

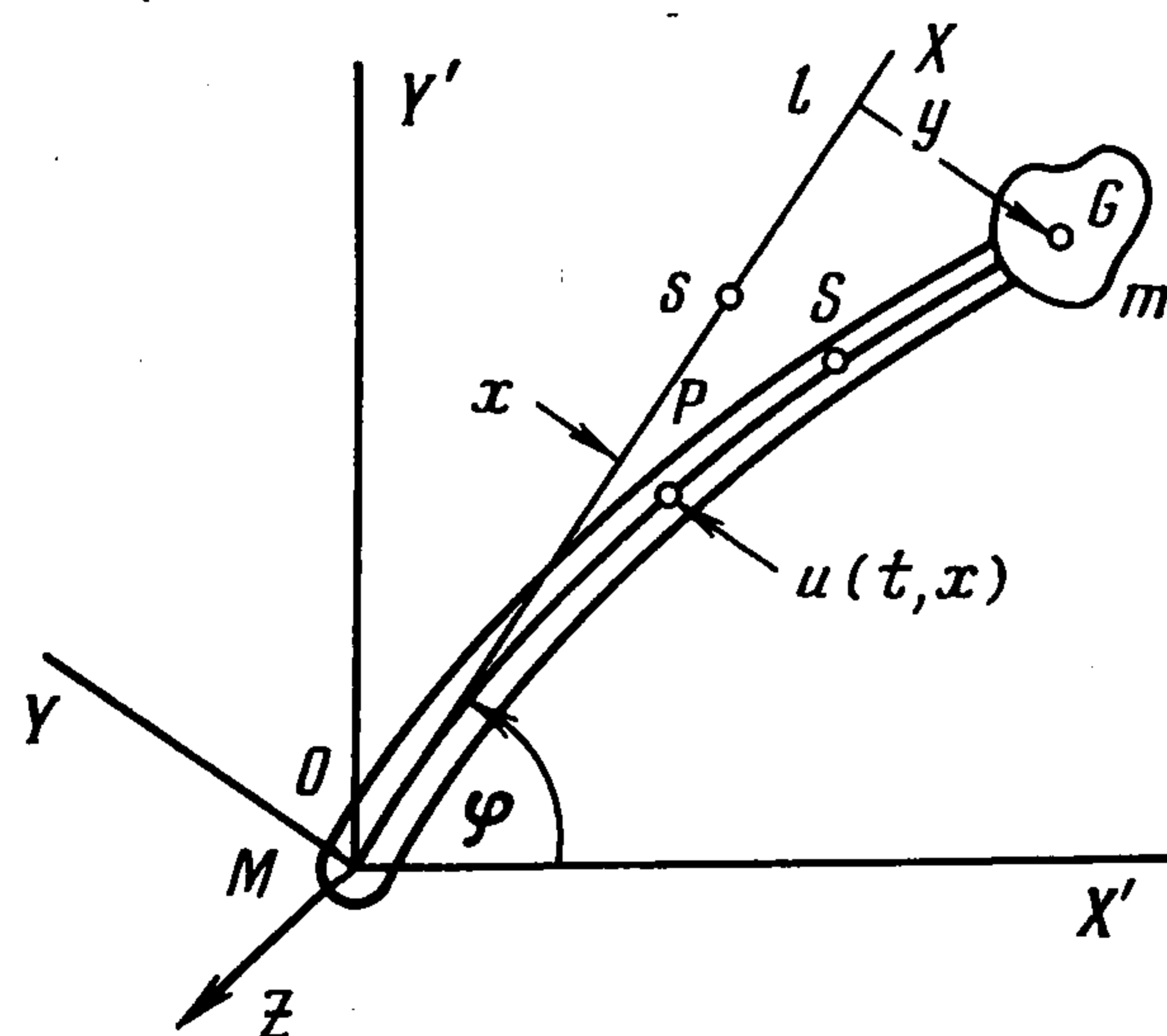
УДК 531.011 + 62—50

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ВРАЩЕНИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.

Рассматриваются плоские вращательные движения упругого стержня, нагруженного абсолютно твердым телом, под действием управляющего момента сил. Получена система интегродифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями. Исследуются задачи управления о приведении системы из некоторого начального состояния в заданное угловое положение с гашением упругих колебаний или в состояние вращения системы как целого с фиксированной угловой скоростью. Эти постановки возникают при рассмотрении ряда прикладных задач управления системами с упругими связями, такими, как роботы и манипуляторы, грузоподъемные машины и др. При помощи асимптотических методов получено решение поставленных задач управления, близких к двум предельным случаям: 1) невесомого стержня (квазистатическое приближение) и 2) большой изгибной жесткости. Задачи динамики и управления колебательными системами с распределенными параметрами в различных постановках исследовались в ряде работ [1—11] и др.

