Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА КАЧЕСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пацко В. С.

Приводится алгоритм решения дифференциальной игры качества [1] для конфликтно-управляемой системы второго порядка. Статья примыкает к работам [2—5].

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы на плоскости R^2 описывается дифференциальным уравнением

$$y^{\cdot}(t) = Ay(t) + u(t) + v(t) \tag{1.1}$$

где A — постоянная матрица 2×2, собственные значения которой имеют ненулевую мнимую часть, $u(t)$ — управляющий параметр первого игрока, $v(t)$ — второго. В каждый момент t параметр $u(t)$ выбирается из отрезка $P \subset R^2$, $v(t)$ — из выпуклого компакта $Q \subset R^2$. Первый игрок стремится перевести систему (1.1) в заданную точку m, второй — препятствует этому.

Символом $\mathbf{U}$ обозначим множество стратегий [2] первого игрока, а именно множество всех функций, заданных на $R_+ \times R^2$ со значениями в P. Здесь R_+ — множество неотрицательных чисел. Символом $\mathbf{V}$ обозначим множество всех измеримых функций времени со значениями в Q. Пусть Δ — произвольное разбиение полуоси R_+ точками $0 = t_1 < t_2 < \ldots$ ($t_i \to \infty$ при $i \to \infty$) и $d(\Delta)$ — диаметр разбиения. При фиксированных Δ, x, U, v через $y(\cdot; \Delta, x, U, v)$ обозначим абсолютно непрерывную функцию времени, заданную на R_+ со значениями в R^2, равную x при $t = 0$ и являющуюся на каждом полуинтервале $t_i \leqslant t < t_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots$) разбиения Δ решением дифференциального уравнения

$$y^{\cdot}(t) = Ay(t) + U(t_i, y(t_i)) + v(t)$$

Пусть a_*, a^* — столбцы матрицы A, p_*, p^* — крайние точки отрезка P, $s = (a_*, a^*, m, p_*, p^*, Q)$. Определим $B(s)$ как совокупность всех $x \in R^2$, для каждого из которых существуют стратегия $U \in \mathbf{U}$, момент $\theta > 0$ и отображение $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$ из R_+ в R_+, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, разбиение Δ с диаметром $d(\Delta) \leqslant \delta(\varepsilon)$ и функция $v \in \mathbf{V}$, найдется момент $t \in [0, \Theta]$, при котором $y(t; \Delta, x, U, v)$ будет принадлежать ε-окрестности точки m.

Иначе говоря, множество $B(s)$ — совокупность всех начальных точек x на плоскости, для каждой из которых существует способ действия первого игрока по принципу обратной связи, гарантирующий перевод системы (1.1) из x в m за конечное время при любых действиях второго игрока.

Если при выбранном s функция

$$\varphi(l) = \max_{p \in R} \min_{q \in Q} l'(p + q), \quad l \in R^2$$

выпуклая или вогнутая, то решение задачи о поиске множества $B(s)$ сводится [2] к решению соответствующей задачи управления. Вопросам, связанным с описанием множества $B(s)$, когда условия выпуклости или вогнутости φ не обязательно выполнены, посвящены работы [3—5]. Данная статья опирается на [4, 5]. В ней для случая, когда φ не является выпуклой или вогнутой функцией, приводится алгоритм построения некоторого множества $C(s)$, совпадающего с $\mathrm{cl}\, B(s)$, если s принадлежит множеству непрерывности отображения $s \to \mathrm{cl}\, B(s)$ (cl — символ замыкания в эвклидовой метрике). В отличие от описанного в [5] предлагаемый ниже алгоритм допускает реализацию на ЭВМ. На его основе В. Л. Туровой создана программа построения множества $C(s)$ на ЭВМ. Приводятся примеры счета на ЭВМ.

Уточним понятие непрерывности отображения $s \to \mathrm{cl}\, B(s)$. Пусть D — совокупность таких $(a_*, a^*) \in R^2 \times R^2$, что матрица $A = \| a_*, a^* \|$ имеет собственные значения с ненулевой мнимой частью. Символом X обозначим пространство компактных подмножеств R^2 с метрикой Хаусдорфа $\mathrm{dist}\,(\cdot, \cdot)$ [6], символом Y — множество всех замкнутых подмножеств R^2. Из произведения $R^2 \times R^2 \times X$ выделим подмножество Π элементов (p_*, p^*, Q), для каждого из которых функция φ не является выпуклой или вогнутой. Пусть $S = D \times R^2 \times \Pi$, $\mathrm{Dist}\,(\cdot, \cdot)$ — метрика Хаусдорфа в S. Отображение F из S в Y назовем непрерывным в точке s, если для любого компакта $\Gamma \subset R^2$, любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\mathrm{dist}\,(F(s) \cap \Gamma, F(s_*) \cap \Gamma) \leqslant \varepsilon$ при всяком $s_* \in S$, удовлетворяющем неравенству $\mathrm{Dist}\,(s, s_*) \leqslant \delta$.

Пусть $S_1 \subset S$ — множество всех точек непрерывности отображения $s \to \mathrm{cl}\, B(s)$ из S в Y. Можно показать, что множество S_1 открыто и $S \diagdown S_1 \subset \mathrm{cl}_D S_1$ (cl_D — символ замыкания в метрике $\mathrm{Dist}\,(\cdot, \cdot)$). Таким образом, множество $S \diagdown S_1$ «мало».

2. Зафиксируем $s \in S_1$. Не теряя общности, будем считать, что фазовые траектории уравнения $y^{\cdot}(t) = -Ay(t)$ с ростом t обходят начало координат против часовой стрелки.

Разобьем плоскость на четыре подряд идущих выпуклых конуса K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) с вершиной в нуле, непустой внутренностью и раствором $< \pi$ так, что: 1) сужение φ на K_1 (K_3) есть вогнутая функция, сужение на K_2 (K_4) — выпуклая; 2) сужение φ на любой конус K_i не является линейной функцией. Существование такого разбиения следует из определения функции φ и предположения (заложенного в определение множества S), что она не является выпуклой или вогнутой.

