Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 531.391 + 532.526 + 532.592

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ ЦИЛИНДРА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Дерендяев Н. В., Сандалов В. М.

В рамках плоской модели рассматривается задача об устойчивости в малом стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, в случае осесимметричного вязкоупругого закрепления его оси и при условии постоянства угловой скорости вращения цилиндра. С учетом симметрии задачи условия, определяющие значения параметров, при которых происходит изменение степени неустойчивости в системе, сводятся к условиям существования решения уравнений в вариациях, описывающего круговую прецессию цилиндра с жидкостью. В результате точного решения гидродинамической задачи найдена сила, с которой вязкая несжимаемая жидкость, частично заполняющая вращающийся цилиндр, действует на него в случае круговой прецессии. С использованием выражения для компонент этой силы построено разбиение плоскости параметров закрепления оси цилиндра на области с различной степенью неустойчивости.

При анализе моделей турбомашин возникает задача об устойчивости стационарного вращения кругового цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, в случае вязкоупругого осесимметричного закрепления его оси и при условии постоянства проекции угловой скорости цилиндра на ось стационарного вращения. В литературе по динамике тел с полостями, содержащими жидкость, можно указать лишь небольшое число работ [1—3], относящихся к данной задаче.

1. **Постановка задачи.** Пусть круговой цилиндр радиуса a совершает стационарное вращение вокруг своей оси (совпадающей с осью Z неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$), которая находится в вязкоупругом осесимметричном закреплении. Вязкая несжимаемая жидкость, частично заполняющая цилиндр, при стационарном вращении расположена в слое постоянной толщины h на боковой поверхности цилиндра и вращается вместе с ним как твердое тело. Ограничимся рассмотрением задачи об устойчивости в линейном приближении и в рамках плоской модели, т. е. в предположении, что точки цилиндра могут перемещаться лишь параллельно плоскости Oxy, а поле скоростей жидкости имеет лишь x, y-компоненты, которые, так же как и давление жидкости, не зависят от Z. Плоская модель применима, если осевые перемещения цилиндра и угловые перемещения его оси пренебрежимо малы (например, ось цилиндра в подшипниках), а сам цилиндр достаточно длинный (концевые эффекты несущественны).

Система линеаризованных уравнений плоской модели и граничных условий к ним, используемая в данной работе, содержит:

1) уравнения поступательного движения цилиндра параллельно плоскости Oxy, линеаризованные вблизи состояния цилиндра при стационарном вращении

$$Mx_0^{\cdot\cdot} + Hx_0^{\cdot} + Kx_0 = F_x, \quad My_0^{\cdot\cdot} + Hy_0^{\cdot} + Ky_0 = F_y \tag{1.1}$$

где x_0, y_0 — координаты точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy, F_x, F_y — компоненты силы, с которой жидкость действует на единицу длины цилиндра, M — масса единицы длины цилиндра, H, K —

соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости закрепления оси цилиндра, деленные на его длину.

2) условие постоянства угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси Z: $\Omega = \text{const}$;

3) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости Oxy, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси Oz;

4) условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от состояния стационарного вращения на поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = (a - h)^2$ соответственно;

5) формулы, определяющие F_x, F_y через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении.

2. Свойства симметрии и круговая прецессия. Перечисленные уравнения и граничные условия линейны и однородны относительно отклонений от состояния стационарного вращения цилиндра и частично заполняющей его жидкости и обладают двумя очевидными свойствами симметрии: а) инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени, т. е. преобразования $t' = t - t_0$; б) инвариантны относительно поворота системы координат вокруг Oz на угол $\pi/2$, т. е. преобразования $x' = y$, $y' = -x$, $z' = z$.

В силу свойства симметрии а) система уравнений 1) — 5) допускает частные решения $\sim e^{\lambda t}$, где λ — характеристическое число. Будем считать стационарное вращение цилиндра с жидкостью устойчивым в малом, если все λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы одно λ имеет положительную действительную часть. Если характеристические числа λ непрерывно зависят от параметров задачи, то изменение степени неустойчивости в системе происходит при появлении мнимого $\lambda = i\omega$. При этом наряду с решением уравнений 1) — 5)

$$(x^*\mathbf{e}_x + y^*\mathbf{e}_y,\ v_x^*(x, y)\,\mathbf{e}_x + v_y^*(x, y)\,\mathbf{e}_y,\ p^*(x, y))\,e^{i\omega t}$$