1. Уравнения управляемого движения упругого стержня. Рассматривается механическая система, представляющая собой упругий стержень переменного сечения, который может совершать вращательные движения в некоторой плоскости (фиг. 1). Один конец стержня (точка O) неподвижен в инерциальном пространстве $OX'Y'Z$; на другом конце расположено абсолютно твердое тело G , линейные размеры которого предполагаются малыми по сравнению с длиной стержня. Через точку O перпендикулярно плоскости движения проходит ось вращения OZ , относительно которой приложен момент управляющих сил. Для описания движения введем вращающуюся в инерциальном пространстве вместе со стержнем систему координат $OXYZ$ с общей осью OZ . Ось OX зададим по направлению касательной к нейтральной линии стержня в точке O . Предполагается, что движение модели описывается в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [1, 2, 9]. Упругие смещения предполагаются малыми и перпендикулярными прямой OX , совпадающей с нейтральной линией недеформированного стержня.



Фиг. 1

Введем следующие обозначения (некоторые из них представлены на фиг. 1): x, s — абсциссы двух точек P и S соответственно в подвижной системе OXY , $0 \leq x \leq s \leq l$, l — постоянная длина стержня, $\rho(x)$ — линейная плотность, $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\rho_{1,2} > 0$, E — модуль Юнга, $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба, $I_1 \leq I \leq I_2$, $I_{1,2} > 0$ [2], m — масса тела G , находящегося на конце стержня (в точке $x = l$), M — сосредоточенный момент управляющих сил относительно оси вращения OZ , φ — угол между

касательной OX к упругой оси стержня в точке O и осью OX' , $u(t, x)$ — величина смещения точки упругой оси стержня с координатой x в момент времени t . В зависимости от постановки задачи управления переменные M, φ — заданные или искомые функции t , $u(t, x)$ — искомая функция.

Выведем уравнения движения рассматриваемой механической системы. Обозначим через \mathbf{x} радиус-вектор точки, лежащей на оси OX и имеющей абсциссу x , $\mathbf{u}(t, x)$ — вектор смещения точки x нейтральной линии стержня, $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$ — соответственно угловая скорость и ускорение вращения системы координат $OXYZ$ относительно инерциальной системы отсчета $OX'Y'Z$. В системе $OXYZ$ для введенных векторов имеем следующие координатные представления:

$$(1.1) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Точкой обозначается дифференцирование по времени t .

Пусть P — произвольная точка стержня; тогда $\mathbf{r}(t, x) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(t, x)$ — радиус-вектор этой точки в момент времени t . Вычислим полные (относительно $OX'Y'Z$) скорость $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и ускорение $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}}$ согласно известным правилам кинематики [1]:

$$(1.2) \quad \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{u}_t \\ \mathbf{w}(t, x) = \mathbf{u}_{tt} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_t - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{tt} = \mathbf{u}_{tt}$$

Индексом t обозначается частная производная по времени t , вычисленная во вращающейся системе координат $OXYZ$.

Для вывода уравнения относительного движения точек стержня возьмем на его нейтральной линии произвольную точку P с координатой x , радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}(t, x) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(t, x)$, см. (1.1). Ортогональным сечением разобьем стержень на две подсистемы: OP и PG . Вычислим главный момент \mathbf{N} сил инерции Даламбера, действующих на элементы подсистемы PG , относительно точки P . Интегрируя по всем элементам стержня для $x \leq s \leq l$, получим

$$(1.3) \quad \mathbf{N}(t, x) = - \int_x^l \rho(s) [\mathbf{r}(t, s) - \mathbf{r}(t, x)] \times \mathbf{w}(t, s) ds - \\ - m [\mathbf{r}(t, l) - \mathbf{r}(t, x)] \times \mathbf{w}(t, l)$$

Согласно (1.1) — (1.3), вектор \mathbf{N} имеет ненулевую проекцию только на ось OZ . В линейном по u, u_t приближении получим

$$(1.4) \quad N(t, x) = - \int_x^l \rho(s) \{ (s-x) u_{tt}(t, s) + \ddot{\varphi} (s-x) s ds - \\ - \dot{\varphi}^2 [u(t, x) s - u(t, s) x] \} ds - \\ - m \{ (l-x) u_{tt}(t, l) + \ddot{\varphi} (l-x) l + \dot{\varphi}^2 [xu(t, l) - lu(t, x)] \}$$