Зафиксируем и обозначим символом E произвольную, состоящую из четырех звеньев замкнутую ломаную линию на плоскости, такую, что если E_i — ее звено с номером i, то

$$\mathrm{cl}\, K_i = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda E_i$$

Пусть H_0 — сужение на $E \times R^2$ функции

$$H(l, x) = l'Ax + \varphi(l),\ l \in R^2,\ x \in R^2$$

В терминах, связанных с функцией H_0, сформулируем необходимые и достаточные условия того, что $B(s) \neq \{m\}$ [4]. Для любых l_1, l_2 из E через $\rho(l_1, l_2)$ обозначим угол между векторами l_1, l_2, отсчитываемый от первого ко второму против часовой стрелки. При $l_1 = l_2$ положим $\rho(l_1, l_2) = 0$. Будем писать $l_1 < l_2$, если $l_1 \neq l_2$ и $\rho(l_1, l_2) < \pi$. Скажем, что вектор $l^* \in E$ является корнем плюс на минус действительной функции f, заданной на E, если $f(l^*) = 0$ и $f(l) > 0$ ($f(l) < 0$) при любом $l < l^*$ ($l^* < l$), достаточно близком к l^*. В аналогичном понятном смысле будем говорить о корне минус на плюс функции f. Символом F_1 обозначим совокупность всех $x \in R^2$, для каждого из которых существуют l^*, l^* из E, являющиеся соответственно корнями минус на плюс и плюс на минус функции $H_0(\cdot, x)$, причем $\rho(l_*, l^*) > \pi$ и $H_0(l, x) \neq 0$ для $l \in E$, отличных от l_*, l^*. Множество F_2 определим как F_1, заменив лишь условие $\rho(l_*, l^*) > \pi$ на

$\rho(l_*, l^*) = \pi$. Для всех $l \in E$, $x \in R^2$ через $\Lambda(l, x)$ обозначим луч, выходящий из x, направление которого после поворота на $\pi / 2$ против часовой стрелки совпадает с направлением вектора l. При $\varepsilon > 0$, $x \in R^2$ пусть $O(\varepsilon, x)$ означает ε-окрестность точки x.

Лемма. Пусть $s \in S$. Тогда соотношение $B(s) \neq \{m\}$ эквивалентно одному из условий: 1) $m \in F_1$, 2) $m \in F_2$ и существует $\varepsilon > 0$, такое, что $O(\varepsilon, m) \cap \Lambda(l^*, m) \subset F_1 \cup F_2$, где l^* — корень плюс на минус функции $H_0(\cdot, m)$.

Если выполнено условие 2) леммы, то s не является точкой непрерывности отображения $s \to \operatorname{cl} B(s)$. Поэтому имеет смысл проверять на ЭВМ лишь условие 1). Когда оно выполнено, переходим к построению кривых, определяющих множество $C(s)$. Когда условие 1) не выполнено, полагаем $C(s) = \{m\}$.

3. Введем необходимые понятия и обозначения. Для любого целого $1 \leqslant c \leqslant 5$ положим $(c) = c$, если $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, и $(c) = 1$, если $c = 5$. Пусть $\bar{c} = 1$ при $c = 2$ и $\bar{c} = 2$ при $c = 1$. Примем для $n = 1, 2$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2$

$$E_k^{(n)}(i) = E_{(2i+n+k-3)}, \qquad \Gamma^{(n)}(i) = E_1^{(n)}(i) \cup E_2^{(n)}(i)$$

$$P_k^{(n)}(i) = \{x \in R^2 \colon (-1)^{k+1} H_0^{(n)}(l, x) \leqslant 0,\ l \in E_k^{(n)}(i)\}$$

$$M^{(n)}(i) = R^2 \setminus (P_1^{(n)}(i) \cup P_2^{(n)}(i)), \qquad T_k^{(n)}(i) = \partial P_k^{(n)}(i) \setminus \partial P_{\bar{k}}^{(n)}(i)$$

Здесь ∂ — символ границы, $H_0^{(n)}(l, x) = (-1)^n H_0(l, x)$. Символами $e_{k*}^{(n)}(i)$, $e_k^{(n)*}(i)$ обозначим крайние точки отрезка $E_k^{(n)}(i)$. Считаем, что $e_{k*}^{(n)}(i) < e_k^{(n)*}(i)$. Пусть

$$\Gamma^{(n)}(i) = \Gamma^{(n)}(i) \setminus (\{e_{1*}^{(n)}(i)\} \cup \{e_2^{(n)*}(i)\})$$

На фиг. 1 показан возможный вид множеств $P_1^{(1)}(1)$, $P_2^{(1)}(1)$, $M^{(1)}(1)$.

При любых $n = 1, 2$, $i = 1, 2$ для всякого $x \in M^{(n)}(i)$ существует корень минус на плюс функции $H_0^{(n)}(\cdot, x)$, принадлежащий $\Gamma^{(n)}(i)$. Функция $H_0^{(n)}(\cdot, x)$ выпукла на $E_1^{(n)}(i)$ и вогнута на $E_2^{(n)}(i)$, поэтому вектор из $\Gamma^{(n)}(i)$, являющийся корнем минус на плюс, единствен. Обозначим его $L^{(n)}(i, x)$. Если $x \,\overline{\in}\, M^{(n)}(i)$, то функция $H_0^{(n)}(\cdot, x)$ не имеет корней минус на плюс в $\Gamma^{(n)}(i)$. Функция $L^{(n)}(i, \cdot)$ удовлетворяет в $M^{(n)}(i)$ локальному условию Липшица.

При $n = 1, 2$, $l \in E$ пусть $\gamma^{(n)}(l)$ — единичный вектор, повернутый относительно l на $\pi/2$ против часовой стрелки, если $n = 1$, и по часовой стрелке, если $n = 2$. Положим $J^{(n)}(i, x) = \gamma^{(n)}(L^{(n)}(i, x))$.

Пусть $n = 1, 2$, $i = 1, 2$, $x \in M^{(n)}(i) \cup T_1^{(n)}(i)$. Символом $q^{(n)}(\cdot, i, x)$ обозначим гладкую функцию (кривую в параметрической записи), определенную на некотором отрезке $[0, \tau^{(n)}(i, x)]$, $\tau^{(n)}(i, x) > 0$, удовлетворяющую условиям $q^{(n)}(0, i, x) = x$, $q^{(n)}(\tau^{(n)}(i, x), i, x) \in T_2^{(n)}(i)$ и являющуюся на $(0, \tau^{(n)}(i, x))$ решением дифференциального уравнения