в силу свойства симметрии б) существует также решение

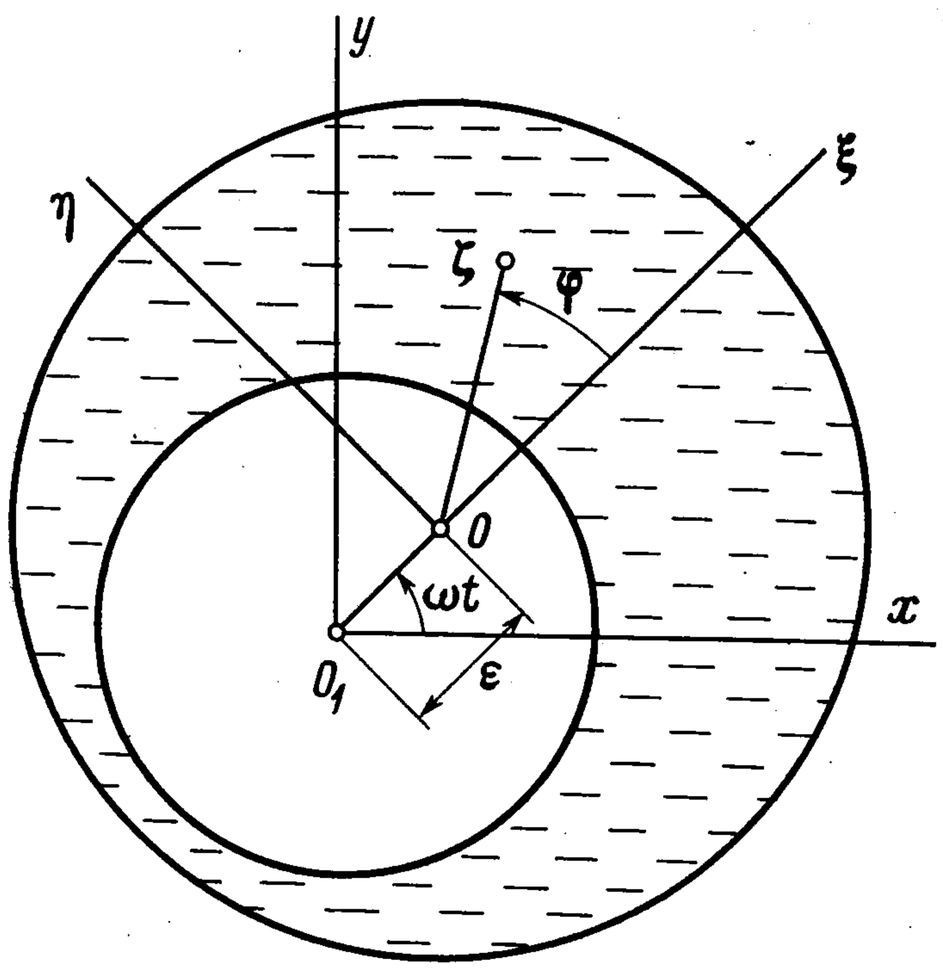
$$(-y^*\mathbf{e}_x + x^*\mathbf{e}_y,\ -v_y^*(y, -x)\,\mathbf{e}_x + v_x^*(y, -x)\,\mathbf{e}_y\ p^*(y, -x))\,e^{i\omega t}$$

где x^*, y^* — комплексные амплитуды компонент радиуса-вектора точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy, v_x^*, v_y^*, p^* — комплексные амплитуды отклонений компонент поля скоростей и давления жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении.

Умножая первое из этих решений на i и складывая со вторым, получим в силу линейности уравнений 1) — 5) частное решение, описывающее так называемую круговую прецессию цилиндра с жидкостью, т. е. такое движение, в котором точка пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy описывает окружность, а отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Обратно, если при некоторых значениях параметров уравнения 1) — 5) допускают решение типа круговой прецессии, то существует мнимое характеристическое число λ. Таким образом, значения параметров, при которых происходит изменение степени неустойчивости в системе (существует хотя бы одно мни-

мое характеристическое число), могут быть найдены из условия существования круговой прецессии цилиндра с жидкостью.

Приведенное соображение определяет ход решения задачи в данной работе. Именно, сначала рассматривается гидродинамическая задача о движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, совершающий круговую прецессию. Затем вычисляется сила, с которой жидкость действует на вращающийся цилиндр в случае круговой прецессии. Далее, на основании полученных выражений для гидродинамической силы из уравнений поступательного движения цилиндра (1.1) находятся условия, при которых возможна круговая прецессия. Эти условия, в соответствии со сказанным выше, определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи.