Приравняем теперь главный момент сил инерции Даламбера N (1.4) моменту «внешних» упругих сил, действующих в сечении P на подсистему PG со стороны подсистемы OP , взятому с противоположным знаком. Момент упругих сил согласно принятой теории слабого изгиба тонких стержней равен $-EIu_{xx}$ (см. [2], индексом x обозначается соответствующая частная производная). В результате имеем интегродифференциальное равенство для всех t и $0 \leq x \leq l$

$$(1.5) \quad N(t, x) = EI(x)u_{xx}(t, x)$$

Дифференцируя тождество (1.5) дважды по x , что предполагается допустимым, получим искомое дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые упругие отклонения стержня $u(t, x)$ относительно подвижной системы координат $OXYZ$ в виде

$$(1.6) \quad \rho(x) u_{tt} + E [I(x) u_{xx}]_{xx} = \varphi'^2 u_{xx} \int_x^l \rho(s) s ds - \\ - \varphi'' \rho(x) x - \varphi'^2 (u_{xx} - u) \rho(x) + ml \varphi'^2 u_{xx}$$

Кроме того, функция $u(t, x)$ должна удовлетворять в каждый момент времени краевым условиям при $x = 0$ и $x = l$

$$(1.7) \quad u(t, 0) = u_x(t, 0) = u_{xx}(t, l) = 0 \\ E [I(x) u_{xx}(t, x)]_x |_{x=l} = m \{u_{tt}(t, l) + \varphi'' l + \varphi'^2 [lu_x(t, l) - \\ - u(t, l)]\}$$

Первые два условия (для $x = 0$) очевидны: они следуют из свойств введенной системы $OXYZ$ и имеют геометрический характер. Третье и четвертое условия (для $x = l$) динамические; они следуют непосредственно из (1.4), (1.5) и производной (1.5) по x . В случае, когда линейные размеры массы G существенны (сравнимы с длиной стержня l), приведенные выше выкладки становятся более громоздкими, а выражения типа (1.3) — (1.7) несколько усложняются. Существо же рассматриваемой задачи остается прежним.

Чтобы доопределить уравнения движения упругой системы при заданном внешнем моменте сил $M(t)$, необходимо к уравнению (1.6) и краевым условиям (1.7) добавить уравнение изменения момента количества движения всей системы относительно оси OZ и соответствующие начальные условия. Аналогично изложенному выше получим соотношение

$$(1.8) \quad \int_0^l \rho(x) [\varphi'' x^2 + x u_{tt}(t, x)] dx + ml [l \varphi'' + u_{tt}(t, l)] = M(t)$$

Левая часть интегродифференциального уравнения (1.8) представляет собой полную производную по времени t момента количества движения системы относительно оси вращения OZ (в линейном приближении по u, u_t). Момент количества движения вычисляется на основе (1.1), (1.2) аналогично (1.4).

Для однозначного определения движения системы зададим начальную конфигурацию и скорость точек нейтральной линии стержня, а также начальные значения φ и φ'

$$(1.9) \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l \\ (f(0) = f'(0) = 0), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_0'$$

Таким образом, получена система интегродифференциальных уравнений в частных производных (1.6), (1.8), которая с учетом краевых (1.7) и начальных (1.9) условий при заданном внешнем моменте $M(t)$ управляющих сил однозначно определяет движение рассматриваемой механической модели в линейном приближении по упругому отклонению. Отметим, что величина u предполагается малой (линейная теория). Величины φ'' , φ' , M в некоторых задачах динамики и управления могут быть достаточно большими (порядка единицы). Поэтому рассматриваемая управляемая система в общем случае является существенно нелинейной.

Далее для системы (1.6) — (1.9) ставится следующая задача поворота нагруженного упругого стержня с гашением относительных колебаний.

Требуется найти допустимое управление $M \in K$, такое, чтобы выполнялись равенства для всех $0 \leq x \leq l$

$$(1.10) \quad u(T, x) = u_t(T, x) \equiv 0, \quad \varphi(T) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}(T) = 0$$

Здесь K — заданное фиксированное множество допустимых значений управления, T — момент времени, определяемый в процессе решения задачи (1.6) — (1.10) из некоторых дополнительных требований (оптимальности или др.). Отметим, что величина T должна быть достаточно большой, что связано с конечной скоростью распространения волновых процессов в упругом стержне [5]. Кроме того, момент окончания процесса управления T должен быть большим вследствие предположения малости управляющего момента M для стержня конечной жесткости, что обуславливается требованиями линейной теории упругости. Так как значение T при этом может быть большим, то решение задачи управления необходимо проводить на основе строгой оценки учитываемых и отбрасываемых членов.