$$\psi^{\cdot}(\tau) = J^{(n)}(i, \psi(\tau))$$

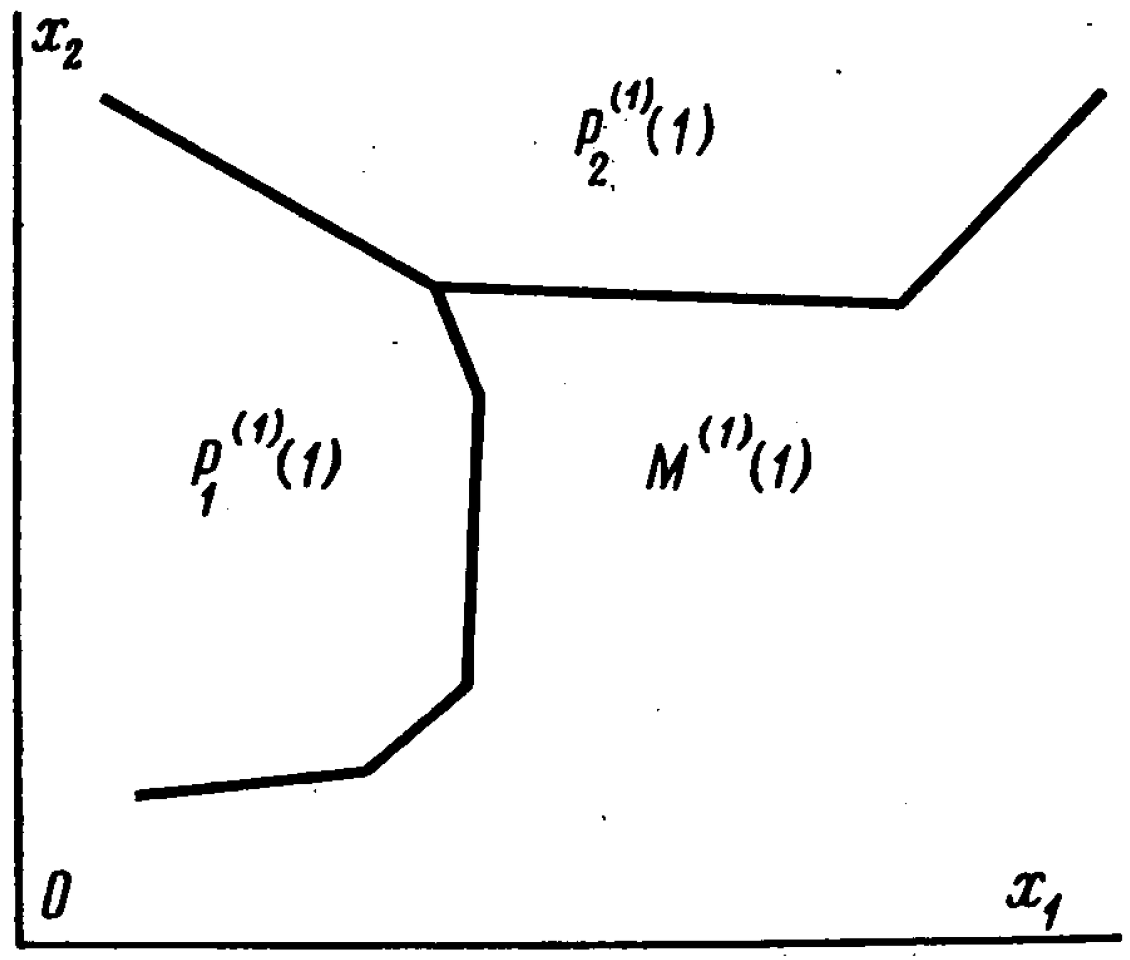
Такая функция (кривая) существует и единственна. Кривая $q^{(n)}(\cdot, i, x)$ — гладкая полупроницаемая кривая [1].

Для кривой $q^{(n)}(\cdot, i, x)$ введем понятия момента и точки отростка. Через $W^{(n)}(i, x)$ обозначим совокупность всех $\tau \in (0, \tau^{(n)}(i, x))$, для каждого из которых существует $l^0 \in \Gamma^{(n)}(\bar{i}) \setminus \{e_2^{(n)*}(\bar{i})\}$, такое, что

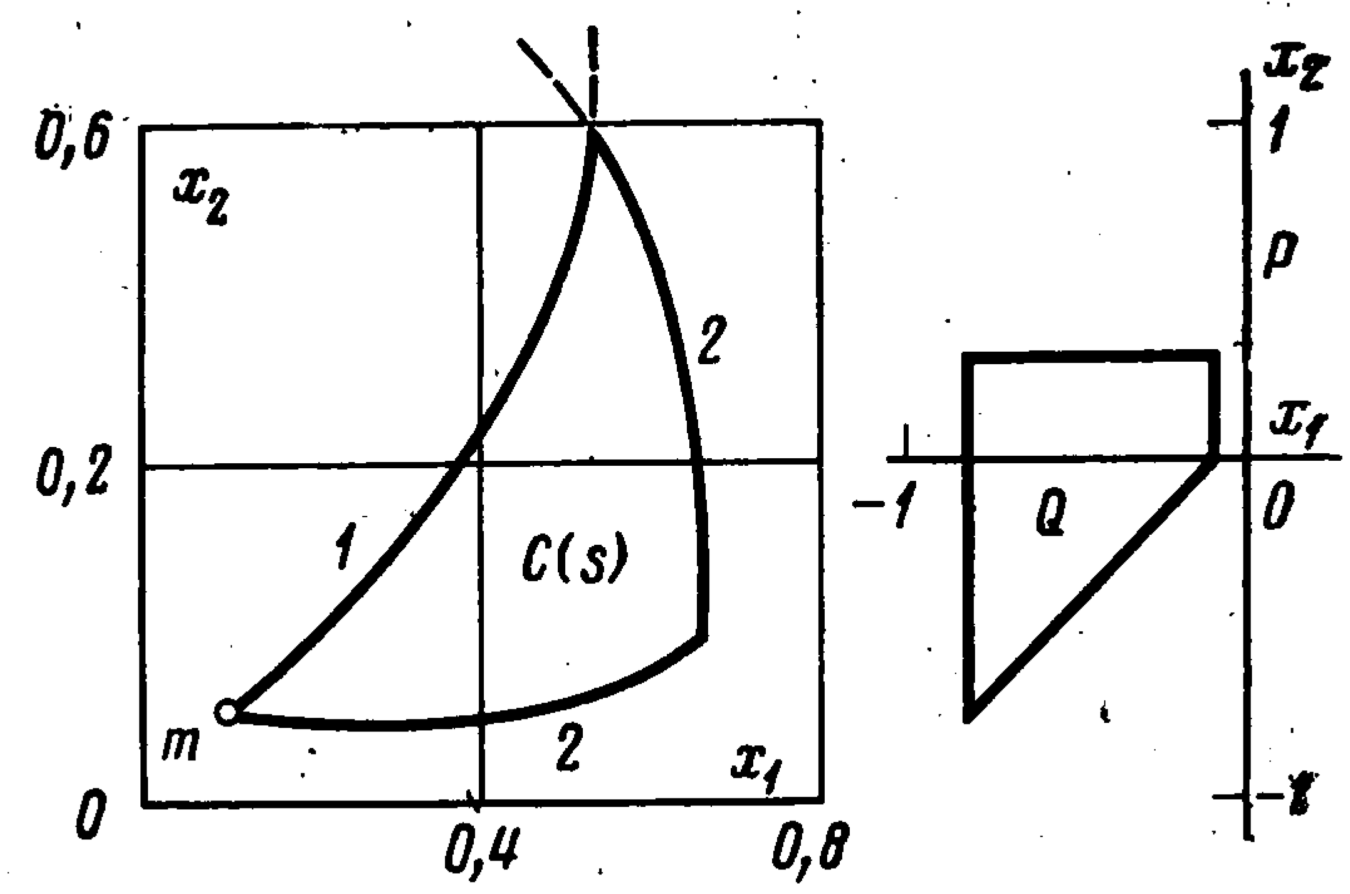
1) $\rho(L^{(n)}(i, q^{(n)}(\tau - 0, i, x)), l^0) < \pi$