Фиг. 1

3. Гидродинамическая задача. Пусть бесконечно длинный круговой цилиндр с внутренним радиусом a вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 и прецессирует с частотой ω таким образом, что его ось описывает цилиндрическую поверхность радиуса ε (фиг. 1). Абсолютная угловая скорость цилиндра Ω складывается из угловой скорости собственного вращения цилиндра ω_0 и скорости прецессии ω ($\Omega = \omega_0 + \omega$).

Выберем неинерциальную систему отсчета $O\xi\eta$ (фиг. 1), жестко связанную с так называемой линией центров, проходящей через центр прецессии O_1 и центр сечения цилиндра O. Эта система поступательно двигается по окружности радиуса ε со скоростью $\omega\varepsilon$ и вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω. В пространстве отсчета $O\xi\eta$ введем полярную систему координат r, φ с центром в точке O. В этой системе координат компоненты поля сил инерции, действующих в пространстве отсчета $O\xi\eta$ на частицу единичной массы, имеют вид

$$f_r = \omega^2 r + 2\omega v + \omega^2\varepsilon\cos\varphi, \quad f_\varphi = -2\omega u - \omega^2\varepsilon\sin\varphi \tag{3.1}$$

где u, v — радиальная и азимутальная компоненты скорости частицы относительно системы отсчета $O\xi\eta$.

Рассмотрим задачу о плоском движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, в случае круговой прецессии с малым радиусом ε, при которой отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений малы и в неподвижной системе отсчета изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Используя закон изменения энергии вязкой жидкости, можно показать, что в случае круговой прецессии с малым радиусом движение жидкости относительно системы отсчета $O\xi\eta$ установившееся, т. е. не зависит от времени.

Уравнения установившегося движения жидкости относительно системы $O\xi\eta$ и граничные условия, линеаризованные вблизи стационарного ква-

зитвердого вращения жидкости вокруг оси цилиндра

(3.2) $$u = 0, \quad v = \omega_0 r$$

записываются в виде

(3.3) $$\omega_0 \frac{\partial u'}{\partial \varphi} = \Omega^2 r + \omega^2 \varepsilon \cos\varphi + 2\Omega v' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v'}{\partial \varphi}\right)$$

$$\omega_0 \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = -\omega^2 \varepsilon \sin\varphi - 2\Omega u' - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u'}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0$$

(3.4) $$u' = 0, \quad v' = 0, \quad r = a$$

(3.5) $$-p - \rho\Omega^2 r\eta + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial r} = -p_0, \qquad \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{v'}{r} = 0$$

$$\omega_0\, \partial\eta/\partial\varphi = u', \quad r = a - h$$

Здесь u', v' — малые отклонения компонент поля скоростей от (3.2), p — давление, ρ — плотность, ν, μ — кинематическая и динамическая вязкость жидкости, $r = a - h + \eta(\varphi)$ — уравнение свободной поверхности жидкости, p_0 — давление на свободной поверхности.

Введем потенциалы Ламба θ, ψ и функцию χ

$$u' = \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \qquad v' = \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\chi = {}^1/_2\Omega^2 r^2 + \omega^2\varepsilon r\cos\varphi - 2\Omega\psi + \mathrm{const}$$

Тогда система (3.3) перепишется так:

(3.6) $$\frac{\partial}{\partial r}F + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}G = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}F - \frac{\partial}{\partial r}G = 0, \qquad \Delta\theta = 0$$

$$F = \chi - \frac{p}{\rho} - \omega_0\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \qquad G = \nu\Delta\psi + 2\Omega\theta - \omega_0\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

Как показано в приложении, неоднозначностью в выборе потенциалов Ламба (калибровкой потенциалов) можно распорядиться так, что (3.6) сведется к системе

(3.7) $$F = 0, \quad G = 0, \quad \Delta\theta = 0$$

Граничные условия (3.4), (3.5) после введения потенциалов Ламба принимают вид

(3.8) $$\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \qquad r = a$$

(3.9) $$2\nu\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\varphi}\right) - \frac{p}{\rho} - \Omega^2 r\eta = -\frac{p_0}{\rho}$$

$$r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial\varphi} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + 2\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - r\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

$$\omega_0\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \qquad r = a - h$$

Уравнения (3.7) с граничными условиями (3.8), (3.9) содержат лишь следующие размерные параметры: ω_0, Ω, ν, a, $a - h$, ε (параметр p_0 несуществен, так как жидкость несжимаема). В силу линейности сформулированной краевой задачи параметр ε войдет в решение в первой степени. Этим параметром определяется лишь масштаб скорости движения жидкости, вызванного прецессией цилиндра. Оставшиеся пять параметров обра-

зуют всего три независимые безразмерные комбинации

$$\frac{\omega}{\Omega}, \quad \frac{a-h}{a}, \quad \frac{\nu}{\Omega a^2} \tag{3.10}$$

которые и будут критериями подобия в рассматриваемой задаче.