Из соотношений (1.6) — (1.8) следует, что система будет оставаться в состоянии покоя (1.10) для $t > T$, если затем положить $M \equiv 0$ или если «защемить» стержень в угловом положении φ_* .

Аналогично ставится задача о приведении системы в состояние равномерного вращения как целого с заданной скоростью $\dot{\varphi}_*$ и гашением относительных колебаний

$$(1.11) \quad u(T, x) = u_t(T, x) \equiv 0, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}_*$$

Очевидно, система (1.6) — (1.8) допускает решение вида (1.11).

2. Приближенное исследование задач управления. Для заданной функции $M(t)$ аналитическое решение смешанной краевой задачи и задачи Коши (1.6) — (1.9) построить не удастся, так как переменные не разделяются даже в случае постоянных параметров ρ, I . Заметим, что задачу о движении нагруженного стержня можно исследовать обратным способом. Сперва для заданной функции $\gamma(t) = \varphi''(t)$ строится решение краевой задачи (1.6), (1.7), (1.9) $u(t, x)$, а затем по формуле (1.8) вычисляется требуемая для указанного движения величина управляющего момента сил $M(t)$, $t \in [0, T]$. При таком подходе функция $\gamma(t)$ рассматривается как управление, выбираемое из целей движения (1.10) или (1.11).

Управляемая система (1.6) — (1.11) может быть исследована приближенно при выполнении некоторых дополнительных предположений. Анализ и решение задачи удобнее проводить в безразмерных переменных, характеризующих отношения некоторых размерных физических величин. Эти безразмерные переменные можно ввести различными способами. Рассмотрим два из них.

1°. Введем новые безразмерные переменные следующим образом:

$$(2.1) \quad t' = \nu t, \quad u' = u / l, \quad x' = x / l, \quad I' = I / I_0, \quad \rho' = \rho / \rho_0$$

Здесь ν — характерная постоянная размерности частоты, I_0, ρ_0 — характерные параметры задачи, имеющие размерность момента инерции и линейной плотности соответственно. В качестве I_0, ρ_0 можно, например, взять средние от I, ρ на интервале $0 \leq x \leq l$. Величины I' и ρ' в (2.1) имеют порядок единицы в силу п. 1. Выбор параметра ν зависит от специфики задачи.

Выберем в качестве ν величину $\nu = (EI_0 / ml^3)^{1/2}$, характеризующую частоту квазистатических колебаний системы. Тогда в новых переменных

(2.1) движение описывается уравнениями с краевыми, начальными и конечными условиями (1.6) — (1.11), где следует положить

$$(2.2) \quad \begin{aligned} l &\rightarrow 1, \quad m \rightarrow 1, \quad f \rightarrow f' = f/l, \quad g = g' = g/lv \\ \varphi^{\cdot} &\rightarrow \varphi^{\cdot\cdot} = \varphi^{\cdot}/v, \quad M \rightarrow M' = M/ml^2v^2, \quad \rho \rightarrow \varepsilon\rho' \\ \varepsilon &= \rho_0 l/m \end{aligned}$$

В дальнейшем штрихи опускаются для удобства записи. Представление (2.2) удобно для исследования задачи управления в так называемом квазистатическом приближении, когда масса стержня много меньше массы тела G . В этом случае задача имеет малый параметр $\varepsilon \ll 1$.

Отметим, что предельный случай $\varepsilon = 0$ (невесомый стержень) также является весьма содержательным. Он был предметом ряда исследований теоретического и прикладного характера [1, 3, 9]. Большой интерес здесь представляет вращение с большими угловыми скоростями ($\varphi^{\cdot} > v$), приводящее к значительному увеличению эффективной жесткости упругого стержня («упрочнению» стержня на изгиб [3]).

Итак, рассмотрим задачу управления в квазистатическом приближении, при котором учитывается лишь движение массы G , а невесомый стержень в любой момент времени $t > 0$ находится в квазистатическом равновесии. Полагая $\varepsilon = 0$, получим уравнения и краевые условия

$$(2.3) \quad [I(x)u_{xx}]_{xx} = \varphi^{\cdot 2}u_{xx}, \quad \varphi^{\cdot\cdot} + u_{tt}(t, 1) = M(t)$$

$$(2.4) \quad u(t, 0) = u_x(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0$$

$$[I(x)u_{xx}]_{x=1} = u_{tt}(t, 1) + \varphi^{\cdot\cdot} + \varphi^{\cdot 2}[u_x(t, 1) - u(t, 1)]$$

Условия в начале и конце процесса управления для задачи поворота и вращения соответственно примут вид

$$(2.5) \quad u(0, 1) = f(1), \quad u_t(0, 1) = g(1), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi^{\cdot}(0) = \varphi_0^{\cdot}$$

$$u(T, 1) = u_t(T, 1) = 0$$

$$(2.6) \quad \varphi(T) = \varphi_*, \quad \varphi^{\cdot}(T) = 0$$

$$(2.7) \quad \varphi^{\cdot}(T) = \varphi_*^{\cdot}$$

Отметим, что начальное распределение точек невесомого стержня ($0 < x < 1$) и их скоростей несущественно для дальнейшего движения тела G .