2) $H_0^{(n)}(l, q^{(n)}(\tau, i, x)) \geqslant 0$, $l \in E$, $L^{(n)}(i, q^{(n)}(\tau - 0, i, x)) < l < l^0$

3) $H_0^{(n)}(l, q^{(n)}(\tau, i, x)) < 0$



Фиг. 1



Фиг. 2

при любом $l \in E$, достаточно близком к l^0 и удовлетворяющем соотношению $l^0 < l$. Если множество $W^{(n)}(i, x) \neq \phi$, то оно состоит из одного или двух элементов. Ближайший к $\tau^{(n)}(i, x)$ элемент обозначим $w^{(n)}(i, x)$ и назовем моментом отростка. Возможно равенство $w^{(n)}(i, x) = \tau^{(n)}(i, x)$. Точку $r^{(n)}(i, x) = q^{(n)}(w^{(n)}(i, x), i, x)$ назовем точкой отростка.

4. Пусть выполнено условие 1) леммы. Через $l_1^{(n)}$ обозначим корень минус на плюс функции $H_0^{(n)}(\cdot, m)$, $n = 1, 2$. Пусть $i^{(n)} \in \{1, 2\}$ таково, что $l_1^{(n)} \in \Gamma^{(n)}(i^{(n)}) \setminus \{e^{(n)*}(i^{(n)})\}$.

Если $i^{(2)} = i^{(1)}$, то на кривой $q^{(2)}(\cdot, i^{(2)}, m)$ существует точка отростка. Положим

$$p_1^{(2)}(\tau) = \begin{cases} q^{(2)}(\tau, i^{(2)}, m), & \tau \in [0, w^{(2)}(i^{(2)}, m)) \\ q^{(2)}(\tau - w^{(2)}(i^{(2)}, m), \bar{i}^{(2)}, r^{(2)}(i^{(2)}, m)), & \tau \in [w^{(2)}(i^{(2)}, m), \\ \tau^{(2)}(\bar{i}^{(2)}, r^{(2)}(i^{(2)}, m))] & \end{cases}$$

Если $i^{(2)} \neq i^{(1)}$, пусть $p_1^{(2)}(\tau) = q^{(2)}(\tau, i^{(2)}, m)$.

В силу специальных свойств точки m кривая $p_1^{(2)}$ не имеет самопересечений. Построив $p_1^{(2)}$, переходим к построению кривой $p_1^{(1)}(\tau) = q^{(1)}(\tau, i^{(1)}, m)$. Пусть $[0, \Theta_1^{(1)}]$, $[0, \Theta_1^{(2)}]$ — области определения кривых $p_1^{(1)}$, $p_1^{(2)}$. Двигаясь по $p_1^{(1)}$ от точки m, проверяем пересечение кривой $p_1^{(1)}(0, \Theta_1^{(1)}]$ с кривой $p_1^{(2)}$. Здесь и далее для функции f действительного переменного запись $f[a, b]$ ($f[a, b)$, $f(a, b]$) означает сужение f на отрезок $[a, b]$ (полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$). Если пересечение есть, пусть $\alpha_1^{(1)} \in (0, \Theta_1^{(1)}]$ — первый момент пересечения и $\alpha_1^{(2)} \in (0, \Theta_1^{(2)}]$ таково, что $p_1^{(2)}(\alpha_1^{(2)}) = p_1^{(1)}(\alpha_1^{(1)})$.

Определим $C(s)$ как замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $p_1^{(1)}[0, \alpha_1^{(1)}]$, $p_1^{(2)}[0, \alpha_1^{(2)}]$. Когда $p_1^{(1)}$ не касается $p_1^{(2)}$ в точке первого пересечения, то граница множества $C(s)$ — кусочно-гладкая полупроницаемая кривая. В случае касания граница не является полупроницаемой кривой и $C(s) \neq \mathrm{cl}\, B(s)$. Однако в этом случае выбранное $s \in S$ не принадлежит множеству S_1 точек непрерывности отображения $s \to \mathrm{cl}\, B(s)$. На фиг. 2 показан возможный вид множества $C(s)$. Кривые $p_1^{(1)}$, $p_1^{(2)}$ отмечены цифрами *1*, *2*. Дуги кривых, не принадлежащие $\partial C(s)$, отмечены штрихами.

Если кривая $p_1^{(1)}(0, \Theta_1^{(1)}]$ не пересекает кривую $p_1^{(2)}$, построения продолжаются. Находим точку отростка на $p_1^{(2)}$, понимая под этим при $i^{(1)} = i^{(2)}$ точку отростка на кривой $q^{(2)}(\cdot, \bar{i}^{(2)}, r^{(2)}(i^{(2)}, m))$, при $i^{(1)} \neq i^{(2)}$ точку отростка на кривой $q^{(2)}(\cdot, i^{(2)}, m)$. Когда $p_1^{(1)}(0, \Theta_1^{(1)}]$ не пересекает $p_1^{(2)}$, такая точка существует. Пусть $c_2^{(2)} = w^{(2)}(\bar{i}^{(2)}, r^{(2)}(i^{(2)}, m))$ при $i^{(1)} = i^{(2)}$ и $c_2^{(2)} = w^{(2)}(i^{(2)}, m)$ при $i^{(1)} \neq i^{(2)}$, $z_2^{(2)} = p_1^{(2)}(c_2^{(2)})$.

Положим

$$\theta_2^{(2)} = \tau^{(2)}(i^{(1)}, z_2^{(2)}), \qquad d_2^{(2)} = c_2^{(2)} + \theta_2^{(2)}$$

$$g_2^{(2)}(\tau) = \begin{cases} p_1^{(2)}(\tau), & \tau \in [0, c_2^{(2)}) \\ p_2^{(2)}(\tau - c_2^{(2)}), & \tau \in [c_2^{(2)}, d_2^{(2)}] \end{cases}$$

В случае $i^{(1)} \neq i^{(2)}$ переходим далее к разделу 1), в случае $i^{(1)} = i^{(2)}$ — к разделу 2).