4. Вычисление гидродинамической силы. Перейдем к решению краевой задачи (3.7) — (3.9). Будем искать решение системы (3.7) в виде

$$\theta = 2\mathrm{Re}\,[\Theta(r)e^{i\varphi}], \quad \psi = 2\mathrm{Re}\,[\Psi(r)e^{i\varphi}], \qquad i^2 = -1$$

Из третьего уравнения системы (3.7) найдем

$$\theta = 2\,\mathrm{Re}\left[\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right)e^{i\varphi}\right] \tag{4.1}$$

после чего второе уравнение сведется к

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \left(\frac{i\omega_0}{\nu} + \frac{1}{r^2}\right)\Psi = -\frac{2\Omega}{\nu}\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) \tag{4.2}$$

Интегрируя (4.2), получим ($H_n^{(1),(2)}(kr)$ — функции Ганкеля)

$$\psi = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left[-\frac{2\Omega}{\omega_0}i\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) + c_3 L_1(kr) + c_4 M_1(kr)\right]e^{i\varphi}\right\} \tag{4.3}$$

$$L_1 = e^{-\varkappa a}H_1^{(2)}(kr), \quad M_1 = e^{\varkappa b}H_1^{(1)}(kr)$$

$$k = \varkappa\left(-\frac{\omega_0}{|\omega_0|} + i\right), \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{|\omega_0|}{2\nu}}, \qquad b = a - h$$

Выражение для давления найдем из первого уравнения (3.7)

$$\frac{p}{\rho} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left[-i\omega_0\left(c_1 r + \frac{c_2}{r}\right) + \frac{\omega^2\varepsilon r}{2}\right]e^{i\varphi}\right\} - 2\Omega\psi + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C \tag{4.4}$$

Отклонение свободной поверхности жидкости $\eta(\varphi)$ ищем в виде

$$\eta(\varphi) = 2\mathrm{Re}\,(\eta^* e^{i\varphi}) \tag{4.5}$$

Подставляя (4.1), (4.3) — (4.5) в граничные условия (3.8), (3.9), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, а также выражения для η^* и аддитивной постоянной в (4.4)

$$\frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{a^2} + \frac{i}{a}Z_1(ka) = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{3-\tau}{1-\tau}ic_1 - \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{i}{a^2}c_2 - kZ_0(ka) + \frac{1}{a}Z_1(ka) = 0$$

$$\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{4i}{b^3}c_2 + \frac{2k}{b}Z_0(kb) + \left(k^2 - \frac{4}{b^2}\right)Z_1(kb) = 0$$

$$-\frac{\tau^2(3-\tau)}{(1-\tau)^2}ibc_1 + \frac{i}{b}(1+\tau)\left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{(1-\tau)^2} - \frac{4}{k^2b^2}\right]c_2 -$$

$$-2\frac{1-\tau}{kb}Z_0(kb) + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + 4\frac{1-\tau}{k^2b^2}\right)Z_1(kb) = -\frac{1}{2}\tau^2\Omega\varepsilon b$$

$$i\omega_0\eta^* = \frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{b^2} + \frac{i}{b}Z_1(kb), \qquad C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\Omega^2 b^2}{2} \tag{4.7}$$

$$\tau = \frac{\omega}{\Omega}, \qquad Z_n(kr) = c_3 L_n(kr) + c_4 M_n(kr)$$

$$L_n(kr) = e^{-\varkappa a}H_n^{(2)}(kr), \qquad M_n(kr) = e^{\varkappa b}H_n^{(1)}(kr)$$

При выводе (4.6) были использованы известные формулы для производных от цилиндрических функций [4]. В ряде интересных случаев значение kr ($b \leqslant r \leqslant a$) очень велико, что позволяет также использовать в (4.6) асимптотические разложения для этих функций. Применение перенормированных функций Ганкеля $L_n(kr)$, $M_n(kr)$ оказывается при этом очень удобным.