Переходим к решению задачи управления (2.3) — (2.7). Интегрирование первого уравнения (2.3) с учетом краевых условий (2.4) и второго соотношения (2.3) дает краевую задачу вида (y — отклонение массы G от оси OX)

$$(2.8) \quad I(x)u_{xx} = \varphi^{\cdot 2}u + x(M - \varphi^{\cdot 2}y) - M$$

$$y(t) \equiv u(t, 1), \quad u(t, 0) = u_x(t, 0) \equiv 0$$

Пусть $W(\omega, x, s)$ — функция Грина для уравнения $z'' = \omega^2 I^{-1}z$, где ω — параметр. Тогда искомая функция

$$(2.9) \quad u(t, x) = \int_0^x W(\varphi^{\cdot}, x, s) [(M - \varphi^{\cdot 2}y)s - M] \frac{ds}{I(s)}$$

Отметим, что функция W может быть построена на основе частного решения однородного уравнения (2.8). Для построения численного решения задачи (2.8) удобно свести ее к интегральному уравнению Вольтерра вто-

рого рода (t — параметр)

$$(2.10) \quad u(t, x) = \varphi'^2 \int_0^x \frac{x-s}{I(s)} u(t, s) ds + \int_0^x \frac{x-s}{I(s)} [(M - \varphi'^2 y) s - M] ds$$

Известный метод последовательных приближений весьма эффективен при удачном выборе начального приближения. В практически важном частном случае $I = I_0 = \text{const}$ имеем

$$W(\varphi', x, s) = (\sqrt{I_0}/\varphi') \text{sh}[(\varphi'/\sqrt{I_0})(x-s)]$$

Поэтому для функций $I(x)$, близких к постоянной, начальное приближение можно взять в виде (2.9), для которого функция W приведена выше. Далее, если справедлива аппроксимация $I(x) \simeq I_0(1 - \beta x)^2$, где $1 - \beta > 0$, $\beta = \text{const}$, то уравнение (2.8) типа Эйлера заменой независимой переменной $x: 1 - \beta x = e^{\xi}$ сводится к линейному с постоянными коэффициентами, для которого функция Грина строится аналогично.

Считая условия движения, такими, что величина φ'^2 мала, получим приближенное выражение для функции Грина $W \simeq (x-s)/I(s)$, которое может быть использовано в рекуррентной схеме метода последовательных приближений.

Подставляя известную функцию $u(t, x)$, вычисленную на основе (2.9) или (2.10), в правую часть (2.8), получим согласно (1.5) выражение для момента упругих сил.

Найдем упругое отклонение $y(t)$ тела G из уравнения (2.9) при $x = 1$

$$(2.11) \quad y(t) = -M(t)\Omega^{-2}(\varphi'), \quad \Omega^2 = b(\varphi')/a(\varphi'), \quad a > 0, \quad b \geq 1$$

$$a(\varphi') \equiv \int_0^1 W(\varphi', 1, x) \frac{1-x}{I(x)} dx,$$

$$b(\varphi') \equiv 1 + \varphi'^2 \int_0^1 W(\varphi', 1, x) \frac{x}{I(x)} dx$$

Из (2.11) следует, что отклонение $y = 0$, если $M = 0$.

Проинтегрируем по t второе уравнение (2.3) с учетом (2.5)

$$(2.12) \quad \varphi' + y' - \varphi_0' - g(1) = \int_0^t M(\tau) d\tau$$

$$\varphi + y - [\varphi_0' + g(1)]t - \varphi_0 - f(1) = \int_0^t (t-\tau) M(\tau) d\tau$$

Из полученных соотношений (2.11), (2.12) следуют решения задач управления (2.3) — (2.7) квазистатического приближения. Так, для задачи вращения упругой системы как целого с конечным условием (2.7) дважды дифференцируемая по t функция $M \in K$, такая, что

$$(2.13) \quad M(0) = -f(1)\Omega^2(\varphi_0'), \quad M(T) = 0$$

$$M'(0) = -g(1)\Omega^2(\varphi_0') - f(1)\Omega^{2'}(\varphi_0')\varphi''(0), \quad M'(T) = 0$$

