множеств S, $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ действительно достигаются на соответствующих множествах аргументов.

Подставляя в (2.10) выражение $z^{(1)}(t_*[\cdot]\vartheta)$, используя при этом для вычисления $z(t^*[\cdot]\vartheta)$ формулу Коши (2.7), меняя затем порядок интегрирования и вводя функционал

$$\psi(\tau, l(t_*[\cdot]\vartheta)) = \int_\tau^\vartheta l'[t]\, X(t,\tau)\, \mu(dt), \quad t^* \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{2.12}$$

где штрих означает транспонирование, можно обосновать, что выражение (2.10) примет вид

$$\begin{aligned}\varkappa(z^*(t_*[\cdot]t^*), \beta, M, l(t_*[\cdot]\vartheta)) &= \\ = (l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot \overset{*}{z}_{t_*}(t_*[\cdot]t^*)_\vartheta) &+ (l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot X_{t_*}(t^*[\cdot, t^*]\vartheta)_\vartheta z^*) + \\ &+ \int_{t^*}^{\vartheta} \max_{v\in Q}\min_{u\in P}[\psi(\tau, l(t_*[\cdot]\vartheta)) f_0(\tau, u, v)]\, d\tau - \\ &- \max_{z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta)} (l(t_*[\cdot]\vartheta)\cdot z^{(2)}(t_*[\cdot]\vartheta))\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $Y_{t*}(\tau_*[\cdot]\tau^*)_\vartheta$ — функция, совпадающая на отрезке $[\tau_*, \tau^*] \subset [t_*, \vartheta]$ с функцией $Y(\tau_*[\cdot]\tau^*)$, а в остальных точках отрезка $[t_*, \vartheta]$ обращающаяся в нуль. При обосновании перехода от (2.10) к (2.13) важно, что функции $\{\psi(\tau, l(t_*[\cdot]\vartheta)), |l(t_*[\cdot]\vartheta)|_2^* \leqslant 1\}$ на отрезке $[t^*, \vartheta]$ равномерно ограничены, равностепенно непрерывны, и если последовательность $\{l^{(k)}(t_*[\cdot]\vartheta), k=1, 2, \ldots\}$ слабо сходится в $L_\mu^{(2)}[t_*, \vartheta]$ к некоторой функции $l^*(t_*[\cdot]\vartheta)$, то соответствующая последовательность $\{\psi(\tau, l^{(k)}(t_*[\cdot]\vartheta)), k=1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $\psi(\tau, l^*(t_*[\cdot]\vartheta))$ в $R^{(n+1)}$ равномерно по τ.

При некотором дополнительном условии обращение к задаче (2.9), (2.13) позволяет найти цену $\rho(t_*, x_*)$ рассматриваемой дифференциальной игры. Это дополнительное условие регулярности формулируется следующим образом.

Пусть зафиксированы $z^*(t_*[\cdot]t^*)$, β и M и пусть $\sigma(z^*(t_*[\cdot]t^*), \beta, M) > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всяких $t^\circ : (t^\circ - t^*) \leqslant \delta(\varepsilon)$ и действия $v^*(t^*.[\cdot]t^\circ)$ существует действие $g^*(t^*[\cdot]t^\circ)$, согласованное с действием $v^*(t^*[\cdot]t^\circ)$, такое, что

$$\begin{aligned}&\int_{t^*}^{t^\circ} \psi(\tau, l^\circ(t_*[\cdot]\vartheta))\, g^*[\tau]\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant \int_{t^*}^{t^\circ} \max_{v\in Q}\min_{u\in P}[\psi(\tau, l^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)) f_0(\tau, u, v)]\, d\tau + \varepsilon(t^\circ - t^*)\end{aligned} \tag{2.14}$$

для каждого элемента $l^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$, являющегося решением задачи (2.9), (2.13), соответствующим выбранным $z^*(t_*[\cdot]t^*)$, β и M.

Условие регулярности заведомо выполнено, если максимум в (2.9) достигается на единственном элементе $l^\circ(t_*[\cdot]\vartheta)$.