После того как найдены постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, краевая задача (3.7) — (3.9) в принципе решена. Обратимся к вычислению силы, с которой жидкость действует на цилиндр. Интегрируя напряжения, приложенные к внутренней поверхности цилиндра, получим для компонент силы, действующей на единицу его длины

$$F_\xi = 2\pi a\rho \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\omega^2\varepsilon a + 2i(\Omega+\omega)\frac{c_2}{a}\right] \tag{4.8}$$

$$F_\eta = -4\pi\rho(\Omega+\omega)\operatorname{Re} c_2$$

В случае, когда частота прецессии $\omega \to \Omega$, можно сравнительно просто выразить c_2 из (4.6), воспользовавшись асимптотическими разложениями для цилиндрических функций при малых значениях аргумента [4], и записать (4.8) в виде

$$F_\xi = \pi\rho\Omega^2 a^2\varepsilon + O(\omega_0) \tag{4.9}$$

$$F_\eta = \frac{8\pi\varepsilon\mu\omega_0(\delta^4+1)}{\delta^4-1-2(\delta^4+1)\ln\delta} + O(\omega_0^2\ln|ka|), \qquad \delta = \frac{b}{a}$$

Из выражений (4.9) видно, что в окрестности резонанса $\omega = \Omega$ проекция силы на линию центров $F_\xi > 0$, т. е. гидродинамическая сила стремится увести ось цилиндра от оси прецессии (на фиг. 1 точка пересечения оси прецессии плоскостью рисунка — центр прецессии O_1). Далее, компонента силы F_η может быть отлична от нуля только в случае вязкой жидкости ($\mu \neq 0$). Знаменатель в выражении для F_η при $0 < \delta < 1$ положителен, следовательно, при $\omega < \Omega$ имеем $F_\eta > 0$, т. е. гидродинамическая сила стремится увеличить угловую скорость прецессии цилиндра, а при $\omega > \Omega$ получаем, что $F_\eta < 0$ и эффект действия силы обратный. Эти выводы согласуются с так называемой концепцией вращающегося трения [5], распространенной в прикладных исследованиях. Отметим также, что момент гидродинамической силы (4.9) относительно оси цилиндра равен нулю.

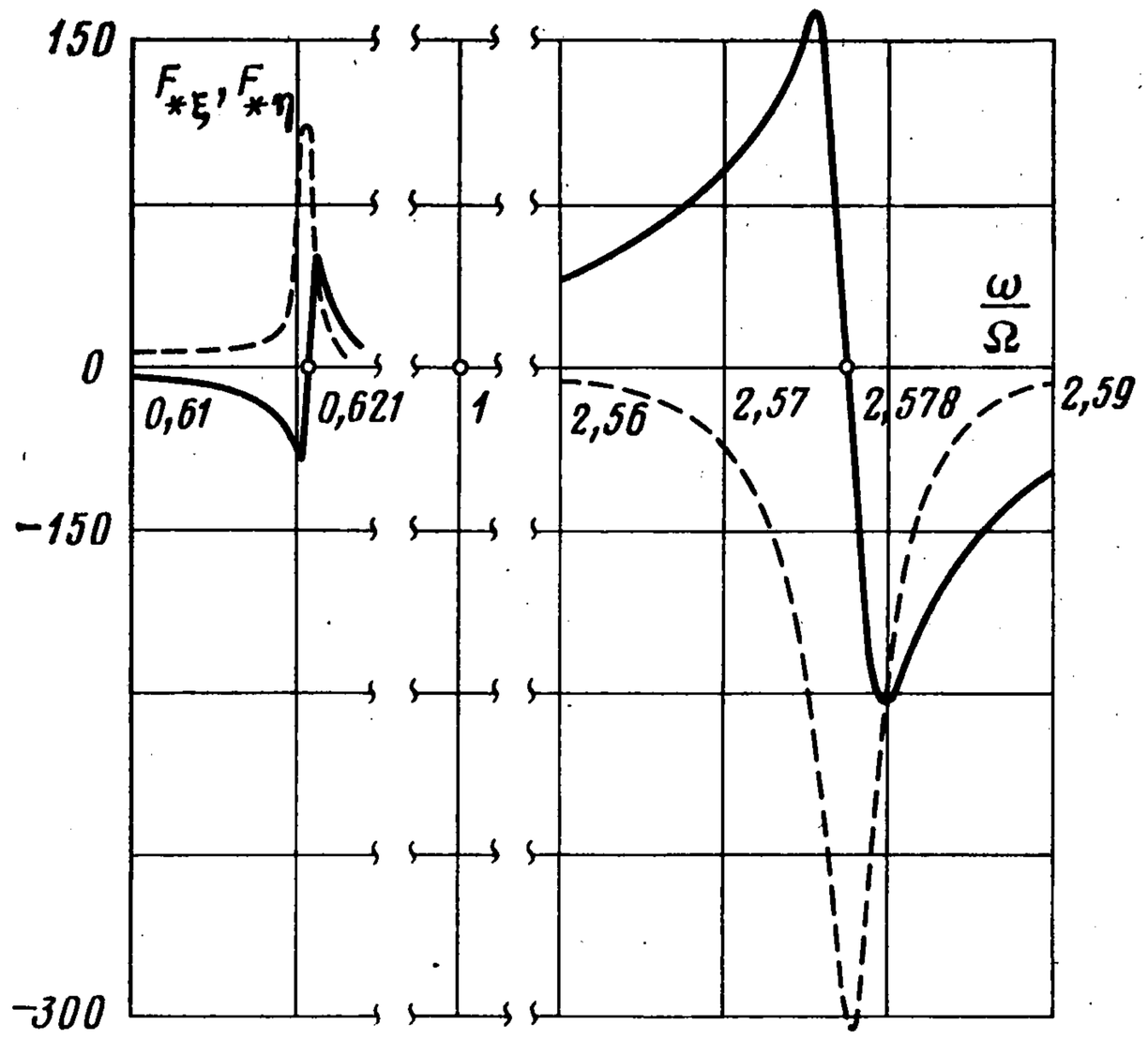
На фиг. 2 изображены в качестве примера зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы $F_{*\xi} = F_\xi/F^\circ$ (сплошные линии) и $F_{*\eta} = F_\eta/F^\circ$ (штриховые линии) от ω/Ω, полученные в соответствии с (4.6), (4.8) в случае $\delta = 0{,}5$; $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-5}$. Масштаб силы $F^\circ = m\omega^2\varepsilon$, где $m = \pi\rho(a^2 - b^2)$ — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины цилиндра. Зависимость силы от отношения частот ω/Ω носит четко выраженный резонансный характер, что обусловлено резонансным возбуждением волн, распространяющихся по свободной поверхности вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр.