выбирается из условия

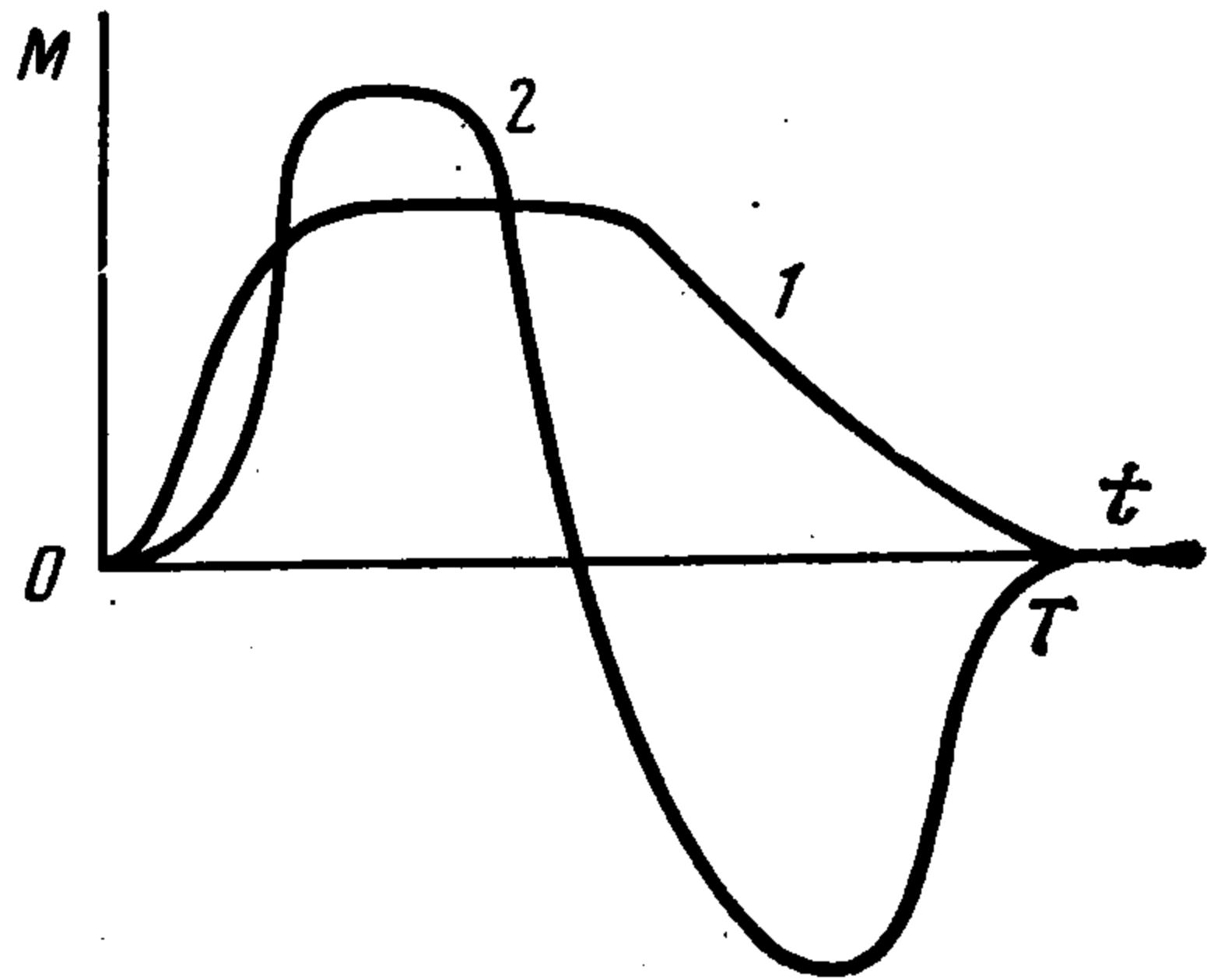
$$(2.14) \quad \varphi_*' - \varphi_0' - g(1) = \int_0^T M(t) dt$$

Аналогично для задачи поворота в заданное угловое положение с конечными условиями (2.6) помимо (2.13) должны выполняться соотношения

$$(2.15) \quad -\varphi_0' - g(1) = \int_0^T M(t) dt, \quad \varphi_* - [\varphi_0' + g(1)]T - \varphi_0 - f(1) = \\ = \int_0^T (T-t) M(t) dt$$

Отметим, что начальные условия специфического вида (2.13), налагаемые на управляющую функцию $M(t)$, обусловлены вырождением задачи при $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим практически важный частный случай нулевых начальных условий для упругих отклонений и скоростей: $f(x) = g(x) \equiv 0$ (см. (1.9), (2.5)). Тогда, как следует из (2.9), (2.11), (2.13), должны выполняться равенства $M(0) = M'(0) = 0$. Типичный вид управляющих функций $M(t) \in K$ представлен на фиг. 2 для условий (2.14) (кривая 1) и (2.15) (кривая 2).