Пусть $\{t_*, z_*\}$ — некоторая позиция, где $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $z_* \in G^*[t_*]$. Обозначим символом $\rho^*(t_*, z_*)$ точную верхнюю грань тех чисел β, для которых $\sigma(z^*(t_*[\cdot]t^*), \beta, M) > 0$, где $z^*[t_*] = z_*$. Оказывается, что $\rho^*(t_*, z_*) = \rho_*(t_*, z_{1*}, \ldots, z_{n*}) + z_{n+1*}$, где $\rho_*(t_*, z_{1*}, \ldots, z_{n*}) = \rho^*(t_*, z_{1*}, \ldots, z_{n*}, 0)$.

Пусть $\{t_*, x_*\}$ — произвольная позиция из области G_0 и пусть выполнено условие регулярности, тогда справедливо утверждение: цена $\rho(t_*, x_*)$ рассматриваемой дифференциальной игры определяется соотношением

$$\rho(t_*, x_*) = \rho_*(t_*, x_{1*}, \ldots, x_{n*}) = \rho^*(t_*, x_{1*}, \ldots, x_{n*}, 0) \tag{2.15}$$

Доказательство этого утверждения проводится по схеме из теории вспомогательных программных конструкций. Здесь, однако, необходим аккуратный учет дополнительных обстоятельств, связанных с функциональной природой элементов $l\,(t_*\,[\cdot]\,\vartheta)$.

Подчеркнем при этом, что хотя элементы предложенной программной конструкции, позволяющей вычислить цену игры, а следовательно, и построить оптимальные стратегии $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$, носят функциональный характер, но выводимые из этих элементов алгоритмы оптимального управления сводят дело в конечном итоге к построению воздействий в функции от конечно-мерного описания текущей позиции $\{t, x_1[t], \ldots, x_n[t]\}$ исходного объекта (2.1). Если же подынтегральная функция в оптимизируемом функционале (1.1) такова, что в (2.2) $\omega_x(t, x) \equiv 0$, то и элементы рассмотренной программной конструкции будут носить конечно-мерный характер. В этом случае задача (2.9), (2.13) трансформируется в следующую задачу на максимум от функции $(n+1)$- й переменной:

$$\sigma(t_*, z_*, \beta, M) = \max_{|l|^* \leqslant 1} \varkappa(t_*, z_*, \beta, M, l) \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \varkappa(t_*, z_*, \beta, M, l) = {} & \langle l \cdot X(\vartheta, t_*) z_* \rangle + \\ & + \int_{t_*}^{\vartheta} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle l \cdot X(\vartheta, \tau) f_0(\tau, u, v) \rangle \, d\tau - \\ & - \max_{z^{(2)} \in W^{(2)}(\beta, M)} \langle l \cdot z^{(2)} \rangle \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $|\,l\,|^*$ — норма, сопряженная к выбранной норме $|\,z\,|$, а $W^{(2)}(\beta, M)$ — множество тех $z^{(2)} \in R^{n+1}$, для которых $\varphi_0(z^{(2)}) \equiv \varphi(w) + w_{n+1} \leqslant \beta$ и $|\,z^{(2)}\,| \leqslant M$.

В заключение этого раздела сформулируем одно вспомогательное утверждение, которое оказывается полезным при решении конкретных задач.

Пусть даны фиксированные числа β и $c > 0$ и множество позиций $G^\circ = \{\{t_* z_*\},\ t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta,\ z_* \in G^*[t_*]\}$. Пусть существует число $M_* > 0$, такое, что множества $W^{(2)}(\beta, M_*)$ и $G_c = \{\{t_*, z_*\} : \sigma(t_*, z_*, \beta, M_*) < c\} \cap G^\circ$ не пусты, где $\sigma(t_*, z_*, \beta, M_*)$ вычисляется по формуле (2.16) при $W^{(2)}(\beta, M_*)$. Тогда найдется число $M^* \geqslant M_*$, которое удовлетворяет следующему условию: если l° — максимизирующий вектор для $\varkappa(t_*, z_*, \beta, M^*, l)$ при $\sigma(t_*, z_*, \beta, M^*) < c$, то этот вектор l° остается максимизирующим и для $\varkappa(t_*, z_*, \beta, M, l)$ при $W^{(2)}(\beta, M)$ для всех $M \geqslant M^*$ и при этом $\sigma(t_*, z_*, \beta, M) = \sigma(t_*, z_*, \beta, M^*)$.