Сравнение результатов вычисления гидродинамической силы с силой, полученной в рамках консервативной модели ($\mu = 0$), показывает хорошее количественное совпадение ξ-компонент вне окрестностей резонансных значений ω/Ω. Вместе с этим в окрестностях резонансов, в отличие от того, что дает консервативная модель, ξ-компонента гидродинамической силы конечна и сравнима по величине с η-компонентой. Важно также отметить, что в окрестностях резонансов, даже при весьма малых значениях параметра $\nu/(\Omega a^2)$, волновое движение, вызванное прецессией цилиндра, всюду в жидкости сильно отличается от того движения, которое дает консервативная модель.

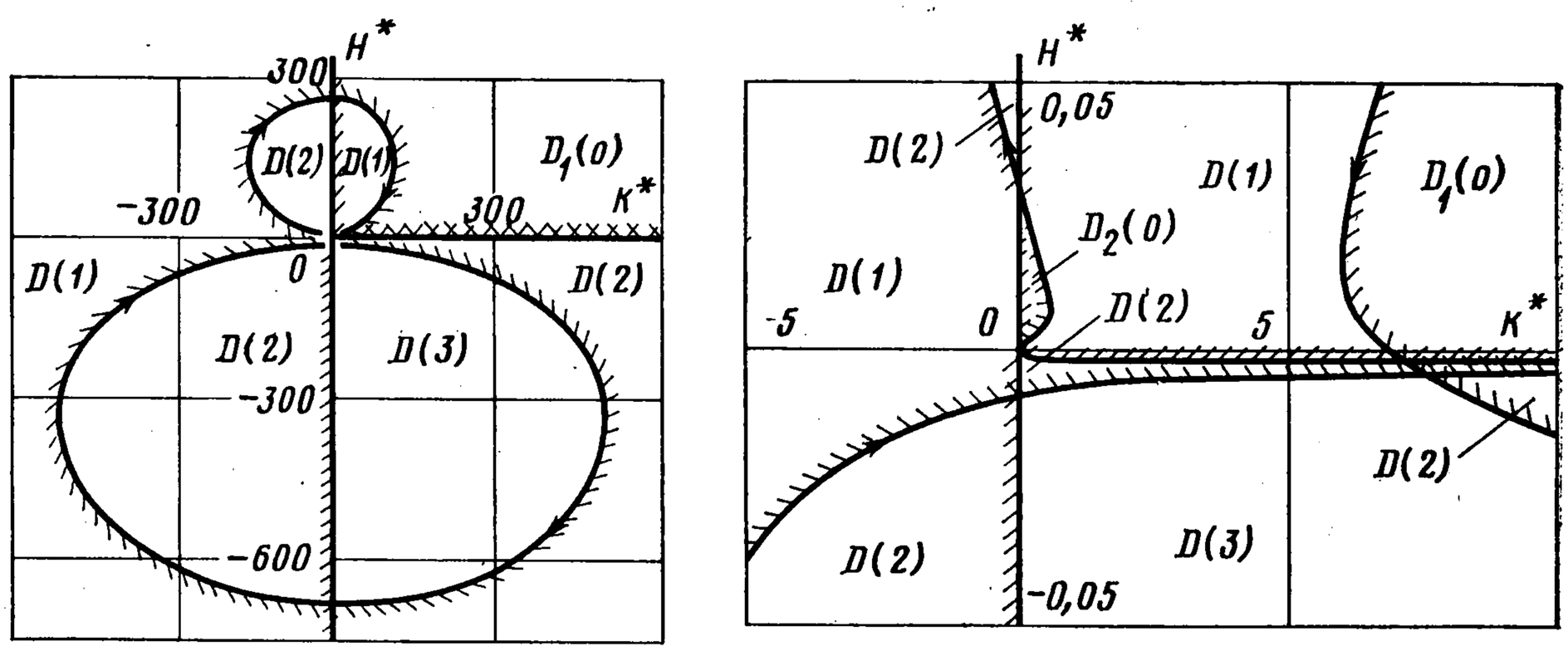
5. Построение области устойчивости стационарного вращения в плоскости параметров закрепления оси цилиндра. Подставим вычисленную в п.4 гидродинамическую силу, действующую на единицу длины цилиндра, в уравнения движения цилиндра, положив в правых частях (1.1)