1) Двигаясь по $p_2^{(2)}$ от $z_2^{(2)}$, проверяем пересечение $p_2^{(2)}$ с $p_1^{(1)}$. Если оно есть, пусть $k_2^{(2)} \in [0, \Theta_2^{(2)}]$ — первый момент пересечения, $\xi_2^{(2)} = k_2^{(2)} + c_2^{(2)}$, $\xi_2^{(1)} \in [0, \Theta_1^{(1)}]$ таково, что $p_1^{(1)}(\xi_2^{(1)}) = p_2^{(2)}(k_2^{(2)})$. Определим $C(s)$ как замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $p_1^{(1)}[0, \xi_2^{(1)}]$, $g_2^{(2)}[0, \xi_2^{(2)}]$.

Если пересечения $p_2^{(2)}$ с $p_1^{(1)}$ нет, то на $p_1^{(1)}$ существует точка отростка. Пусть $c_2^{(1)} = w^{(1)}(i^{(1)}, m)$, $z_2^{(1)} = p_1^{(1)}(c_2^{(1)})$. Построим кривую $p_2^{(1)}(\tau) = q^{(1)}(\tau, \bar{i}^{(1)}, z_2^{(1)})$. Положим

$$\Theta_2^{(1)} = \tau^{(1)}(\bar{i}^{(1)}, z_2^{(1)}), \qquad d_2^{(1)} = c_2^{(1)} + \Theta_2^{(1)}$$

$$g_2^{(1)}(\tau) = \begin{cases} p_1^{(1)}(\tau), & \tau \in [0, c_2^{(1)}) \\ p_2^{(1)}(\tau - c_2^{(1)}), & \tau \in [c_2^{(1)}, d_2^{(1)}] \end{cases}$$

Двигаясь по $p_2^{(1)}$ от $z_2^{(1)}$, проверяем пересечение $p_2^{(1)}$ с $g_2^{(2)}$. Если оно есть, пусть $a_2^{(1)} \in [0, \Theta_2^{(1)}]$ — первый момент пересечения, $\alpha_2^{(1)} = a_2^{(1)} + c_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)} \in [0, d_2^{(2)}]$ таково, что $g_2^{(2)}(\alpha_2^{(2)}) = p_2^{(1)}(a_2^{(1)})$. За $C(s)$ примем замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $g_2^{(1)}[0, \alpha_2^{(1)}]$, $g_2^{(2)}[0, \alpha_2^{(2)}]$.

Если пересечения $p_2^{(1)}$ с $g_2^{(2)}$ нет, то на $p_2^{(2)}$ существует точка отростка. Пусть $c_3^{(2)} = w^{(2)}(i^{(1)}, z_2^{(2)})$, $z_3^{(2)} = p_2^{(2)}(c_3^{(2)})$. Построим кривую $p_3^{(2)}(\tau) = q^{(2)}(\tau, \bar{i}^{(1)}, z_3^{(2)})$. Положим

$$\Theta_3^{(2)} = \tau^{(2)}(\bar{i}^{(1)}, z_3^{(2)}), \qquad d_3^{(2)} = c_2^{(2)} + c_3^{(2)} + \Theta_3^{(2)}$$

$$g_3^{(2)}(\tau) = \begin{cases} g_2^{(2)}(\tau), & \tau \in [0, c_2^{(2)} + c_3^{(2)}) \\ p_3^{(2)}(\tau - c_2^{(2)} - c_3^{(2)}), & \tau \in [c_2^{(2)} + c_3^{(2)}, d_3^{(2)}] \end{cases}$$

Переходим к разделу 2).

2) Пусть $\omega = 2$ при $i^{(1)} = i^{(2)}$ и $\omega = 3$ при $i^{(1)} \neq i^{(2)}$. Скажем, что на кривой $p_\omega^{(2)}$ зафиксирована раскрутка (кривой $g_\omega^{(2)}$), если существует такое $\tau^* \in [0, \Theta_\omega^{(2)}]$, что

$$\frac{dp_\omega^{(2)}}{d\tau}(\tau^*) = \frac{dp_1^{(2)}}{d\tau}(0)$$

$$H\left(\frac{dp_\omega^{(2)}}{d\tau}(\tau^*), \quad p_\omega^{(2)}(\tau^*)\right) < H\left(\frac{dp_\omega^{(2)}}{d\tau}(\tau^*), m\right)$$

2а) Предположим, что на $p_\omega^{(2)}$ раскрутка не зафиксирована. Определим рекуррентный способ дальнейших построений. Положим $g_1^{(1)} = p_1^{(1)}$, $d_1^{(1)} = \Theta_1^{(1)}$, $c_0^{(n)} = c_1^{(n)} = 0$ $(n = 1, 2)$. Пусть построены кривые $g_{r+1}^{(2)}$, $g_r^{(1)}$, $r + 1 \geqslant \omega$.

Обозначим

$$\lambda_k^{(n)} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} c_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \quad 0 \leqslant k \leqslant r$$

Двигаясь по $p_{r+1}^{(2)}$ от $z_{r+1}^{(2)}$, проверяем пересечение $p_{r+1}^{(2)}$ с $g_r^{(1)}[\lambda_{r-1}^{(1)}, \quad d_r^{(1)}]$. Для случая

(4.1) $$p_{r+1}^{(2)} \cap g_r^{(1)}[\lambda_{r-1}^{(1)}, \quad d_r^{(1)}] \neq \varnothing$$

т. е. когда пересечение существует, пусть $k_{r+1}^{(2)} \in [0, \ \Theta_{r+1}^{(2)}]$ — первый момент пересечения, $\lambda_{r+1}^{(2)} = \lambda_r^{(2)} + c_{r+1}^{(2)}$, $\xi_{r+1}^{(2)} = k_{r+1}^{(2)} + \lambda_{r+1}^{(2)}$, $\xi_{r+1}^{(1)} \in [\lambda_{r-1}^{(1)}, d_r^{(1)}]$ таково, что $g_r^{(1)}(\xi_{r+1}^{(1)}) = p_{r+1}^{(2)}(k_{r+1}^{(2)})$, G_{r+1}^{ξ} — замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $g_r^{(1)}[0, \ \xi_{r+1}^{(1)}]$, $g_{r+1}^{(2)}[0, \ \xi_{r+1}^{(2)}]$.