3. Проиллюстрируем методику решения задачи (2.16), (2.17) на примере, когда уравнения движения (2.1) имеют вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = u + v, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \quad \|u\| \leqslant 2, \quad \|v\| \leqslant 1 \tag{3.1}$$

а функционал (1.1) имеет вид

$$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot v \rangle \, dt + \|q[\vartheta]\|, \quad 0 = t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta \tag{3.2}$$

Приведем систему (3.1) к нормальному виду

(3.3) $\quad x_1^{\cdot} = x_3, \quad x_3^{\cdot} = u_1 + v_1, \quad x_2^{\cdot} = x_4, \quad x_4^{\cdot} = u_2 + v_2$

Тогда

(3.4) $$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot v \rangle \, dt + (x_1^2 [\vartheta] + x_2^2 [\vartheta])^{1/2}$$

Уравнения модели (2.3) и функционал (2.5) имеют вид

(3.5) $$w_1^{\cdot} = w_3, \quad w_3^{\cdot} = u_1 + v_1, \quad w_2^{\cdot} = w_4, \quad w_4^{\cdot} = u_2 + v_2, \quad w_5^{\cdot} = = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

(3.6) $$\gamma_0 (z (t_* [\cdot] \vartheta)) = w_5 [\vartheta] + (w_1^2 [\vartheta] + w_2^2 [\vartheta])^{1/2}$$

Для вектора $z = \{w_1, \ldots, w_4, w_5\}$ здесь удобно выбрать норму

$$|z| = \| w \| + | w_5 | = (w_1^2 + \ldots + w_4^2)^{1/2} + | w_5 |$$

Тогда

$$| l |^* = \max \{(l_1^2 + \ldots + l_4^2)^{1/2}, | l_5 |\}$$

В соответствии с (2.16), (2.17), если выполнено условие регулярности (2.14), то для определения цены игры $\rho (t_*, x_*)$ получаем задачу

(3.7) $$\sigma (t_*, z_*, \beta, M^*) = \max_{|l|^* \leqslant 1} \varkappa (t_*, z_*, \beta, M^*, l)$$

где число M^* выбрано в соответствии с условиями вспомогательного утверждения, $z_* = \{x_{1*}, \ldots, x_{4*}, 0\}$, а выражение для $\varkappa (t_*, z_*, \beta, M^*, l)$ (2.17) имеет вид

(3.8) $$\varkappa (t_*, z_*, \beta, M^*, l) = [l_1 (x_{1*} + x_{3*} \cdot (\vartheta - t_*)) + + l_2 (x_{2*} + x_{4*} \cdot (\vartheta - t_*)) + l_3 x_{3*} + l_4 x_{4*}] + \int_{t_*}^{\vartheta} \max_{\|v\| \leqslant 1} \min_{\|u\| \leqslant 2} [l_1 (u_1 + v_1)(\vartheta - \tau) + + l_2 (u_2 + v_2) (\vartheta - \tau) + l_3 (u_1 + v_1) + + l_4 (u_2 + v_2) + l_5 \langle u \cdot v \rangle] \, d\tau - \max_{z^{(2)} \in W^{(2)}(\beta, M^*)} \langle l \cdot z^{(2)} \rangle$$

По определению множества $W^{(2)} (\beta, M^*)$, с учетом (3.6) имеем

(3.9) $$W^{(2)} (\beta, M^*) = \{z^{(2)} : (w_1^2 + w_2^2)^{1/2} + w_5 \leqslant \beta, \quad | z^{(2)} | \leqslant M^*\}$$

Из вида $\varkappa (t_*, z_*, \beta, M^*, l)$ (3.8) и $W^{(2)} (\beta, M^*)$ (3.9), пользуясь вспомогательным утверждением, можно вывести, что $l_3^{\circ} = l_4^{\circ} = 0$, $l_5^{\circ} = 1$, и тогда получается

(3.10) $$\max_{z^{(2)} \in W^{(2)}(\beta, M^*)} \langle l^{\circ} \cdot z^{(2)} \rangle = \max_{(w_1^2 + w_2^2)^{1/2} + w_5 \leqslant \beta} (l_1^{\circ} w_1 + l_2^{\circ} w_2 + w_5) = \beta$$

Подставляя (3.10) в (3.8), вводя двумерный вектор $s [\tau] = \{l_1 \cdot (\vartheta - \tau), l_2 \cdot (\vartheta - \tau)\}$ и учитывая (2.15), находим, что при выполнении условия регулярности