Фиг. 2

Заметим, что при исследовании управляемого вращательного движения стержня с грузом в квазистатическом приближении нулевые начальные условия для упругих отклонений представляются наиболее естественными. Это упрощение задачи вызвано тем, что стержень малой массы при наличии диссипации, которая всегда имеет место в реальных условиях, за весьма короткий промежуток времени (по сравнению с периодом квазистатических колебаний $2\pi/\Omega$) приходит в состояние равновесия, если на начальном участке положить $M \equiv 0$.

Рассмотрим относительное движение тела G в случае, когда вращение касательной OX задается кинематически, т. е. φ'' — задаваемая функция $\gamma(t)$, а γ считается управлением. Тогда отклонение $y(t)$ согласно (2.3), (2.11) определяется уравнениями

$$(2.16) \quad y'' + \Omega^2(\varphi')y = -\gamma(t), \quad y(0) = f(1), \quad y'(0) = g(1)$$

$$\varphi'(t) = \varphi_0' + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_0' t + \int_0^t (t-\tau) \gamma(\tau) d\tau$$

Величина Ω^2 в (2.16) характеризует частоту колебаний массы G . В частности, при $\gamma \equiv 0$, $\Omega = \text{const}$ имеем уравнение линейного осциллятора. Для заземленного стержня ($\varphi' \equiv 0$) значение $\Omega(0)$ дает частоту квазистатических колебаний консоли с массой m на конце. В частном случае однородного стержня функции $\Omega^2(\varphi')$ равна [3]

$$\Omega^2(\varphi') = \frac{\alpha^2 \text{sh } \alpha}{3(\alpha \text{ch } \alpha - \text{sh } \alpha)} \Omega^2(0), \quad \alpha = |\varphi'| I_0^{-1/2}, \quad \Omega^2(0) = 3I_0$$

Отметим, что коэффициент при $\Omega^2(0)$ для значений $\alpha \sim 1$ весьма близок к единице: $1 + \alpha^2/15 + \dots$. Таким образом, эффект упрочнения становится существенным при больших скоростях φ' : для $\alpha^2 \sim 10$.

Решение задачи управления движением, в том числе оптимального по некоторому критерию, для существенно нелинейной системы (2.16) представляет значительные трудности. В случае, когда можно считать $\Omega^2 \approx \Omega^2(0)$, получается задача управления, эквивалентная задаче перемещения или разгона осциллятора [4, 10].

После того как функции $\gamma(t)$ и $y(t)$ найдены, подстановка их во второе уравнение (2.3) определяет величину управляющего момента $M(t)$, тре-

буемую для реализации указанного движения. Решение задачи управления при $\varepsilon \neq 0$ можно получить с заданной степенью точности по ε при помощи методов теории возмущений. При этом следует предполагать достаточно высокую гладкость управляющей функции $M(t)$, $t \in [0, T]$.

2°. Рассмотрим теперь задачи управления (1.6) — (1.11) в другом предельном случае, когда жесткость стержня весьма велика, а амплитуда и период собственных колебаний, естественно, малы. В этом случае, переходя к безразмерным переменным по формулам (2.1), удобно взять $\nu = (M_0 / J)^{1/2}$, где M_0 — характерная величина размерности момента силы, например $M_0 = \sup_t |M(t)|$, J — характерная величина размерности момента инерции системы, например момент инерции стержня с массой G . Тогда величина ν^2 характеризует угловое ускорение вращения системы как целого. В новых переменных уравнения движения (1.6), (1.8) примут вид (штрихи опущены)

$$(2.17) \quad \mu \kappa \rho(x) u_{tt} + [I(x) u_{xx}]_{xx} = \mu \kappa \varphi^{*2} \left[u_{xx} \int_x^1 \rho(s) s ds - \right. \\ \left. - \rho(x) x u_x + \rho(x) u \right] + \mu \chi u_{xx} - \mu \kappa \rho(x) x \varphi^{*2}$$

$$(2.18) \quad \varphi^{*2} + \kappa \int_0^1 \rho(x) x u_{tt}(t, x) dx + \chi u_{tt}(t, 1) = K(t)$$

$$\mu = \frac{M_0 l}{EI_0}, \quad \kappa = \frac{\rho_0 l^3}{J}, \quad \chi = \frac{ml^2}{J}, \quad K = \frac{M}{M_0}$$