$$F_x = F_\xi\cos\omega t - F_\eta\sin\omega t, \quad F_y = F_\xi\sin\omega t + F_\eta\cos\omega t$$

Положив затем в (1.1) $x_0 = \varepsilon\cos\omega t$, $y_0 = \varepsilon\sin\omega t$, что соответствует круговой прецессии с частотой ω и радиусом ε, получим соотношения,



Фиг. 2



Фиг. 3

связывающие ω и параметры задачи в случае круговой прецессии

$$K_* - \frac{M}{m}\tau^2 = F_{*\xi}\tau^2, \qquad H_*\tau = F_{*\eta}\tau^2; \qquad K_* = \frac{K}{m\Omega^2}, \qquad H_* = \frac{H}{m\Omega} \tag{5.1}$$

где K_*, H_* — соответственно безразмерные коэффициенты демпфирования и жесткости закрепления оси цилиндра.

Безразмерные компоненты силы $F_{*\xi}$, $F_{*\eta}$ зависят только от параметров (3.10). При фиксированных значениях этих параметров соотношения (5.1) задают в плоскости H_*, K_* кривую, точкам которой соответствуют такие значения параметров, при которых возможна круговая прецессия цилиндра. Эта кривая в соответствии со сделанными выше замечаниями разбивает плоскость параметров закрепления оси цилиндра H_*, K_* на области с различной степенью неустойчивости. Следуя [6], будем называть ее D-кривой.

На фиг. 3 приведено разбиение плоскости H_*, K_*, осуществляемое D-кривой, в случае $\delta = 0{,}9$, $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-6}$, $M/m = 1{,}68$. Стрелкой вдоль D-кривой указано направление возрастания параметра τ. D-кривая на фиг. 3 образована регулярной ветвью, вдоль которой параметр τ изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$ и каждому значению параметра τ соответствует одна точка кривой, и особой прямой $K_* = 0$, соответствующей $\tau = 0$.

Наличие особой прямой вызвано тем, что при $\tau = 0$ компоненты гидродинамической силы обращаются в нуль.

D-кривую принято штриховать так, что переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости. В рассматриваемой здесь задаче характеристические числа, в общем случае, пересекают мнимую ось плоскости λ по одному, а не комплексно-сопряженными парами. Это вызвано тем, что при постоянном Ω уравнения рассматриваемой задачи не инвариантны относительно смены знака частоты прецессии ω; из существования характеристического числа $\lambda = i\omega$ еще не следует, что $\lambda = -i\omega$ так же характеристическое число. Вследствие этого при переходе со штрихованной стороны D-кривой на нештрихованную степень неустойчивости должна, в общем случае, увеличиваться на единицу.