(3.11) $$\rho (t_*, x_*) = \sup \{\beta : \sigma (t_*, z_*, \beta, M^*) > 0\} = = \max_{(l_1^2 + l_2^2) \leqslant 1} \{[l_1 (x_{1*} + x_{3*} \cdot (\vartheta - t_*)) + l_2 (x_{2*} + x_{4*} \cdot (\vartheta - t_*))] + + \int_{t_*}^{\vartheta} \max_{\|v\| \leqslant 1} \min_{\|u\| \leqslant 2} [\langle s [\tau] \cdot u \rangle + \langle s [\tau] \cdot v \rangle + \langle u \cdot v \rangle] \, d\tau\}$$

Можно проверить, что подынтегральное выражение в (3.11) равно $\lambda (\|s [\tau]\|)$, где

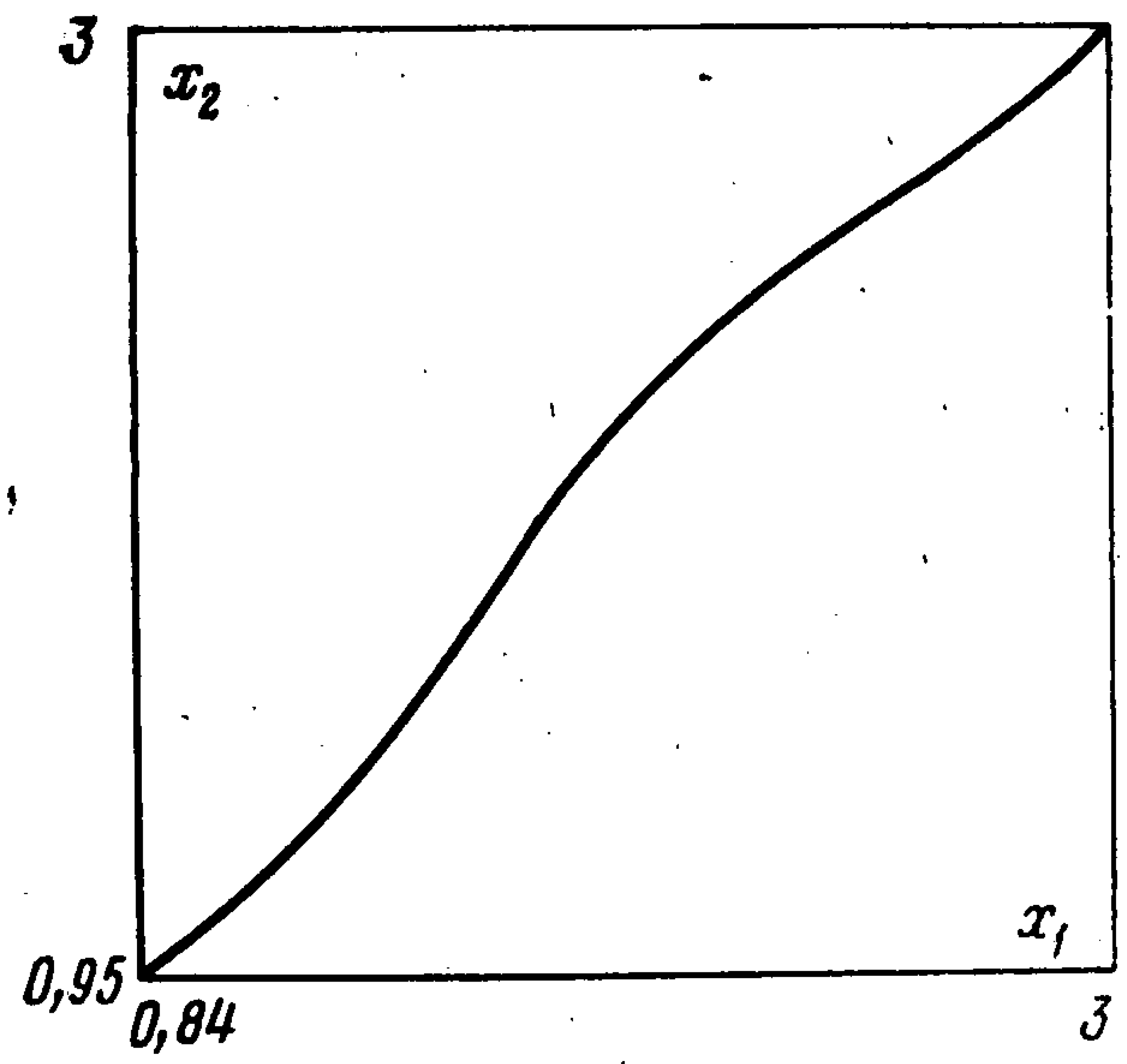
(3.12) $$\lambda (\| s [\tau] \|) = \begin{cases} -\| s [\tau] \|^2, & \| s [\tau] \| \leqslant 1 \\ -3 \| s [\tau] \| + 2, & 1 \leqslant \| s [\tau] \| \leqslant 2 \\ -\| s [\tau] \| - 2, & \| s [\tau] \| \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\| s [\tau] \| = (\vartheta - \tau) r, \quad r = (l_1^2 + l_2^2)^{1/2}$$