Кривая $p_r^{(1)}$ может не иметь точки отростка лишь при выполнении условия (4.1). Тогда полагаем

(4.2) $$C(s) = G_{r+1}^{\xi}$$

Если точка отростка на $p_r^{(1)}$ существует, примем $c_{r+1}^{(1)} = w^{(1)}(i_r, z_r^{(1)})$, $z_{r+1}^{(1)} = p_r^{(1)}(c_{r+1}^{(1)})$. Здесь и далее $i_k = i^{(1)}$ при нечетном k и $i_k = \bar{\imath}^{(1)}$ при четном. Множество $C(s)$ определим равенством (4.2), если имеет место (4.1) и $c_{r+1}^{(1)} \leqslant \xi_{r+1}^{(1)}$. Если условие (4.1) не выполнено, либо выполнено, но $c_{r+1}^{(1)} > \xi_{r+1}^{(1)}$, переходим к построению кривой $p_{r+1}^{(1)}(\tau) = q^{(1)}(\tau, \ i_{r+1}, z_{r+1}^{(1)})$. Положим

$$\lambda_{r+1}^{(1)} = \lambda_r^{(1)} + c_{r+1}^{(1)}, \quad \Theta_{r+1}^{(1)} = \tau^{(1)}(i_{r+1}, z_{r+1}^{(1)}), \quad d_{r+1}^{(1)} = \lambda_{r+1}^{(1)} + \Theta_{r+1}^{(1)}$$

$$g_{r+1}^{(1)}(\tau) = \begin{cases} g_r^{(1)}(\tau), & \tau \in [0, \lambda_{r+1}^{(1)}) \\ p_{r+1}^{(1)}(\tau - \lambda_{r+1}^{(1)}), & \tau \in [\lambda_{r+1}^{(1)}, \ d_{r+1}^{(1)}] \end{cases}$$

Двигаясь по $p_{r+1}^{(1)}$ от $z_{r+1}^{(1)}$, проверяем пересечение $p_{r+1}^{(1)}$ с $g_{r+1}^{(2)}[\lambda_r^{(2)}, d_{r+1}^{(2)}]$. Для случая

(4.3) $$p_{r+1}^{(1)} \cap g_{r+1}^{(2)}[\lambda_r^{(2)}, \quad d_{r+1}^{(2)}] \neq \varnothing$$

пусть $a_{r+1}^{(1)} \in [0, \ \Theta_{r+1}^{(1)}]$ — первый момент пересечения, $\alpha_{r+1}^{(1)} = a_{r+1}^{(1)} + \lambda_{r+1}^{(1)}$, $\alpha_{r+1}^{(2)} \in [\lambda_r^{(2)}, \ d_{r+1}^{(2)}]$ таково, что $g_{r+1}^{(2)}(\alpha_{r+1}^{(2)}) = p_{r+1}^{(1)}(a_{r+1}^{(1)})$, G_{r+1}^{α} — замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $g_{r+1}^{(1)}[0, \ \alpha_{r+1}^{(1)}]$, $g_{r+1}^{(2)}[0, \ \alpha_{r+1}^{(2)}]$.

Пусть условие (4.3) справедливо. Когда условие (4.1) не выполнено, либо выполнено, но $\alpha_{r+1}^{(2)} < \xi_{r+1}^{(2)}$, положим

(4.4) $$C(s) = G_{r+1}^{\alpha}$$

Пусть условие (4.1) имеет место и $\alpha_{r+1}^{(2)} \geqslant \xi_{r+1}^{(2)}$. Если точка отростка на $p_{r+1}^{(1)}$ существует, полагаем $c_{r+2}^{(1)} = w^{(1)}(i_{r+1}, \ z_{r+1}^{(1)})$, $z_{r+2}^{(1)} = p_{r+1}^{(1)}(c_{r+2}^{(1)})$ и строим кривую $p_{r+2}^{(1)}(\tau) = q^{(1)}(\tau, \ i_{r+2}, z_{r+2}^{(1)})$. Если существует точка отростка на $p_{r+2}^{(1)}$, полагаем $c_{r+3}^{(1)} = w^{(1)}(i_{r+2}, \ z_{r+2}^{(1)})$, $z_{r+3}^{(1)} = p_{r+2}^{(1)}(c_{r+3}^{(1)})$, строим кривую $p_{r+3}^{(1)}(\tau) = q^{(1)}(\tau, \ i_{r+3}, z_{r+3}^{(1)})$ и т. д. Могут быть две возможности. Либо при каком-то номере $h \geqslant r + 1$ кривая $p_h^{(1)}$ не имеет точки отростка, либо процесс последовательного построения кривых $p_{r+2}^{(1)}, p_{r+3}^{(1)}, \ldots$ бесконечен. В первом случае определим $C(s)$ равенством (4.2). Во втором случае бесконечная кривая

(4.5) $$g_{\infty}^{(1)}(\tau) = p_k^{(1)}(\tau - \lambda_k^{(1)}), \quad \tau \in [\lambda_k^{(1)}, \lambda_{k+1}^{(1)}), \ k = 1, 2, \ldots$$
$$\lambda_k^{(1)} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} c_j^{(1)}$$

представляет собой закручивающуюся спираль, наматывающуюся на свой предельный цикл. Открытое множество, ограниченное предельным циклом, обозначим $K^{(1)}$. Положим $C(s) = G_{r+1}^{\xi} \setminus K^{(1)}$.

Пусть условие (4.3) не выполнено. Если точка отростка на $p_{r+1}^{(2)}$ существует, примем $c_{r+2}^{(2)} = w^{(2)}(\bar{\imath}_{r+1}, z_{r+1}^{(2)})$, $z_{r+2}^{(2)} = p_{r+1}^{(2)}(c_{r+2}^{(2)})$. Пусть справедливо условие (4.1) и точки отростка на $p_{r+1}^{(2)}$ либо нет, либо она существует, но $c_{r+2}^{(2)} \geqslant k_{r+2}^{(2)}$. Тогда дальнейшие построения проводим аналогично тому, как описано выше при выполнении (4.1), (4.3) и неравенства $\alpha_{r+2}^{(2)} \geqslant \xi_{r+1}^{(2)}$, с тем отличием, что при построении кривой $p_{r+2}^{(1)}$ проверяем ее пересечение с кривой $g_{r+1}^{(2)}\ [\lambda_{r+1}^{(2)}, d_{r+1}^{(2)}] = p_{r+1}^{(2)}$ и, если оно есть, ограничиваем множество $C\ (s)$ кривой, составленной из дуг $g_{r+2}^{(1)}[0, \alpha_{r+2}^{(1)}]$, $g_{r+1}^{(2)}\ [0, \alpha_{r+2}^{(2)}]$. Здесь $\alpha_{r+2}^{(1)} = a_{r+2}^{(1)} + \lambda_{r+2}^{(1)}$, $a_{r+2}^{(1)} \in [0, \Theta_{r+2}^{(1)}]$ — первый момент пересечения, $\alpha_{r+2}^{(2)} \in [\lambda_{r+1}^{(2)}, d_{r+1}^{(2)}]$ таково, что $g_{r+1}^{(2)}\ (\alpha_{r+2}^{(2)}) = p_{r+2}^{(1)}\ (a_{r+2}^{(1)})$.