Штриховка может переходить с одной стороны D-кривой на другую в тех точках, где нарушается однозначность отображения мнимой оси плоскости λ в точки D-кривой [6]. В рассматриваемой здесь задаче штриховка D-кривой меняется только в точке регулярной ветви, соответствующей значению $\tau = 0$, поскольку лишь при этом значении τ нарушается однозначность вышеназванного отображения (точке $\tau = 0$ на мнимой оси плоскости λ соответствует особая прямая в плоскости параметров закрепления оси цилиндра.)

Область устойчивости всегда должна содержать точку, соответствующую достаточно большим положительным значениям коэффициента демпфирования H_*. Исходя из этого на фиг. 3 указана область с нулевой степенью неустойчивости — D_1 (0). Указаны также области D (n) со степенью неустойчивости n. Интересно отметить, что наряду с D_1 (0) существует еще одна область устойчивости — D_2 (0), в окрестности нулевых значений H_*, K_* (разбиение этой окрестности приведено в правой части фиг. 3). Отметим также, что при $H_* = 0$ точке на границе области устойчивости соответствует $\tau = 1$, что согласуется с известным результатом, установленным в [5] путем феноменологического введения сил внутреннего трения во вращающемся роторе.

6. Приложение. Потенциалы Ламба θ, ψ определены неоднозначно. Действительно, сделав замену $\theta \to \theta + \delta\theta$, $\psi \to \psi + \delta\psi$, где

$$\frac{\partial}{\partial r}\delta\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\delta\psi = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\delta\theta - \frac{\partial}{\partial r}\delta\psi = 0 \tag{6.1}$$

получим те же u', v'. Пусть величина F определена согласно (3.6). Тогда при изменении потенциалов в соответствии с (6.1) будем иметь

$$F \to F - 2\Omega\delta\psi - \omega_0 r\frac{\partial}{\partial r}\delta\psi$$

Если теперь взять

$$\delta\psi = r^{-\gamma}\int r^{\gamma-1}g\,dr, \quad \Omega \neq \omega; \qquad \delta\psi = \frac{F}{2\Omega}, \quad \Omega = \omega \tag{6.2}$$

$$(g = F/\omega_0,\ \gamma = 2\Omega/\omega_0)$$

то измененные потенциалы θ, ψ будут таковы, что F обратится в нуль.

Покажем, что уравнения (6.1) допускают выбор $\delta\psi$ в виде (6.2). Система (6.1) разрешима относительно $\delta\theta$, если

$$r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\delta\psi + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\delta\psi = 0 \tag{6.3}$$

Подставив (6.2) в (6.3), получим ($\Omega \neq \omega$)

$$r\frac{\partial}{\partial r}g - \gamma g + \gamma^2\delta\psi + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\delta\psi = 0 \tag{6.4}$$

Интегрируя по частям, убедимся, что

$$r^{-\gamma}\int r^{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}g\,dr = r\frac{\partial}{\partial r}g - \gamma g + \gamma^2\delta\psi$$

и, следовательно, уравнение (6.4) представимо в виде

$$r^{-\gamma}\int r^{\gamma-1}\left(r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}g + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}g\right)dr = 0$$

Последнее равенство справедливо, так как F удовлетворяет (6.3) при любом выборе потенциалов. По этой же причине $\delta\psi$ из (6.2) удовлетворяет (6.3) и при $\Omega = \omega$.

Итак, при $\delta\psi$ из (6.2) система (6.1) разрешима и определяет $\delta\theta$ с точностью до аддитивной постоянной. Ввиду этого потенциалы Ламба можно выбрать так, что $F = 0$. Потенциал θ при этом все еще определен с точностью до аддитивной постоянной. Обращаясь к (3.6), получим $G = \text{const}$. Аддитивную постоянную в потенциале θ, оставшуюся неопределенной, можно выбрать так, чтобы постоянная в правой части последнего равенства обратилась в нуль.

Таким образом, показано, что существуют такие потенциалы Ламба, пользуясь которыми можно систему (3.6) свести к (3.7).

Авторы благодарят Г. Г. Денисова за участие в обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Епишев Л. В.* О динамической неустойчивости вращающегося ротора при неполном наливе жидкости.— Научн. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение, 1959, № 2, с. 66—74.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 977—991.
3. *Saito S., Someya T.* Self-excited vibration of a rotating hollow shaft partially filled with liquid.— Trans. ASME. J. Mech. Design, 1980, v. 102, No. 1, p. 185—192.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1949, 799 с.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
6. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 141 с.

Горький

Поступила в редакцию
28.I.1982