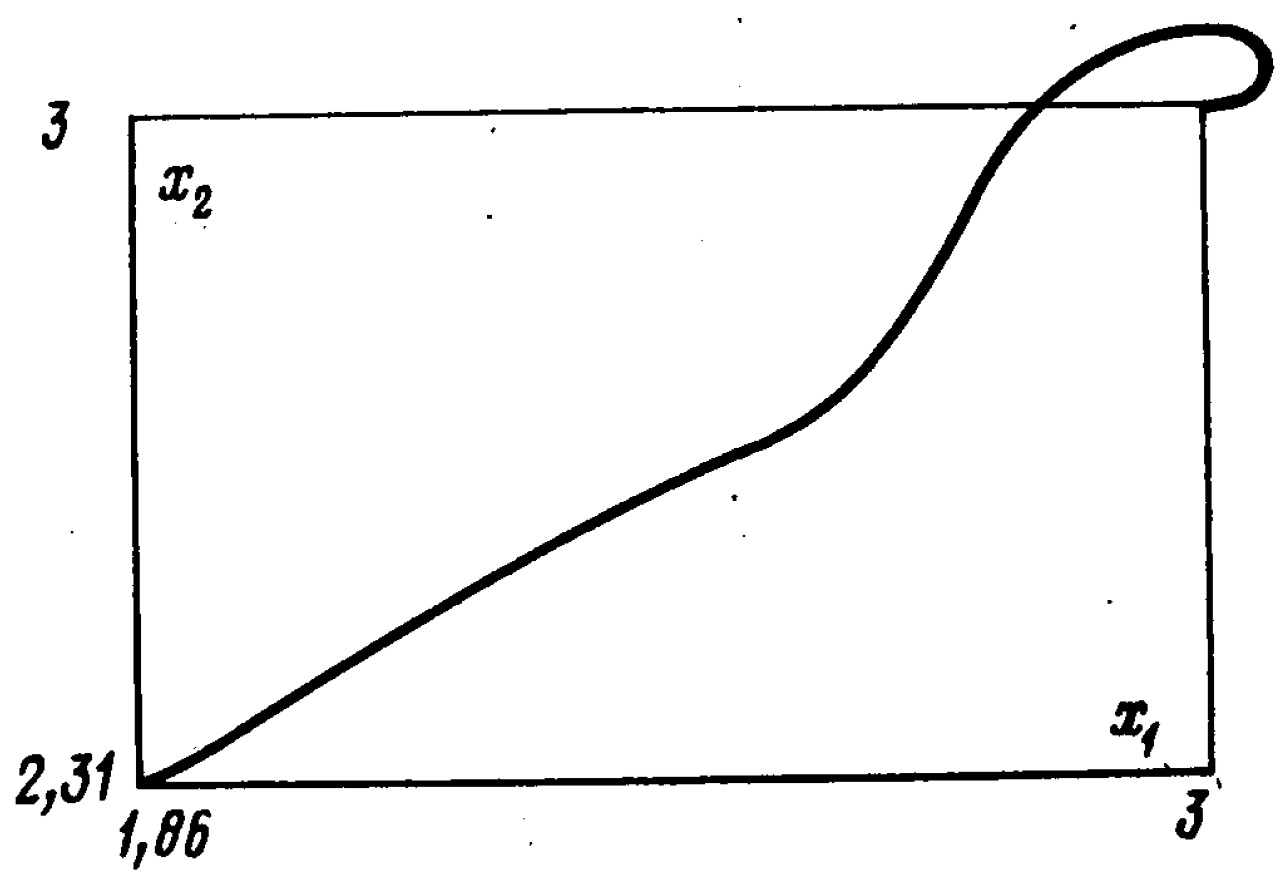
Значит, отношение l_2/l_1 не влияет при неизменном r на величину интеграла в (3.11). Но тогда можно положить