Когда условие (4.1) не выполнено, то существует точка отростка на $p_{r+1}^{(2)}$. Пусть условие (4.1) не выполнено, либо выполнено, но существует точка отростка на $p_{r+1}^{(2)}$, причем $c_{r+2}^{(2)} < k_{r+2}^{(2)}$. Построим кривую $p_{r+2}^{(2)}\ (\tau) = q^{(2)}\ (\tau,\ \bar{l}_{r+2},\ z_{r+2}^{(2)})$. Положим

$$\Theta_{r+2}^{(2)} = \tau^{(2)}\,(\bar{l}_{r+2},\ z_{r+2}^{(2)}),\qquad \lambda_{r+2}^{(2)} = \lambda_{r+1}^{(2)} + c_{r+2}^{(2)},\qquad d_{r+2}^{(2)} = \lambda_{r+2}^{(2)} + \Theta_{r+2}^{(2)}$$

$$g_{r+2}^{(2)}\,(\tau) = \begin{cases} g_{r+1}^{(2)}\,(\tau), & \tau \in [0,\ \lambda_{r+2}^{(2)}) \\ p_{r+2}^{(2)}\,(\tau - \lambda_{r+2}^{(2)}), & \tau \in [\lambda_{r+2}^{(2)},\ d_{r+2}^{(2)}] \end{cases}$$

Таким образом, в последнем случае получен переход от кривых $g_{r+1}^{(2)}$, $g_r^{(1)}$ к кривым $g_{r+2}^{(2)}$, $g_{r+1}^{(1)}$. При рекуррентном построении число таких переходов может быть лишь конечным.

2в) Пусть на $p_\omega^{(2)}$ зафиксирована раскрутка. В этом случае кривая $p_\omega^{(2)}$ имеет точку отростка, обозначим ее $z_{\omega+1}^{(2)}$. Кривая $p_{\omega+1}^{(2)}\ (\tau) = q^{(2)}\ (\tau,\ \bar{l}_{\omega+1},\ z_{\omega+1}^{(2)})$ также имеет точку отростка и т. д. Бесконечная кривая

$$g_\infty^{(2)}\ (\tau) = p_k^{(2)}\ (\tau - \lambda_k^{(2)}),\qquad \tau \in [\lambda_k^{(2)},\ \lambda_{k+1}^{(2)}),\qquad k = 1, 2, \ldots$$

(обозначения понятны из предыдущего изложения) представляет собой раскручивающуюся спираль. Если она имеет предельный цикл, пусть $K^{(2)}$ — замкнутое множество, им ограниченное. Когда предельного цикла нет, примем $K^{(2)} = R^2$.

Если не существует точки отростка на $p_{\omega-1}^{(1)}$, положим $C\ (s) = K^{(2)}$. Пусть точка отростка на $p_{\omega-1}^{(1)}$ существует. Построим кривую $p_\omega^{(1)}$. При $\omega = 3$ переходим далее к разделу 3). При $\omega = 2$ проверяем пересечение $p_2^{(1)}$ с $g_2^{(2)}\ (0,\ d_2^{(2)}]$. Когда оно существует, определим $C\ (s)$ равенством (4.4), положив в нем $r + 1 = 2$. Пусть пересечения нет. Если не существует точки отростка на $p_2^{(1)}$, положим $C\ (s) = K^{(2)}$. Когда точка отростка существует, построим кривую $p_3^{(1)}$ и переходим к разделу 3).

3) Скажем, что на кривой $p_3^{(1)}$ зафиксирована раскрутка (кривой $g_3^{(1)}$), если существует такое $\tau^* \in [0,\ \Theta_3^{(1)}]$, что

$$\frac{dp_3^{(1)}}{d\tau}(\tau^*) = \frac{dp_1^{(1)}}{d\tau}(0),\qquad H\left(\frac{dp_3^{(1)}}{d\tau}(\tau^*), p_3^{(1)}(\tau^*)\right) \leqslant H\left(\frac{dp_3^{(1)}}{d\tau}(\tau^*), m\right)$$

3а) Пусть на $p_3^{(1)}$ раскрутка не зафиксирована. Проверяем пересечение $p_3^{(1)}$ с $g_3^{(2)}\ [\lambda_2^{(2)},\ d_3^{(2)}]$. Когда оно существует, определим $C\ (s)$ равенством (4.4), положив в нем $r + 1 = 3$. Пусть пересечения нет. Переходим к построению кривой $p_4^{(1)}$, затем $p_5^{(1)}$ и т. д. Примем $C\ (s) = K^{(2)}$, если процесс последовательного построения кривых $p_3^{(1)}$, $p_4^{(1)}$, $p_5^{(1)}$, . . . обрывается на конечном номере. Если он бесконечен, то кривая $g_\infty^{(1)}$, введенная формулой (4.5), — закручивающаяся спираль, наматывающаяся на свой предельный цикл. Положим $C\ (s) = K^{(2)} \setminus K^{(1)}$ ($K^{(1)}$ — открытое множество, ограниченное предельным циклом кривой $g_\infty^{(1)}$).

3в) Предположим, что на $p_3^{(1)}$ зафиксирована раскрутка. Тогда кривая $p_3^{(1)}$ имеет точку отростка, кривая $p_4^{(1)}$ также имеет точку отростка и т. д. Определим рекуррентный способ построения кривых. Пусть построены кривые $g_{r+1}^{(2)}$, $g_{r+1}^{(1)}$, $r + 1 \geqslant 3$. Двигаясь по $p_{r+1}^{(1)}$ от $z_{r+1}^{(1)}$, проверяем пересечение $p_{r+1}^{(1)}$ с $g_{r+1}^{(2)}\,[\lambda_r^{(2)}, d_{r+1}^{(2)}]$ (α-пересечение) и пересечение $p_{r+1}^{(1)}$ с $g_{r+1}^{(2)}\,[\lambda_{r-2}^{(2)}, \lambda_r^{(2)})$ (β-пересечение). Если β-пересечение существует, пусть $b_{r+1}^{(1)} \in [0, \Theta_{r+1}^{(1)}]$ — первый момент β-пересечения, $\beta_{r+1}^{(1)} = b_{r+1}^{(1)} + \lambda_{r+1}^{(1)}$, $\beta_{r+1}^{(2)} \in [\lambda_{r-2}^{(2)}, \lambda_r^{(2)})$ таково, что $g_{r+1}^{(2)}\,(\beta_{r+1}^{(2)}) = p_{r+1}^{(1)}\,(b_{r+1}^{(1)})$, G_{r+1}^{β} — открытое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг $g_{r+1}^{(1)}\,[0, \beta_{r+1}^{(1)}]$, $g_{r+1}^{(2)}\,[0, \beta_{r+1}^{(2)}]$.