Краевые и начальные условия запишутся следующим образом:

$$(2.19) \quad u(t, 0) = u_x(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0 \\ [I(x) u_{xx}]_x |_{x=1} = \mu \chi (u_{tt} + \varphi^{*2} - \varphi^{*2} u + \varphi^{*2} u_x)_{x=1} \\ u(0, x) = \mu f(x), \quad u_t(0, x) = \mu g(x)$$

В зависимости от постановки задачи управления условия в конце процесса управления имеют вид (1.10) или (1.11). Отметим, что в рассматриваемой постановке функции f , g и K должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям (см. ниже).

Решение строим методом теории возмущений по степеням малого параметра μ , полагая функцию $K(t)$ достаточно гладкой. В пределе (при $\mu = 0$) имеем $u^0(t, x) \equiv 0$, $(\varphi^0)^{**} = M^0(t)$. Функция $M^0(t)$ определяется соотношениями типа (2.14) или (2.15), взятыми при $g = f \equiv 0$. Функция φ^0 также определена. [Полагая

$$u = \mu u^1(t, x) + \mu^2 \dots, \quad \varphi = \varphi^0(t) + \mu \varphi^1(t) + \mu^2 \dots, \\ K = M^0(t) + \mu M^1(t) + \mu^2 \dots$$

для неизвестных функций u^1 , φ^1 , M^1 на основании (2.19) получим соотношения

$$(2.20) \quad [I(x) u_{xx}^1]_{xx} = -\kappa M^0(t) x \rho(x)$$

$$(\varphi^1)^{**} + \kappa \int_0^1 \rho(x) x u_{tt}^1(t, x) dx + \chi u_{tt}^1(t, 1) = M^1(t)$$

$$u^1(t, 0) = u_x^1(t, 0) = u_{xx}^1(t, 1) \equiv 0, \quad [I(x) u_{xx}^1]_x |_{x=1} = \chi M^0(t) \\ u^1(0, x) = f(x), \quad u_t^1(0, x) = g(x)$$

Разрешая для u^1 краевую задачу (2.20), получим выражение

$$u^1(t, x) = -M^0(t) \int_0^x \frac{x-s}{I(s)} n(s) ds$$

$$n(x) \equiv \kappa \int_0^x (x-s) s \rho(s) ds + \chi(1-x) - \kappa_* x + \kappa_{**}$$

$$\kappa_* = \kappa \int_0^1 x \rho(x) dx, \quad \kappa_{**} = \kappa \int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

Таким образом, функция $u^1(t, x)$ определяется через нулевое приближение управления $M^0(t)$, отвечающее задаче управления абсолютно жестким стержнем. Подставляя u^1 во второе уравнение (2.20), получим весьма простое соотношение для определения неизвестных φ^1, M^1 вида $(\varphi^1)'' + c M^0(t) = M^1$, где c — известная постоянная. В силу выбора φ^0 функции φ^1, M^1 могут быть произвольными, но такими, чтобы удовлетворялись начальные и конечные условия, например $M^1(t) \equiv c M^0(t), \varphi^1 \equiv 0$. Заметим, что начальное распределение в (2.20) может быть удовлетворено лишь при выполнении равенств

$$f(x) \equiv -M^0(0) \int_0^x \frac{x-s}{I(s)} \bar{n}(s) ds, \quad g(x) \equiv -M^0(0) \int_0^x \frac{x-s}{I(s)} n(s) ds$$

В частности, если $f(x) = g(x) \equiv 0$, то начальные условия выполняются при $M(0) = M^*(0) = 0$. Для $t \geq T$ также следует положить $M(t) = M^*(t) \equiv 0$. Таким образом, задача управления с учетом членов порядка μ включительно решена.

Малость параметра μ в уравнениях (2.17), (2.18) можно трактовать и по-другому, а именно, считая период собственных колебаний величиной порядка единицы, предположить малость углового ускорения (время поворота велико). Такой подход не требует высокой гладкости управляющей функции $M(t)$. Однако в этом случае необходимо решать задачу управления с учетом гашения счетного количества мод колебаний [5—8]. Соответствующий алгоритм приближенного решения может быть построен в виде разложения по степеням величины T^{-1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
5. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
7. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
8. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управлении системами с упругими элементами. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 22—31.
9. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
10. Черноуцко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
11. Book W. J. Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints. — Trans. ASME. J. Dyn. Syst., Measur. and Contr., 1979, v. 101, No. 3, p. 187—192.