(3.13) $$l_1 = r (x_{1*} + x_{3*} \cdot (\vartheta - t_*))/k, \quad l_2 = r (x_{2*} + x_{4*} \cdot (\vartheta - t_*))/k$$

$$k = [(x_{1*} + x_{3*} \cdot (\vartheta - t_*))^2 + (x_{2*} + x_{4*} \cdot (\vartheta - t_*))^2]^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

при $k \neq 0$; при $k = 0$ имеем $l_1^\circ = l_2^\circ = 0$, и с учетом (3.13) задача (3.11) редуцируется в следующую задачу на максимум:

$$\rho(t_*, x_*) = \max_{0 \leqslant r \leqslant 1} \left\{ rk + \int_{t_*}^{\vartheta} \lambda(\| s[\tau] \|)\, d\tau \right\} \tag{3.14}$$

Вычисляя в (3.14) интеграл от функции $\lambda(\| s[\tau] \|)$ (3.12) и обозначая $T_* = \vartheta - t_*$, окончательно находим

$$\rho(t_*, x_*) = \max_{0 \leqslant r \leqslant 1} \chi(T_*, x_*, r) \tag{3.15}$$

$$\chi(T_*, x_*, r) = rk - \begin{cases} r^2 T_*^3/3; & r \in [0, T_*^{-1}] \cap [0, 1] \\ 3rT_*^2/2 + 5/(6r) - 2T_*; & r \in [T_*^{-1}, 2T_*^{-1}] \cap [0, 1] \\ rT_*^2/2 - 19/(6r) + 2T_*; & r \in [2T_*^{-1}, 1] \cap [0, 1] \end{cases}$$

Осталось выяснить, имеет ли место условие регулярности (2.14). Можно заметить, что функция $\chi(\vartheta - t_*, x_*, r)$ в (3.15) для $\vartheta \leqslant \vartheta_* = 2$ при любой позиции $\{t_*, x_*\} \in G_0$ вогнута по r и, следовательно, максимум в (3.15) достигается при единственном значении r°. Значит, максимум по l в исходной задаче (3.7), (3.8) при $\sigma(t_*, z_*, \beta, M^*) > 0$ достигается на единственном векторе l°. В таком случае, как было отмечено, условие регулярности выполняется. Можно показать, что условие (2.14) будет иметь место и при $\vartheta_* < \vartheta \leqslant \vartheta_* + \eta$, где η — некоторое положительное число, несмотря на то, что вектор l° уже не будет теперь единственным для всех позиций $\{t_*, x_*\} \in G_0$. С дальнейшим увеличением ϑ условие регулярности, может быть, разрушится.

По цене игры $\rho(t, x)$, вычисляемой из условия (3.15), оптимальные стратегии $u^\circ(\cdot)$, $v^\circ(\cdot)$ конструируются известным образом [2]. В типичных ситуациях процесс данной игры был смоделирован на ЭВМ для исходных данных $\vartheta = 2$, $t_* = 0$, $x_{1*} = x_{2*} = 3$, $x_{3*} = x_{4*} = 0$. Если оба игрока руководствуются оптимальными стратегиями $u^\circ(\cdot)$ и $v^\circ(\cdot)$, то объект (3.3) в плоскости $\{x_1, x_2\}$ движется по прямой, проходящей через начало координат, и показатель γ (3.4) совпадает с ценой игры $\rho(t_*, x_*) = 1{,}578$. На фиг. 1 изображено движение объекта (3.3) при $u = u^\circ(\cdot)$ и $v = \{\cos \pi t, \sin \pi t\}$. При этом $\gamma = 1{,}025 < \rho(t_*, x_*)$, на фиг. 2 изображено движение объекта (3.3) при $v = v^\circ(\cdot)$ и $u = \{2 \cos \pi t, 2 \sin \pi t\}$. При этом $\gamma = 2{,}655 > \rho(t_*, x_*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
2. *Красовский А. Н., Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 579—586.
3. *Красовский А. Н.* Дифференциальная игра для позиционного функционала.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1303—1307.
4. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 6, с. 1303—1306.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

Свердловск

Поступила в редакцию 20.I.1982