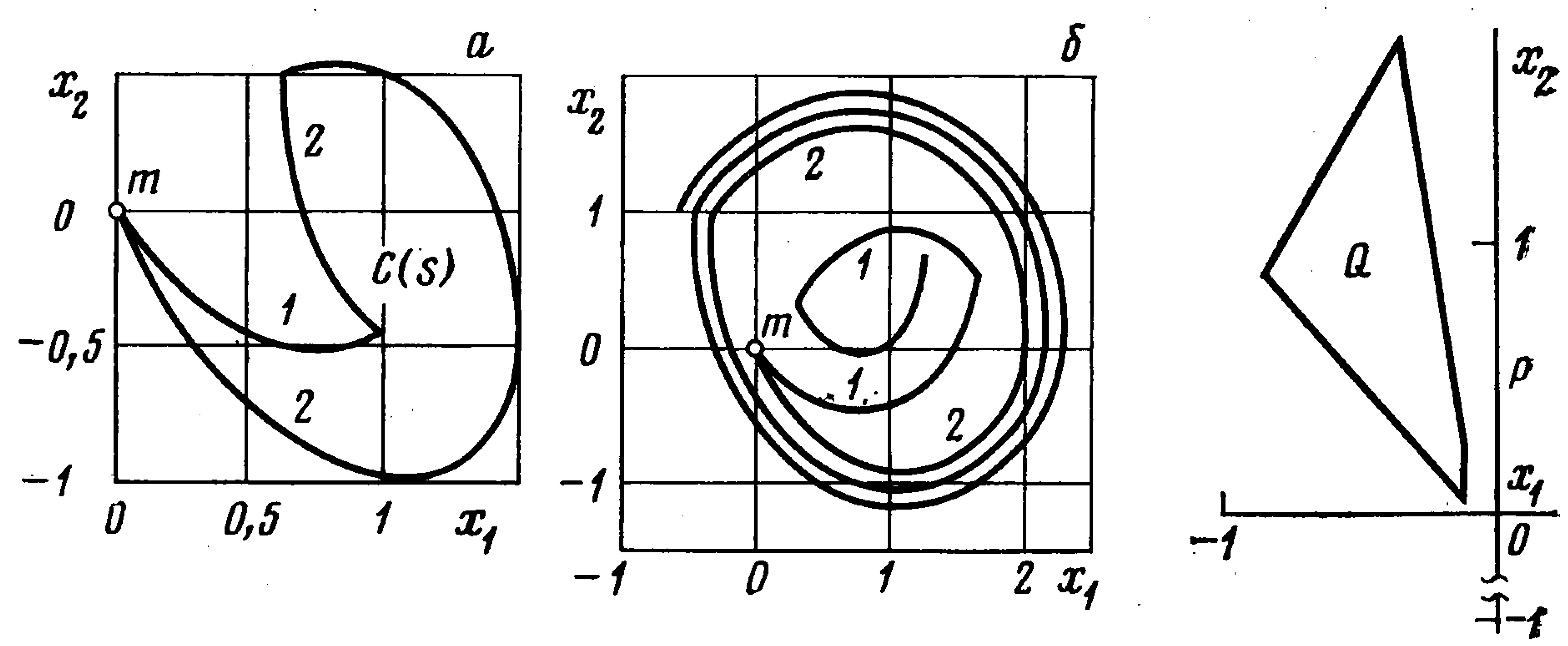
Пусть имеет место α-пересечение, а β-пересечение не существует, либо существуют оба типа пересечения, но $\alpha_{r+1}^{(1)} \leqslant \beta_{r+1}^{(1)}$. Тогда положим $C\,(s) = G_{r+1}^{\alpha}$ (момент $\alpha_{r+1}^{(1)}$ и множество G_{r+1}^{α} введены в тексте ниже формулы (4.3)).

Пусть имеет место β-пересечение, а α-пересечение не существует, либо существуют оба типа пересечения, но $\alpha_{r+1}^{(1)} > \beta_{r+1}^{(1)}$. Положим $C\,(s) = K^{(2)} \setminus G_{r+1}^{\beta}$.

Если нет ни α-, ни β-пересечения, то считаем построенными кривые $g_{r+2}^{(2)}$, $g_{r+2}^{(1)}$.

Если при любом $k \geqslant 3$ кривая $p_k^{(1)}$ не имеет ни α-, ни β-пересечения, определим $C\,(s)$ как замкнутое множество, заключенное между кривыми $g_\infty^{(1)}$, $g_\infty^{(2)}$. Кривые $g_\infty^{(1)}$, $g_\infty^{(2)}$ не имеют в этом случае предельных циклов.

На фиг. 2, 3 представлены результаты счета трех примеров на ЭВМ. В первом примере (фиг. 2) $m = (0{,}1;\ -0{,}1)$, во втором (фиг. 3, *а*) и третьем (фиг. 3, *б*) $m = (0;\ 0)$. Во всех примерах P — отрезок на оси x_2 длины 2, симметричный относительно нуля. Вершины многоугольника Q: $\{(-0{,}84; -0{,}80), (-0{,}08;\ 0{,}31), (-0{,}08; 0{,}00)\}$ — в первом примере, $\{(-0{,}84;\ 0{,}90), (-0{,}36;\ 1{,}75), (-0{,}10;\ 0{,}25), (-0{,}10;\ 0{,}06)\}$ — во втором и третьем. Матрица A имеет вид



Фиг. 3

$$\left\| \begin{matrix} 0{,}1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0{,}465 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0{,}05 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

В первом примере множество $C\,(s)$ ограничено кривыми $p_1^{(1)}\,[0, \alpha_1^{(1)}]$, $p_1^{(2)}\,[0, \alpha_1^{(2)}]$ (отмечены на фиг. 2, цифрами *1*, *2*), во втором — кривыми $p_1^{(1)}\,[0, \xi_2^{(1)}]$, $g_2^{(2)}\,[0, \xi_2^{(2)}]$ (отмечены на фиг. 3, *а* цифрами *1*, *2*). В третьем примере $C\,(s)$ ограничено предельным циклом кривой $g_\infty^{(2)}$, отмеченной на фиг. 3, *б* цифрой *2*; цифрой 1 отмечена кривая $g_3^{(1)}$. Кривая $p_3^{(1)}$ в третьем примере не имеет отростка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Богуславская Э. И.* Линейные дифференциальные игры на плоскости. Случай комплексных корней.— Кибернетика, 1976, № 1, с. 64—70.
4. *Пацко В. С.* Дифференциальная игра уклонения на плоскости.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 604—608.
5. *Пацко В. С.* Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка.— В кн.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск, 1975 (УНЦ АН СССР. Ин-т матем. и мех. Тр. вып. 15), с. 167—227.
6. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 424 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
19.III.1981